Kira线代小菊花解毒大力丸

（考研数学一二三完整版）

编者　Kira 张翀

微博 @Kira 言而信

公众号 @Kira 考研数学

淘宝 @Kira 考研周边小铺

编者简介：

Kira，原名张翀，长在山东烟台，本科上海交通大学数学系，2016 届考研上海交通大学应用统计（数三英一）416 分，《Kira 高数葵花宝典》系列笔记编者，考研心态&方法论微博博主。

现研究生在读，兼任上海新东方考研数学主讲教师。

2017 年底开设“考研概统醒脑抢分班”网络课，半个月累计招生约 2000 人，课堂评分全五星，有效地帮助了在概统泥潭里挣扎的凉凉们瞬间上岸。

正在不断努力帮助同学们发现数学有趣的、不那么困难、能一语道破天机的一面，清清爽爽自信满满地战胜考研数学。

《Kira 线代小菊花解毒大力丸》使用说明

1. 《Kira 线代小菊花丸》内含三丸，依次是——筑基第一丸行列式&矩阵、重磅第二丸解方程组&向量、满分第三丸特征值特征向量&二次型，其中每丸包含两篇，每篇包含两个主题——必备常识/做题根基、解题套路。

   在“必备常识/做题根基”主题下有三个模块——

   1) 术语（主要概念）：囊括了解决本丸问题所需的全部概念定义，并给出生动解释；
   2) 必会公式定理：囊括了解决本丸问题所需的全部公式定理，并给出生动解释；
   3) 必考解题套路：这个不是每篇都有的，只有必考的重大的计算套路才有，我在目录中描述为“求 XXXX 的成熟手法”

   每个“解题套路”主题下再分若干种题型，是我根据历年真题和典型例题的考查方式精心总结的题型分类，非常细致，大家可以根据自己的情况进行有针对性的学习，例题的选择以历年有代表性的真题为主，同时选取了大量例题作为对真题题型的补充。

2. 《Kira 线代小菊花丸》的一大亮点是，我在大部分例题前面都写了一段“Kira 心路历程”（“心路历程”四个字引自狼人杀，跳预言家需要把“心路历程”说到饱满，做题也有心路历程），我会告诉你**拿道题目的时候，我看到了什么，我在想什么，我用什么方式把它做出来**，希望能给你一些参考。此外，与高数和概统相同，我添加了大量“Kira 备注”、“Kira 解析”，有些是强调易错点，有些则是在进行口语化阐述，大家可根据自己的需要进行精读和跳读。

3. 《Kira 线代小菊花丸》每篇都被拆成了三~四大块，每一块内的知识点和例题相对独立，不同块之间难度深度循序渐进，确保读者在完整吸收好了一块内容后，再进行下一块。包你学得扎扎实实，清清爽爽。

4. 关于阅读顺序，你可以认为这三丸彼此之间是相对独立的，而每丸内部联系十分紧密，读者可以挑选自己认为最薄弱的一丸率先进行。处于强化阶段的同学可以从第三丸开始，倒着刷回第一丸，你会发现自己站的视角和高度完全不同，通透舒服；零基础的同学建议从第一丸开始，排着往后刷，知识都是层层递进的。

5. 做线代时，“数感”和“形感”很重要（我自己造的>-<）所谓数感就是快速找到计算量最小的方案，比如行列式计算快速找到对哪行（列）展开，比如对矩阵初等行变换时能快速而恰当地换行、处理、拿到行最简，这需要眼力，也需要大脑快速运转；所谓“形感”即对“虚实”“满空”的感觉，矩阵发虚发空，就是不满秩，就是行列式为 0，就有向量组相关,向量怎么乘是矩阵，怎么乘是常数，这些都是可以被感知的。

6. 很多同学在面对证明题都是道理都懂，也隐约能感知其中的逻辑，但就是下不去笔，为什么？因为你素材积累还不够，换言之，我建议你背诵默写证明题的标准答案，学习答案如何设，如何推，如何把抽象的逻辑用扎实的定理和数学语言叙述出来。像背诵英语和政治那样，数学也是一门语言。

7. 任何题型在第一次遇到时不会做，都可以不算是你的错，我们都不是天才，没办法一下

想到专业的方法，但我们可以学，再次见到同一题型就会做了，我还是那句话，“考试考的是经验”。

8. 笔记中每一处细节都欢迎指正、提出修改建议和与我进行讨论，我会定期进行修订，努力让笔记内容更加完善。

9. 欢迎关注我的微信公众号Kira考研数学，微博@Kira 言而信 获取我的最新观点、产品和动态，有任何问题和反馈欢迎通过评论与我交流。愿我们都能在这最好的年纪里，野蛮生长，得偿所愿。

Kira
2017/12/16

Kira 线代小菊花丸 地表最强目录

筑基第一丸 ——

行列式、矩阵

♥ kira前言：阅读过我高数笔记的同学都知道，我把极限、不定积分、定积分、求导四块纯计算内容单独拿出来编成"大王小王篇"，帮助大家提升计算、树立自信。线代我个人认为没有太明显的"大王小王"，每一章都是"大王小王"（笑），但是根基一定在行列式和矩阵，你不需要把行列式和矩阵钻到多深多难（因为你会发现后面几章计算都是用最简单的计算方法）你只需用心地一遍遍地，记住所有你应当记住的公式、性质、结论，确保做题的方法足够正确，手法足够娴熟～加油！唯手熟尔！

行列式篇

- 数字型行列式、行列式展开定理
- 抽象型行列式、方阵的行列式
- 代数余子式的计算

▶ 1. 数字型行列式

必备常识 / 做题根基

一 术语（主要概念）

(1) 行列式：行列式是一个把 n^2 个元素按某种法则*运算得到的算式，得到的数值称行列式的值。

（☺ kira备注：①本质上，行列式是「算式」，但在线代问题的处理中，直接认为行列式是一个「数」就好，本书会始终默认这一点；②"*"：该"法则"即完全展开式（涉及排列、逆序等概念）做题用不着，本书不讲，可自行阅读教材。）

举例

某数表 $\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$ → 确定的二阶行列式 $ad-bc$

→ 并记作 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

(2) 矩阵：m×n个数排成m行n列数表，称 m×n 矩阵.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

（ㅂ kira 扫盲：①每个元素 a_{ij} 的下角标中，i为行序号，j为列序号；②特别地，m=n时，称A为n阶方阵.）

$\boxed{\text{注意}}$ 只有n阶方阵 才有行列式（有同学拿3×4矩阵问我如何求行列式… 要方 [⋮⋮⋮] ！

(3) 余子式 M_{ij}：划去 i行j列 剩下的n-1阶行列式

(4) 代数余子式 A_{ij}：$(-1)^{i+j}M_{ij}$，即给 M_{ij} 前添个正负号

（i+j为奇数 添一号，i+j为偶数添十号，如 $A_{34}=-M_{34}$，$A_{22}=M_{22}$）

$\boxed{\text{注意}}$ 余子式 A_{ij} 和代数余子式都是数!!! 不要看到大写字母就以为是矩阵，看 A_{ij} 就像什么不得了的大矩阵，错，它们都是行列式！是数！

☆ kira 助记：如何记牢 "M_{ij}—余子式—M_{ij}"

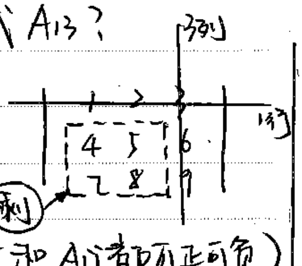
"A_{ij}—代数余子式—$(-1)^{i+j}M_{ij}$"

① A是Algebraic的缩写，所以涉及"代数"两字用A；

② 代数代数 就是"多带了一个数"（胡扯！），所以多带了$(-1)^{i+j}$.

举例

问 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ 的余子式 M_{13}？代数余子式 A_{13}？



M_{13}：去掉第1行第3列剩下的行列式

即 $M_{ij}=\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}=32-35=-3$

$A_{ij}=(-1)^{1+3}M_{13}=-3$ （注：显然，M_{ij} 和 A_{ij} 都可正可负）

[2] 必会性质定理 (会证明) (内化)

(1) 行列式展开定理(根基)

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{aligned} &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (\text{按行}) \\ &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (\text{按列}) \end{aligned}$$

$(i,j=1,2,\cdots,n)$

Kira备注：① 所有行列式用展开定理一定可以成功求出值来，用时根据行列式特点，从10秒到10小时不等……② 示范：

$$|A| = \begin{vmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 3} \\ 4 \quad 5 \quad 6 \\ 7 \quad 8 \quad 9 \end{vmatrix}$$ 按第一行展开：$|A| = 1\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$

步骤：<1> 把第一行中的数一个个拿出来，再乘对应余子式 M_{ij}（乘 $(-1)^{i+j}$ 不能忘）<2> 每项前添"+"或"-"，比如"2"在1行2列，则添 $(-1)^{1+2}=-1$ 负号，添正负一定是正负交错的（但各项不一定正负交错）<3> 各项全部相加。

③ 按哪行(列)展开自己决策，原则是抓0最多的行(列)展开，因为展开式出0最多，计算量最小。

★ 重要思想：求行列式记住一句话"龙生龙，凤生凤，老鼠儿子会打洞"，一定要想尽各种办法利用计算性质"打洞"，即在同一行或同一列消出大量0，一行(列)只保留1~2个非0数再展开。

推论：

a. 当 $i \neq k$ $(i,k=1,2,\cdots,n)$ 时有 $a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=0$

b. 当 $j \neq k$ $(j,k=1,2,\cdots,n)$ 时有 $a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+\cdots+a_{nj}A_{nk}=0$

Kira解读：A_{ij} 删去了 a_{ij} 所在行(列)，所以第 i 行和第 j 列取值和 A_{ij} 毫无干系，即使把整个第 i 行换掉，A_{ij} 也不会改变。所以，比如：

对于 3×3 行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，若求

$a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}$ (*)（注 $a_{ij}A_{kj}$ 的行不同，但列是一一对应的）则本质上可看作对第二行展开（关键 A_{ij} 在哪行!!!）而第二行原来的3个数 a_{21}, a_{22}, a_{23} 被替换为 a_{11}, a_{12}, a_{13}.

即(*)式实质是对如下行列式按第2列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \boxed{a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

后面会学到"两行相同，则行列式为0"，所以(*)式的值为0.

(☺行列式展开定理在含有"多零行"或"多零列"的行列式求值中十分有效，本章重点即是掌握利用基本性质和展开定理计算简单行列式 $|A|$ 的值，建议大家不要太关注"奇形怪状"行列式的求值，非考研重点。)

(2) 基本运算性质（部分需借助矩阵概念，后面详说）

(i) $|A^T|=|A|$ 　例 $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$（互换行列）

(☺ Kira备注：因此行列式中行和列是等价的，各种性质把"行"换成列依然成立)

(ii) 将行列式任一两行（或两列）互换位置，行列式变号 例 $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$

特别地，若有两行(列)值相同，行列式为0 例 $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=0$

(iii) 将行列式的某一行(列)乘k，行列式值变为原来k倍 例 $\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$

特别地，某行(列)元素全为0，行列式为0 例 $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=0$

特别地，两行(列)元素对应成比例，行列式为0 例 $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}=0$

(iv) 某行(列)所有元素都是两数之和，则可写成两个行列式之和

例 $\begin{vmatrix} 3+1 & 1+2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$

特别地，某行k倍加至另一行，行列式的值不变.

(☺以上需信手拈来，多练题就好了.)

(3) 常用计算公式（背）

(i) 低阶行列式计算公式（主对角线相乘减副对角线相乘）

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad （常用）$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2$$

（注：三阶也可用展开定理，先化二阶，加快计算）

[kira扫盲：$|\diagdown|$ 主对角线指这条线上的元素，"汉字笔画'捺'"]

(ii) 上（下）三角行列式的值等于主对角线元素乘积，$|◹| = |◺|$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

★ 重要思想：求行列式除想尽各种办法打洞消0外，还要想尽各种办法朝上三角行列式化，主要就这两大法宝！

副对角线行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ \vdots & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

(iii) 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n}(x_i - x_j)$$

kira解读：①特点是：第一行全是1，第二行随便写，第三行开始每一行都是第二行对应元素的 $n-1$ 次方 ②行列式值为所有第2行的"后面元素 − 前面元素"，直至穷尽所有可能。

例如：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)$ 一定要会观察形式！

解题套路

● 常见题型依次如下（可先做教材练习过渡）

(1) 利用行列式展开定理

(2) 利用上(下)三角行列式

(3) 利用范德蒙行列式

[1] 利用行列式展开定理

[2] 利用上(下)三角行列式

}（两条腿一起走）

—— >> 真题演练（2016 数一三）——

行列式 $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} =$ ______

前三行横着看很整齐

（Kira 心路历程：这个行列式有特色，0多，且有大量 λ 和 -1 组合，考虑把第一列前三行全部消成 0 ⇒ 将各列处理后加到第一列）

解：将第二列的 λ 倍加到第一列，然后将第三列的 λ^2 倍加到第一列，如此继续，有

$$D=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ \lambda^2 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4+3\lambda & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ \lambda^3 & 0 & \lambda & -1 \\ 4+3\lambda+2\lambda^2 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4+3\lambda+2\lambda^2+(\lambda+1)\lambda^3 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4)(-1)^{1+4}\cdot(-1)^3$$

$$=\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4$$

（Kira 总结：① 每次加到第一列都会出一个 0，目标明确
② 也可以直接对第一列（行）展开，死算，但效率低且易出错）

—— 例 1 ——

行列式 $\begin{vmatrix} 1+x & 2 & 3 & 4 \\ -x & x & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & 0 \\ 0 & 0 & -x & x \end{vmatrix} =$ ______

后三行横着看很整齐

(😊 kira 提示：有大量0和相反数，考虑直接把所有行(列)加到某一行(列)，使某行(列)只有一个非零元)

解：将各列均加至第一列，并按第一列展开有

$$D=\begin{vmatrix} x+10 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & 0 \\ 0 & 0 & -x & x \end{vmatrix}=(x+10)\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ -x & x & 0 \\ 0 & -x & x \end{vmatrix}=x^3(x+10)$$

※

例2

计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}=\underline{\qquad\qquad}$$

[😊 kira 提示：这是一种考研热门行列式，即"主对角线取一个数其他所有元素取一个数"，处理方式和上一题相同，所有行(列)加到第一行(列)，然后把公因数提出去，会有神奇的事发生！整个行列式将化出超多0，直接变三角阵(后面特征行列式常用)]

解：把每行加至第一行，提取公因式 $a+b(n-1)$，再化为上三角行列式，即

$$D_n=\begin{vmatrix} a+b(n-1) & a+b(n-1) & \cdots & a+b(n-1) \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=(a+b(n-1))\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b & a & \cdots & b \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}\xlongequal[\text{第一行}b\text{倍}]{\text{各行减}}(a+b(n-1))\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$=[a+b(n-1)](a-b)^{n-1}$$

※

(😊 kira 总结：这是种最应当熟练就熟的行列式，它还有升级版，如 $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & \cdots & 2 \\ n & n & \cdots & n+a \end{vmatrix}$，即只要每行(列)和一样，就考虑所有行(列)全加到第1行(列)，可最终达成与例2相同效果

—例3——

计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$

[kira提示：①面对行列式，没有很明确的方向时就把第一列化n-1个0，再慢慢展开；② D的各行之间有"层层递进"的感觉，需要每两行之间进行处理，且必须依照一定的先后次序，不能同时进行，这种方法称为逐行相加(减)]

解：从第4行开始，后行减前行，有

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ 0 & a & 2a & 6a+3b+c \end{vmatrix} \xleftarrow{4行-3行} = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a & 3a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4.$$

kira小梳理：以上我们分别练了①每一行(列)乘倍数加到第一行(列)；②所有行(列)全部加到第一行(列)；③逐行相加；

—例4——

4阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}=$ ______

[kira提示：这叫"爪型行列式" |下|，|K| …
化简目标是上(或下)三角行列式，利用2,3,4行对第一行进行轮番处理]

解：用第一行减第二行的$\frac{1}{2}$倍，减第三行的$\frac{1}{3}$倍，减第四行的$\frac{1}{4}$倍，

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&0&0\\1&0&3&0\\1&0&0&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}&0&0&0\\1&2&0&0\\1&0&3&0\\1&0&0&4\end{vmatrix}=24\times\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=-2$$

※

例5

计算4阶行列式 $\begin{vmatrix}4&3&0&0\\1&4&3&0\\0&1&4&3\\0&0&1&4\end{vmatrix}=$ ______.

[😊 kira 提示：这是"三对角线行列式"，属于较难题型，特点是三对角线完全对称，可以一直写到n阶，因此通法是递推法，低阶也可通过逐行相加，把每行加到第一行等技巧进行三角化]

〈法一〉（观察发现左下角有个3×3的三角阵，所以把第一行变成 0 0 0 a_{14}，再关于1行4列展开就非常幸福了～）

将第二行-4倍加至第一行，再逐行处理加至第一行。

$$\begin{vmatrix}4&3&0&0\\1&4&3&0\\0&1&4&3\\0&0&1&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-13&-12&0\\1&4&3&0\\0&1&4&3\\0&0&1&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&40&39\\1&4&3&0\\0&1&4&3\\0&0&1&4\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}0&0&0&-121\\1&4&3&0\\0&1&4&3\\0&0&1&4\end{vmatrix}=-121\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}1&4&3\\0&1&4\\0&0&1\end{vmatrix}=121$$

※

〈法二〉（用展开公式直接递推）按第一行展开，有

$$\underbrace{\begin{vmatrix}4&3&0&0\\1&4&3&0\\0&1&4&3\\0&0&1&4\end{vmatrix}}_{\text{大号}D_4}=4\begin{vmatrix}4&3&0\\1&4&3\\0&1&4\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}1&3&0\\0&4&3\\0&1&4\end{vmatrix}=4\underbrace{\begin{vmatrix}4&3&0\\1&4&3\\0&1&4\end{vmatrix}}_{\text{中号}D_3}-3\underbrace{\begin{vmatrix}4&3\\1&4\end{vmatrix}}_{\text{小号}D_2}$$

BMDM

即有$D_4=4D_3-3D_2$　　(kira提示：递推并不是直接打开算，而是通过移项寻找规律，一直递推下去找到和D_1的函数)

即有$D_4-D_3=3(D_3-D_2)$

$\Rightarrow D_3-D_2=3(D_2-D_1)$ 而 $D_2-D_1=\begin{vmatrix}4&3\\1&4\end{vmatrix}-4=13-4=9$

$\Rightarrow D_4-D_3=3^2(D_2-D_1)=3^4$

$\Rightarrow D_4=D_3+3^4=D_2+3^3+3^4=D_1+3^2+3^3+3^4=4+3^2+3^3+3^4=121$

(再做一道正经递推(归纳法)↓)

—— >> 真题演练(2008) ——

设 $A=\begin{bmatrix}2a&1&&&\\a^2&2a&1&&\\&a^2&2a&1&\\&&\ddots&\ddots&\ddots\\&&&a^2&2a\end{bmatrix}$ 是n阶矩阵. 证明$|A|=(n+1)a^n$

(kira心路历程：三对角线矩阵，想到对角化或递推。n阶对角化相对麻烦，事实上，递推是更为轻松简洁的)

<法一>由归纳法(作为证明题，本题实际上降低了难度，即只需验证$|A|=(n+1)a^n$是否正确即可)

设n阶行列式$|A|$值为D_n

① 当n=1时，$D_1=2a$，　$D_n=(n+1)a^n$成立

② 当n=2时，$D_2=\begin{vmatrix}2a&1\\a^2&2a\end{vmatrix}=3a^2$．　$D_n=(n+1)a^n$成立.

③ 设$n<k$时命题正确.

当$n=k$时，按第一列展开得

$D_k=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}$

$=2a\begin{vmatrix}2a&1&&\\a^2&2a&1&\\&a^2&2a&\ddots\\&&\ddots&1\\&&a^2&2a\end{vmatrix}_{k-1}+a^2(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1&0&&\\a^2&2a&1&\\&a^2&2a&\ddots\\&&\ddots&1\\&&a^2&2a\end{vmatrix}_{k-1}$

$=2aD_{k-1}-a^2D_{k-2}$　(因为太对称，最后一定会变成套娃)

$=2aka^{k-1}-a^2(k-1)a^{k-2}=(k+1)a^k$ 故命题正确.

注：数学归纳法有两种

第一数学归纳法
① 验证 $n=1$ 时，命题正确
② 假设 $n=k$ 时，命题正确
③ 证明 $n=k+1$ 时，命题正确

第二数学归纳法
① 验证 $n=1$ 和 $n=2$ 时命题正确
② 假设 $n<k$ 时命题正确
③ 证明 $n=k$ 时命题正确

◉ 如何选择？
答：先探讨高阶命题和低阶命题的关系
$f_n=f_{n-1}+3$（用第一法）
$f_n=2f_{n-1}-6f_{n-2}$（用第二法）

〈法二〉化为上三角阵（用逐行相减）

$$|A|=\begin{vmatrix}2a&1&&&\\a^2&2a&1&&\\&a^2&2a&\ddots&\\&&\ddots&\ddots&1\\&&&a^2&2a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2a&1&&&\\0&\frac{3}{2}a&1&&\\&a^2&2a&\ddots&\\&&\ddots&\ddots&1\\&&&a^2&2a\end{vmatrix}=\cdots$$

$$=\begin{vmatrix}2a&1&&&\\0&\frac{3}{2}a&1&&\\&\ddots&\frac{4}{3}a&\ddots&\\&&\ddots&\ddots&1\\&&&0&\frac{(n+1)a}{n}\end{vmatrix}=2a\cdot\frac{3}{2}a\cdot\frac{4}{3}a\cdots\frac{n+1}{n}a=(n+1)a^n$$

☆

Kira备注：递推公式型行列式求值属于考研近年来最高难度的求行列式问题！当然，多数时候，我们还是要回归本质，毕竟行列式不是一个为我们服务的工具，只要你看到 $\begin{vmatrix}2&7&3\\0&1&0\\5&6&2\end{vmatrix}$ 马上想到的不是别的，而是直接 $=(-1)^4\cdot1\cdot\begin{vmatrix}2&3\\5&2\end{vmatrix}$，只要你看到 $\begin{vmatrix}1&2&4\\2&4&8\\1&2&3\end{vmatrix}$ 能立刻发现等于0。能养成"打洞"和"化上三角"的好习惯，就已经算行列式过关了。毕竟线代不止行列式的啊，且还有矩阵、解方程组，向量、特征的田野……最后来疏通一下特征行列式（第二九也有讲解）

π^π

· BMDM ·

例6

若 $\begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda-5 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix}=0$ 则 $\lambda=$ ______

[kira提示：特征行列式通常很有特色也很巧合，往往两行之间加加减减一定会有一行出现公因式，且其中一个元为0.

如本题 $\begin{vmatrix} \boxed{\lambda-3 \quad 1 \quad -1} \\ 1 \quad \lambda-5 \quad 1 \\ \boxed{-1 \quad 1 \quad \lambda-3} \end{vmatrix}$ 可见第一行减第三行马上出0 和 $\lambda-2$ · $2-\lambda$，马上可再消出一个0]

解 $\begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda-5 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 2-\lambda \\ 1 & \lambda-5 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & \lambda-5 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix}$

$= (\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda-5 & 2 \\ -1 & 1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-5 & 2 \\ 1 & \lambda-4 \end{vmatrix}$

$=(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-6)=0 \Rightarrow \lambda=2,3,$和$6$. ※

(手感顺滑，一气呵成~)

[3] 利用范德蒙行列式

例7

计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

[kira心路历程：一看这行列式都快这副样子了（充满了 a^n）肯定范德蒙，但形式不标准，所以先一步步化成标准形式]

解：$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \end{vmatrix}$

前三行阵形不能破坏

最后一行上第一行，行互换3次，变号!

$= -6\ (2-1)(3-1)(4-1)(3-2)(4-2)(4-3) = 72$ ※

1,2,3,4 排列组合，后减前

▶ 2. 抽象型行列式

必备常识 / 做题根基

四 必会性质定理

▲ (1) 若 A 是 n 阶矩阵，则 $|kA| = k^n|A|$ ← k^n !!!!

▲ (2) 若 AB 都是 n 阶矩阵，则 $|AB| = |A||B|$

后面详聊
(3) 若 A 是 n 阶矩阵，$|A^*| = |A|^{n-1}$

(4) 若 A 是 n 阶可逆矩阵，则 $|A^{-1}| = |A|^{-1}$

(5) 若 A 是 n 阶矩阵，$\lambda_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 是 A 的特征值，则 $|A| = \prod_{i=1}^{n}\lambda_i$

(6) 若 n 阶矩阵 A 和 B 相似，则 $|A| = |B|$

(7) 设 A 是 m 阶方阵，B 是 n 阶方阵，有

$$\begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = |A||B|, \quad \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B|, \quad \begin{vmatrix} O & B \\ A & O \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A||B|$$

又称拉普拉斯展开定理（分块阵的"上(下)三角"）

解题套路

◎ 常见题型依次如下（不涉及矩阵性质）

(1) 利用行列式性质恒等变形化简求值

>> 真题演练（1993 数四）

若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ 都是 4 维列向量，且 4 阶行列式 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1| = m$，$|\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3| = n$，则 4 阶行列式 $|\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta_1+\beta_2| =$ ____.

（☺ KIRA 心路历程：观察所求行列式是如何从已知条件变来的

首先 β_2 必须换到最后一列，相加得 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1+\beta_2|$ 后再对换 α_1 和 α_3 ~ OK!）

解：$|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_1+\beta_2| = -|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+\beta_2|$ ← 对换 α_1 和 α_3

$= -|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1| - |\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_2|$

$= -m + |\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,\alpha_3| = n-m$ ※

—— 例8 ——

已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta,\gamma$ 均为4维列向量，设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)$，$B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\gamma)$，若 $|A|=3$，$|B|=2$，则 $|A+2B|=$ ____。

[分析] $|A+2B| = |3\alpha_1,3\alpha_2,3\alpha_3,\beta+2\gamma| = 27|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta+2\gamma|$

$= 27(|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta| + |\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,2\gamma|) = 27(|A|+2|B|)$

$=189$ ※

（Kira备注：从 $|A+2B|$ 出发，向 $|A|$ 和 $|B|$ 的具体形式靠拢。常系数 k 的处理一定捋清：即某行 or 列的公因式 k 可以提到行列式外；若有 $|kA|$，则有 $|kA|=k^n|A|$。）

▶ 3. 代数余子式的计算

解题套路

◎ 常见题型依次如下

(1) 已知行列式，求代数余子式（余子式）之和

—— 例9 ——

设 $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ 求 (1) $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$

(2) $M_{31}+M_{32}+M_{33}+M_{34}$

（Kira心路历程：$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$ 是按行列式第4行展开且第4行元素为1，1，1，1的行列式值。用1,1,1,1替换第四行，求行列式即可）

解：$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$ 为行列式 $D_1=\begin{vmatrix} -2 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \boxed{1 \quad 1 \quad 1 \quad 1} \end{vmatrix}$ 按第四行展开

而 $D_1=0$，故行式 $=0$

而 $M_{31}+M_{32}+M_{33}+M_{34}=A_{31}-A_{32}+A_{33}-A_{34}$

为行列式 $D_2=\begin{vmatrix} -2 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ \boxed{1 \quad -1 \quad 1 \quad -1} \\ 2 & -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ 按第3行展开，$D_2=0$，故同式为0

（😊 kira备注：总之可以在余子式或代数余子式前添加任意系数，把代数余子式的系数换进行列式的对应行，再求行列式即可。）

例10

设 $|A|=\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=m$，计算 $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}A_{ij}$

解：

由于 $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}A_{ij}=(A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14})+(A_{21}+A_{22}+A_{23}+A_{24})$
$+(A_{31}+A_{32}+A_{33}+A_{34})+(A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44})$
$=A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=\frac{1}{3}|A|=\frac{m}{3}$

☆

（😊 kira备注：后3个括号可视为 $\frac{1}{3}(3A_{21}+3A_{22}+3A_{23}+3A_{24})$
由展开定理第四条推论得0，或求对应行列式，如 $A_{21}+A_{22}+A_{23}+A_{24}$
$=\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=0$，本质上和例9完全相同，以不变应万变哦）

矩阵篇

矩阵运算、初等变换

可逆矩阵、伴随矩阵

矩阵的秩

矩阵方程

▶1. 矩阵运算、初等变换

必备常识 / 做题根基

[1] 术语（重要概念）

(1) 同型矩阵：行数列数都相同的矩阵

(2) 矩阵相等：两同型矩阵对应的每个元素相等

(3) 常见特殊矩阵

(i) 行矩阵（行向量）$A=(a_1,\cdots,a_n)$

(ii) 列矩阵（列向量）$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

(iii) 零矩阵：所有元素都为 0，记作 0

(iv) 单位矩阵 $E=\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$

(4) 矩阵的运算

(i) 矩阵加法：$A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m\times n}$，则 $m\times n$ 阵 $C=(c_{ij})$ $=(a_{ij}+b_{ij})$ 称为矩阵 A 与 B 的和，记为 $A+B=C$

（注：①同型矩阵才能相加 ②矩阵相加即把矩阵中所有元素一一对应相加）

(ii) 矩阵数乘：$A=(a_{ij})_{m\times n}$，k 是一个常数，则 $m\times n$ 矩阵 (ka_{ij}) 称为数 k 与矩阵 A 的数乘，记为 kA

（注：数乘即 k 与矩阵中所有元素相乘）

▲ (iii) 矩阵乘法：设 $A=(a_{ij})$ 是 $m\times n$ 矩阵，$B=(b_{ij})$ 是 $n\times s$ 矩阵，那么 $m\times s$ 矩阵 $C=(c_{ij})$ 其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$ 称为 A 与 B 的乘积，记为 $C=AB$.

（注：A 的列数必须与 B 的行数相等才有乘积 AB）

ⓤ kira解读：来看具体如何操作，例如 $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&6\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}3&4\\-1&2\end{bmatrix}$，求 AB ①先拿出B的第一列，分别和A的第1,2行元素相乘再相加，并把得到结果写在C的第一列。

$$AB=\begin{bmatrix}1&2\\3&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&4\\-1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boxed{1}&\\\boxed{3}&\end{bmatrix}$$

其中 $\boxed{1}=1\times3+2\times(-1)$

$\boxed{3}=3\times3+6\times(-1)$

②再拿出B的第2列，分别与A的第1,2行元素相乘再相加，并把结果写在C的第2列，最终有 $AB=\begin{bmatrix}1&2\\3&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&4\\-1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&8\\3&24\end{bmatrix}$

其它 $A_{m\times n}B_{n\times s}$ 同理操作，乘积为 $m\times s$ 矩阵

(5) 转置矩阵：设 $A=(a_{ij})$ 是 $m\times n$ 矩阵，定义 $n\times m$ 矩阵 $B=(b_{ij})=(a_{ji})$ 为矩阵的转置，记作 $B=A^T$.

[例如 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$，则 $A^T=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}$，即第i行成为第i列，第j列变成第j行]

◇◇ kira直觉训练

$\alpha=(1,1,1)^T$，计算 $\alpha^T\alpha$ 和 $\alpha\alpha^T$

解
- $\alpha^T\alpha=(1,1,1)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=3$　　啪，舒服！ 一个数
- $\alpha\alpha^T=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}(1,1,1)=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$　　哇，一大坨！ 3×3矩阵

ⓤ 整形成条件反射：$\alpha^T\beta$ 是一个数（当 α, β 都是列向量），而 $\alpha\beta^T$ 是一个 $n\times n$ 矩阵。"▭‖"是一个数，舒服，"‖▭"是一个矩阵，不舒服~ 直觉！

(6) 分块矩阵：用水平和垂直的直线将矩阵A分成若干小块，称A为分块矩阵。考研题常只掌握如下形式：① $\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}$

② $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$（$\alpha_i$ 是列向量）或 $A=\begin{pmatrix}\beta_1\\\vdots\\\beta_m\end{pmatrix}$（$\beta_i$ 是行向量）

● 分块矩阵的加法，数乘，乘法，转置：

(i) $\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1+A_2 & B_1+B_2 \\ C_1+C_2 & D_1+D_2 \end{bmatrix}$

(ii) $k\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kA & kB \\ kC & kD \end{bmatrix}$

(iii) (自己算) $\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1A_2+B_1C_2 & A_1B_2+B_1D_2 \\ C_1A_2+D_1C_2 & C_1B_2+D_1D_2 \end{bmatrix}$

▲ (iv) $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} B^n & 0 \\ 0 & C^n \end{bmatrix}$

● 按列(行)分块矩阵的乘法

设 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，$B=(b_{ij})_{n\times s}$ 为 $n\times s$ 矩阵

则 $BA = B(\alpha_1,\cdots,\alpha_n) = (B\alpha_1, B\alpha_2, \cdots, B\alpha_n)$ ← 直接乘进去

$$AB = (\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{bmatrix}$$

$$= (\underbrace{b_{11}\alpha_1+b_{21}\alpha_2+\cdots+b_{n1}\alpha_n}_{\boxed{B\text{的第一列排着依次乘}\alpha_1,\cdots,\alpha_n}}, \cdots, \underbrace{b_{1s}\alpha_1+b_{2s}\alpha_2+\cdots+b_{ns}\alpha_n}_{\boxed{B\text{的每一列排着依次乘}\alpha_1,\cdots,\alpha_n}})$$

▲(7) 初等变换：对 $m\times n$ 矩阵下列三种变换

① 用非零常数 k 乘矩阵某一行(列)；
② 互换矩阵某两行(列)位置；
③ 把某行(列)的 k 倍加至另一行(列)，

称为是矩阵的初等行(列)变换，统称为初等变换。

▲(8) 矩阵等价：矩阵 A 经有限次初等变换变成矩阵 B，则称矩阵 A 与矩阵 B 等价，记作 $A\cong B$.

▲(9) 初等矩阵：单位矩阵 E 经过一次初等变换所得到的

矩阵称为初等矩阵

★初等矩阵分为以下三种

(i) E_{ij}：互换E的第i,j行（互换E的第i,j列）

$$E_{1,2}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

（☺很容易就可以观察到）

(ii) $E_{ij}(k)$：将E第i行的k倍加至第j行（将E第j列k倍加至第i列）【注意：行列记法是反的】

$$E_{12}(3)=\begin{bmatrix}1&0&0\\3&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

☺对行顺着读：把$\boxed{1}$行的3倍加到$\boxed{2}$行

$E_{12}(3)$

☺对列反着读：把$\boxed{2}$列的3倍加到$\boxed{1}$列

(iii) $E_i(k)$：第i行（列）乘k.

$$E_3(2)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

▲记住符号 E_{ij}，$E_{ij}(k)$，$E_i(k)$ 及其对应意义

$\boxed{2}$ 必会定理性质（背）【熟练掌握至计算得心应手的程度】

(1) 加法与数乘的运算法则

$A+B=B+A$，$(A+B)+C=A+(B+C)$

$k(lA)=(kl)A$，$k(A+B)=kA+kB$，$(k+l)A=kA+lA$

(2) 转置的运算法则

$(A+B)^T=A^T+B^T$▲，$(kA)^T=kA^T$，$(AB)^T=B^TA^T$▲

[☺加法可以直接拆，乘法需要倒过来]

(3) 乘法的运算法则（只要不改变左乘右乘，怎么乘都行☺）

$(AB)C=A(BC)$，$C(A+B)=CA+CB$

$(A+B)C=AC+BC$，$(kA)B=A(kB)=k(AB)$

[注意以下结论 ① $AB\neq BA$（没有交换律，甚至BA可能不存在）

② $AB=0 \nRightarrow A=0$ 或 $B=0$]

★ (4) 用初等矩阵 P 左(右)乘矩阵 A，其结果 $PA(AP)$ 就是对矩阵 A 作一次相应的行(列变换)

😊 这个非常厉害!

比如 $\begin{bmatrix}1&0&0\\-4&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix} \triangleq E_{12}(-4)\cdot A = C$

"左行右列" 左乘初等阵即对 A 行变换，右乘则对 A 列变换

$E_{12}(-4)$ 表示把第一行的 -4 倍加到第二行

所以对 A 进行的操作是把 A 第一行的 -4 倍加至第二行

$\Rightarrow C=E_{12}(-4)A=\begin{bmatrix}1&0&0\\-4&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\7&8&9\end{bmatrix}$

(😊 也就是说，我们不必辛苦算矩阵乘法，直接进行行变换或列变换就可以得到乘积了)

解题套路

● 常见题型依次如下 (矩阵的运算初等变换会渗入每一章，属于基本功，在此只给出直接考查矩阵的题型)

(1) 矩阵基本运算 (求 A^n)

(2) 矩阵初等变换

一 矩阵基本运算 (求 A^n)

>> 真题演练 (1994 数一)

已知 $\alpha=(1,2,3)$，$\beta=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})$，设 $A=\alpha^T\beta$，则 $A^n=$ ______

[😊 kira 心路历程：$\alpha^T\beta$ 是 3×3 阶矩阵，$\beta\alpha^T$ 是常数，$A^n=(\alpha^T\beta)^n$ 是非常经典的题型，中间会出 $n-1$ 个常数，从而快速出解]

解：$A^n=(\alpha^T\beta)^n=(\alpha^T\beta)(\alpha^T\beta)\cdots(\alpha^T\beta)=\alpha^T(\beta\alpha^T)(\beta\alpha^T)\cdots(\beta\alpha^T)\beta$

$=\alpha^T(\beta\alpha^T)^{n-1}\beta=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\left((1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right)^{n-1}(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})$

$=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}3^{n-1}(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})=3^{n-1}\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{bmatrix}$ ☆

(💡 kira备注：①对于 $A=\alpha\beta^T$ （α, β 为 n 维列向量），有 $A^n=l^{n-1}A$，其中 $l=\alpha^T\beta$，可以直接作为结论记住。② $\alpha^T\beta=tr(\alpha\beta^T)$，其中 $tr(A)$ 称为"迹"，即 A 主对角线元素之和）

—— >> 真题演练（2003 数二）——

设 α 为 3 维列向量，α^T 是 α 的转置，若 $\alpha\alpha^T=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}$，则 $\alpha^T\alpha=$ ___ .

【分析】

由上题"kira备注"，$\alpha^T\alpha=tr(\alpha\alpha^T)=1+1+1=3$ （ok.）

（这样做的原理是当 $\alpha=(a_1,a_2,a_3)^T$，有 $\alpha\alpha^T=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1^2&a_1a_2&a_1a_3\\a_2a_1&a_2^2&a_2a_3\\a_3a_1&a_3a_2&a_3^2\end{bmatrix}$

而 $\alpha^T\alpha=(a_1,a_2,a_3)\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}=a_1^2+a_2^2+a_3^2$ 正好是主对角线元素之和，此处不必求出 α，直接观察矩阵～）

$\boxed{\text{以上为 } A=\alpha\beta^T \text{ 求 } A^n\text{，再看 } \begin{bmatrix}0&a&b\\0&0&c\\0&0&0\end{bmatrix} \text{ 型}}$

—— 例11 ——

若 $A=\begin{bmatrix}0&0&0\\3&0&0\\4&5&0\end{bmatrix}$，则 $A^2=$ ___ ，$A^3=$ ___ .

解：由矩阵乘法 $A^2=\begin{bmatrix}0&0&0\\3&0&0\\4&5&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\3&0&0\\4&5&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\15&0&0\end{bmatrix}$

$A^3=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\15&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\3&0&0\\4&5&0\end{bmatrix}=0$

💡 规律：此种 n 阶矩阵，A^{n-1} 只需算一个数（其它闭眼写 0）

$A^n=0$，n 次方以上都是 0

例如 $B=\begin{bmatrix}0&1&2&3\\0&0&4&5\\0&0&0&6\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ 则 $B^3=\begin{bmatrix}0&0&0&24\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ $24=1\times4\times6$

—— 例12 ——

设 $A=\begin{bmatrix}1&2&0&0\\2&4&0&0\\0&0&3&1\\0&0&0&3\end{bmatrix}$ 则 $A^n=$ ___ .

解：只需分别求 $\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}3&1\\0&3\end{bmatrix}$ 的 n 次幂.

由 $\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}^n=5^{n-1}\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}$

又 $\begin{bmatrix}3&1\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&0\\0&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=3E+B$ $\quad(B^2=0=B^3=\cdots)$

$\therefore\begin{bmatrix}3&1\\0&3\end{bmatrix}^n=(3E+B)^n=(3E)^n+n(3E)^{n-1}B$ （由二项式展开）

$=\begin{bmatrix}3^n&0\\0&3^n\end{bmatrix}+n\cdot3^{n-1}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3^n&n\cdot3^{n-1}\\0&3^n\end{bmatrix}$

综上 $A^n=\begin{bmatrix}5^{n-1}&2\cdot5^{n-1}&0&0\\2\cdot5^{n-1}&4\cdot5^{n-1}&0&0\\0&0&3^n&n\cdot3^{n-1}\\0&0&0&3^n\end{bmatrix}$ ※

[2] 矩阵初等变换（往往与逆矩阵结合出题，下一部分重点讲）

——》真题演练（2006 数一二三，改编）——

设 A 为三阶矩阵，将 A 的第2行加到第1行得 B，再将 B 的第1列的 -1 倍加到第二列得 C，设 $C=PAQ$，求 P 和 Q.

[分析] 一边读题，一边顺手写出 $\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

(先自己写好 E，再把 E 的第2行加到第一行)

$\therefore P=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\quad Q=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ ※

▶2 可逆矩阵、伴随矩阵

$\boxed{\text{必备常识／做题根基}}$

[1] 术语（主要概念）

▲(1) 伴随矩阵：设 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶矩阵，行列式 $|A|$ 的每个元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 所构成如下的矩阵.

$A^*=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix}$ 称为 A 的伴随矩阵.

☺ Kira温馨提示：① $A_{11}, A_{12}, \cdots$ 是数！和 $b_{11}, c_{12}, 3, 4, 5$ 并无区别，不要把它们看作矩阵了，所以 A^* 仅是个普通的 $n\times n$ 矩阵而已；② A^* 是转置排列的！即 A_{21} 不是放在2行1列，而是1行2列，务必当心！；③ A^* 的引入只是为了定义逆并给出 A^{-1} 的理论公式，因此考试中 A^* 通常只以小题形式出现（定义式几乎不用，主要用公式 $AA^*=A^*A=|A|E$）。

★对于2阶矩阵 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，由定义 $A^*=\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

即"主对角线互换，副对角线变号"！背下口诀，有大用！

(2) 可逆矩阵：设A是n阶矩阵，如果存在n阶矩阵B使得 $AB=BA=E$（单位矩阵）成立，则称A是可逆矩阵或非奇异矩阵，B是A的逆矩阵。
（注意！定义要求A，B均为方阵）

2 必会定理性质（背）

(1) 若A为可逆矩阵，则矩阵A的逆矩阵唯一，记为 A^{-1}

(2) n阶矩阵A可逆 $\Leftrightarrow |A|\neq 0$ ★ $\Leftrightarrow r(A)=n$ （下部分讲秩）

$\Leftrightarrow A=P_1P_2\cdots P_s$，$P_i$ 是初等矩阵

$\Rightarrow A^{-1}$ 唯一

$\Rightarrow A^{-1}, A^T$ 可逆

(3) 关于逆矩阵的公式

- $(A^{-1})^{-1}=A$； $(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}\ (k\neq 0)$
- $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$；$(A^n)^{-1}=(A^{-1})^n$；
- $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$；$|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$；
- $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$

(4) 关于伴随矩阵的公式

- $A^*A = AA^* = |A|E$ （把握住这一个就够了，剩下可以自己推）
- $A^* = |A|A^{-1}$；$|A^*| = |A|^{n-1}$；$(kA)^* = k^{n-1}A^*$；
- $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^* = \frac{1}{|A|}A$
- $(A^*)^T = (A^T)^*$

(5) 若 A，B 均可逆，则 $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{bmatrix}$ 均可逆，

且 $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & A^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{bmatrix}$（交换 A，B）

3 必考计算套路

▶ 求逆矩阵（2阶、3阶及以上）

例 13

① 求可逆矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 的逆 A^{-1}

[kira 提示：对于二阶方阵来说，求逆是有专属方法的

即 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ OK！

操作起来就是：将 A 的主对角线互换，副对角线变号，

再在外面乘行列式的倒数~]

例如：求 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ 的逆

解 $A^{-1} = \frac{1}{2+3}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 　 $\boxed{\text{又贵又神速！}}$

② 求可逆矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ 的逆矩阵 A^{-1}

[kira 提示：三阶矩阵求逆需用基本功，即 $(A|E) \to (E|A^{-1})$]

Step1 将 A 写成 $(A|E)$，并通过初等行变换将 A 化阶梯形

$$[A \vdots E] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

同学们，加油！

kira 叮嘱：行变换用"→"不要用"="或~ 不相等但等价！

step 2 分别处理第3列、第2列 直至把A化为E

$$\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&0&1&0\\0&1&0&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&\frac{3}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{1}{2}&\frac{5}{2}&\frac{3}{2}\\0&1&0&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&\frac{3}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{array}\right]$$

此时即得到 $A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&5&3\\-1&3&3\\1&-1&-1\end{bmatrix}$

▶ 初等矩阵的逆

(^v^ 其实这个不用算，不是计算套路，我前面写漏了所以补在这里! 正好认真记忆一下，因为非常重要!)

定理 初等矩阵均可逆，且其逆是同类型初等矩阵。

即① $E_i^{-1}(k)=E_i(\frac{1}{k})$，② $E_{ij}^{-1}(k)=E_{ij}(-k)$，③ $E_{ij}^{-1}=E_{ij}$

直接背例子：① $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{3}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ k变$\frac{1}{k}$；② $\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ k变-k

③ $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 不变

(😊 kira 备注：以后看到初等阵不仅要快速反应过来行列如何初等变换，还要秒算逆，或秒看出是哪个初等阵的逆!)

解题套路

● 常见题型依次如下：

(1) 证明抽象矩阵可逆并求逆矩阵

(2) 利用 $P^{-1}AP=B$ 求 B^n (不讲，第5讲特征值详说)

(3) A^* 与 A^{-1} 结合

(4) 抽象行列式综合计算

(5) A^{-1} 与初等变换结合

四 证明抽象矩阵可逆并求逆矩阵

—— 例14 ——

设n阶矩阵 A 满足 $A^2-3A+2E=0$，证 A，$A+2E$ 可逆并求其逆阵

Kira心路历程：① 此种题往往要根据定义变形出 $A\cdot\Box=E$ $\Rightarrow \Box$ 为逆；② 左端把待证的 A 和 $A+2E$ 提出来，并以其为因式进行因式分解，左端多余的 E 移到右端即可，调整系数为"E"

比如 $A\ (A-3E) = -2E$

提出　除以A得到因式　多余的E移到右端

调整系数有 $A\cdot(-\frac{1}{2})(A-3E)=E$

$\Rightarrow A^{-1}$ 存在且 $A^{-1}=-\frac{1}{2}(A-3E)$　OK!

解：由 $A^2-3A+2E=$ $A\cdot(-\frac{1}{2})(A-3E)=E \Rightarrow A^{-1}$ 存在且 $A^{-1}=-\frac{1}{2}(A-3E)$

同理 $A^2-3A+2E=(A+2E)(A-5E)+10E+2E=0$

$\Rightarrow (A+2E)\cdot(-\frac{1}{12})(A-5E)=E$

$\Rightarrow (A+2E)^{-1}$ 存在且为 $-\frac{1}{12}A+\frac{5}{12}E$.

—— 真题演练(2008) ——

设 A 为n阶非零阵，若 $A^3=0$，证 $E+A$，$E-A$ 均为可逆矩阵

证：

(Kira提示：矩阵多项式中的E，就如同我们对 $f(x)$ 配方时的常数，可以随便写，只要最后把式子"配平"即可)

因为 $(E-A)(E+A+A^2)=E-A^3=E$

$(E+A)(E-A+A^2)=E+A^3=E$　得证.

(当然啦本题方法很多，用特征值也很便捷)

—— 真题演练(2000) ——

E 为4阶单位矩阵，且 $B=(E+A)^{-1}(E-A)$，其中 $A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-4&5&0\\0&0&-6&7\end{bmatrix}$

则 $(E+B)^{-1}=$ ___

[Kira 心路历程：这种题一定别慌，要先对关系式 $B=(E+A)^{-1}(E-A)$ 化简，往往会出 $(E+B)^{-1}$ 的定义]

解：$(B+E)=(E+A)^{-1}(E-A)+E$　等式两端同乘 $(E+A)$

$(E+A)(B+E)=E-A+E+A=2E$ ← 哇！这么快！

还没开始发挥就收了

$$\Rightarrow (B+E)^{-1}=\frac{1}{2}(A+E)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&2&0&0\\0&-2&3&0\\0&0&-3&4\end{bmatrix}$$

(3) A^*与A^{-1}结合出题

[要死记 $A^*A=AA^*=|A|E$ 一招通关~]

—— >> 真题演练 (2009 数一二三) ——

设 A, B 均为2阶矩阵，A^*, B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵，若 $|A|=2$, $|B|=3$，则分块矩阵 $\begin{bmatrix}0&A\\B&0\end{bmatrix}$ 的伴随矩阵为

A. $\begin{bmatrix}0&3B^*\\2A^*&0\end{bmatrix}$　B. $\begin{bmatrix}0&2B^*\\3A^*&0\end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix}0&3A^*\\2B^*&0\end{bmatrix}$　D. $\begin{bmatrix}0&2A^*\\3B^*&0\end{bmatrix}$

[分析] 分块的伴随没有公式，所以用 $A^*A=|A|E$。

易忘正负

即 $\begin{bmatrix}0&A\\B&0\end{bmatrix}^*=\begin{vmatrix}0&A\\B&0\end{vmatrix}\begin{bmatrix}0&A\\B&0\end{bmatrix}^{-1}=(-1)^{2\times2}|A||B|\begin{bmatrix}0&B^{-1}\\A^{-1}&0\end{bmatrix}$

(再凑选项) $=6\begin{bmatrix}0&B^{-1}\\A^{-1}&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&2|B|B^{-1}\\3|A|A^{-1}&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&2B^*\\3A^*&0\end{bmatrix}$

—— 例15 ——

已知 $A=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&3&0\\2&5&0\\1&-1&2\end{bmatrix}$，则 $(A^{-1})^*=$ ___

[分析] 老规矩，顺着公式写 $(A^{-1})^*(A^{-1})=|A^{-1}|E=\dfrac{E}{|A|}$ ← 逆矩阵的各种性质

又因为 $|A| = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}$

故 $(A^{-1})^* = \frac{A}{|A|} = -2\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ ※

>> 真题演练(1996)

设n阶矩阵A可逆($n\geq 2$)，A^*是A的伴随矩阵，则$(A^*)^* =$ ___.

[分析] 老规矩，顺着公式写，一招通关~

$(A^*)^*(A^*) = |A^*|E \Rightarrow (A^*)^* = |A^*|(A^*)^{-1}$ ①

又 $A^*A = |A|E \Rightarrow (A^*)^{-1} = \frac{A}{|A|}$，$|A^*| = |A|^{n-1}$

$\therefore (A^*)^*(A^*) = |A|^{n-1}\cdot\frac{A}{|A|} = |A|^{n-2}A$. ok~

$\boxed{4}$ 抽象行列式综合计算

(多背公式多刷题，形成条件反射就好了~)

>> 真题演练(2013 数一二三)

设$A=(a_{ij})$是3阶非零矩阵，$|A|$为A的行列式，A_{ij}为a_{ij}的代数余子式，若$a_{ij}+A_{ij}=0$ ($i,j=1,2,3$)，则$|A| =$ ___.

[分析] 有用的条件就1句话 $a_{ij}+A_{ij}=0 \Rightarrow a_{ij} = -A_{ij}$ ($i,j=1,2,3$)

$\Rightarrow A^T = -A^*$ (我前面强调过A^*是转置，这个式子反应不来的同学建议自己写$(a_{ij}) = (-A_{ij})$矩阵观察.)

$\therefore |A| = |A^T| = |-A^*| = (-1)^3|A^*| = (-1)^3|A|^2$

流畅地套公式
目标→全化$|A|$

即 $|A|(1+|A|)=0$ 故$|A|$为0或-1

又A为非零矩阵，不妨设$a_{11}\neq 0$.

有 $|A| = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} = -(a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2)\neq 0$.

所以 $|A| = -1$. ※

[kira解读：$-a_{ij} = A_{ij} \Rightarrow$ 展开公式里完全由平方数组成

所以只要矩阵 A 中存在非零元，必有 $|A|\neq 0$。对于 $a_{ij}=A_{ij}$ 型要培养敏感度，形成经验]

——>> 真题演练（2010 数二三）——

设 A、B 为3阶矩阵，且 $|A|=3$，$|B|=2$，$|A^{-1}+B|=2$，则 $|A+B^{-1}|=$ ___.

[Kira提示：① $|A+B|$ 不有法则，别乱来；
② 利用好 $E=AA^{-1}=BB^{-1}$ 等各种恒等变形以及 $|AB|=|A||B|$ 做这种题简直是种享受且路子很多。]

[分析]（有 $|A^{-1}+B|$，想办法往 $|A+B^{-1}|$ 变，遂心生一计）

$|A+B^{-1}|=|EA+B^{-1}E|=|B^{-1}BA+B^{-1}A^{-1}A|$ （大一统了~）

两边对照着写

$=|B^{-1}(B+A^{-1})A|=|B^{-1}||B+A^{-1}||A|=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3=3$ ※

—— 例115 ——

设 A、B 均为 n 阶矩阵，且 $|A|=3$，$|B|=2$，A^* 和 B^* 分别是 A 和 B 的伴随矩阵，则 $|A^{-1}B^*-A^*B^{-1}|=$ ___.

[Kira提示：当 A^* 和 A^{-1} 同时出现时，先化 A^* 为 A^{-1}，再集中歼灭！]

例解：由 $A^*A=|A|E$，则

$|A^{-1}B^*-A^*B^{-1}|=|A^{-1}(2B^{-1})-(3A^{-1})B^{-1}|=|-A^{-1}B^{-1}|$

$=(-1)^n|A^{-1}||B^{-1}|=(-1)^n\cdot\frac{1}{6}$ ※

此类问题只要多注意 $|kA|=k^n|A|$，$|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$，$|B^*|=|B|^{n-1}$ 等常用

公式和易错点，多练习道马上就好，关键是手不能生！）

[5] A^{-1}与初等变换结合

例16

设A为3阶矩阵，将A的第2列加到第1列得矩阵B，再交换B的第2行与第3行得单位阵E。记$P_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$P_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$，则$A=$（ ）

(A) P_1P_2　(B) $P_1^{-1}P_2$　(C) P_2P_1　(D) $P_2P_1^{-1}$

[分析] 先熟练操作一波初等变换，有

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}}_{P_2}A\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}_{P_1}=E \quad\Rightarrow A=P_2^{-1}P_1^{-1}=P_2P_1^{-1}$$

$\boxed{E_{ij}^{-1}=E_{ij}}$

选D.

（点到为止 😊）

▶ 3.矩阵的秩

必备常识/做题根基

[1] 术语（主要概念）

(1) k阶子式：在$m\times n$矩阵中任取k行、k列，位于这些行列交叉点上的k^2个元素按其原来矩阵A的次序，可构成一个k阶行列式，称其为矩阵A的一个k阶子式。

（😊kira备注：k阶子式是行列式，是数！）

举例

$A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\end{bmatrix}$ 中 $\begin{vmatrix}2&3\\6&7\end{vmatrix}$ 是2阶子式，值为$14-18=-4$.

(2) 矩阵A的秩：矩阵A的非零子式的最高阶数称为矩阵A的秩，记为 $r(A)$，规定0矩阵秩为0。

举例

$A=\begin{bmatrix}1&2&3&1&5\\0&4&5&0&6\\0&0&0&-1&7\end{bmatrix}$ 中有3阶子式 $\begin{vmatrix}1&2&1\\0&4&0\\0&0&-1\end{vmatrix}\neq 0$，

且A没有4阶子式，所以A的秩为3。

▲ 以下充要条件要想明白，并内化。（这就是区别于 $r(A)$ 的结论）

① $r(A)=r \Leftrightarrow$ A中有r阶子式不为0，任何r+1阶子式必全为0。

② $r(A)<r \Leftrightarrow$ A的任何r阶子式都是0。

③ $r(A)\geq r \Leftrightarrow$ A中有r阶子式不为0。

四 秩的性质定理

(1) 若A是n阶矩阵，$r(A)=n \Leftrightarrow |A|\neq 0 \Leftrightarrow$ A可逆

$r(A)<n \Leftrightarrow |A|=0 \Leftrightarrow$ A不可逆

（我们往往用 $r(A)$ 推断A是否可逆，用 $|A|$ 或化行阶梯形数非0行的方式来推断 $r(A)$）

(2) $0\leq r(A_{m\times n})\leq r(m,n)$

（比如 3x4矩阵，秩最大取3）

(3) $r(A)=r(A^T)=r(kA)\quad (k\neq 0)$

▲ (4) $r(A+B)\leq r(A)+r(B)$

▲ (5) $r(AB)\leq \min(r(A),r(B))$

★ (6) 若A可逆，则 $r(AB)=r(B)$，$r(BA)=r(B)$

★ (7) 若 $AB=0 \Rightarrow r(A)+r(B)\leq n$（其中 $A_{m\times n}$，$B_{n\times s}$）

★ (8) 设A是n阶矩阵，则 $r(A^*)=\begin{cases}n, & r(A)=n\\1, & r(A)=n-1\\0, & r(A)<n-1\end{cases}$

[注：换言之，$r(A^*)$ 只可能有3种取值．0，1，n．
且对应的 $r(A)$ 也是固定的即 n，$n-1$，$<n-1$．]

(9) A 与 B 等价 $\Leftrightarrow r(A)=r(B)$．（充要）

解题套路

◎常见题型依次如下：

(1) 求矩阵的秩（利用秩的性质）

(2) 利用秩判定矩阵等价（在第三章"等价、相似、合同"讲）

例1

设 $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3k\\ -1 & 2k & -3\\ k & -2 & 3\end{bmatrix}$，问 k 为何值时 ① $r(A)=1$ ② $r(A)=2$．
③ $r(A)=3$．

[分析] 对 A 进行初等行变换化为行阶梯形矩阵，

$A\sim\begin{bmatrix}1 & -1 & k\\ 0 & k-1 & k-1\\ 0 & 0 & -(k-1)(k+2)\end{bmatrix} \Rightarrow$ 当 $k=1$ 时 $A\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，$r(A)=1$

当 $k=-2$ 时，$r(A)=2$，

当 $k\neq-2$ 且 $k\neq1$ 时，$r(A)=3$

（注 Kira备注：求任意矩阵的秩，用k阶子式定义太麻烦，一般不采用而是用初等行变换化为行阶梯形，非0行行数即为秩．）

>> 真题演练（2008 数一二三）

设 α，β 为3维列向量，矩阵 $A=\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$，其中 α^T，β^T 分别是 α，β 的转置．证明：

(1) 秩 $r(A)\le2$．

[Kira解读：引入秩后，我们对$\beta^T\alpha$和$\beta\alpha^T$的理解便可以不限于"数"or"矩阵"层面而是更进一步地，$r(\beta\alpha^T)\le 1$。容易推出这一点：利用$r(AB)\le \min(r(A),r(B))$即可。即$0\le r(\beta\alpha^T)\le 1$，并可用它来解决更多问题。]

证：因为α,β为3维列向量，则$\alpha\alpha^T$和$\beta\beta^T$都是3阶矩阵

且$r(\alpha\alpha^T)\le 1$，$r(\beta\beta^T)\le 1$

$\Rightarrow\ r(A)=r(\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\le r(\alpha\alpha^T)+r(\beta\beta^T)\le 2$ ※

>>真题演练（2010数一二三）

设A为$m\times n$矩阵，B为$n\times m$矩阵，E为m阶单位矩阵，若$AB=E$，则

(A) $r(A)=m$，$r(B)=m$. (B) $r(A)=m$，$r(B)=n$

(C) $r(A)=n$，$r(B)=m$ (D) $r(A)=n$，$r(B)=n$.

[Kira解析]看到AB想相关联的不等式.

$AB=E_m\Rightarrow\ r(AB)=m\le \min(r(A),r(B))$

故$m\le r(A)$，$m\le r(B)$ ← 考虑反向证明

又A是$m\times n$矩阵，B是$n\times m$矩阵

$\Rightarrow\ m\ge r(A)$，$m\ge r(B)$

$\Rightarrow r(A)=r(B)=m$.

4. 矩阵方程（即含有未知矩阵的方程）

（即利用可逆阵左乘右乘）

例18

设 $A=\begin{bmatrix}0&3&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{bmatrix}$，$AX=A+2X$，求X.

(😊 kira解析：把 X 作为单独因式提取出来)

解：由 $AX=A+2X \Rightarrow (A-2E)X=A$，因为 $A-2E$ 可逆

$\Rightarrow X=(A-2E)^{-1}A$ 再用矩阵乘法解出即可。(略)

(😊 kira备注：当 X 的系数矩阵不可逆时，不能左乘逆矩阵，此时我们将 $AX=B$ 中 X 和 B 按列分块，得 $A[x_1, x_2, \cdots, x_n]=[\beta_1, \cdots, \beta_n]$，求解此线性方程组，即为我们接下来要重点学习的主干知识，考研大题必考重点！)

重磅第二丸 ———

解线性方程组、向量

♡ Kira 前言：

- 解线性方程组在线代中份量非常重，每年考第一道线代大题。事实上，线代这一学科本身就是为了解线性方程组而生的。向量是线代中最抽象的部分，也是重难点。
- 矩阵、解线性方程组和向量知识点联系紧密，是线代考察的真正核心与高潮。建议读者学习本札时一气呵成，将线性方程组和向量的概念及相互转换充分融会贯通。

线性方程组篇

齐次线性方程组、基础解系

非齐次线性方程组、解的结构

公共解、同解

克拉默法则

▶ 0. 引子

例1

用克拉默法则求解下列方程 $\begin{cases} x_1-x_2-x_3=2 \\ 2x_1-x_2-3x_3=1 \\ 3x_1+2x_2-5x_3=0 \end{cases}$ （本篇最后介绍克拉默法则）

解：$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix}=3\neq0$

而 $|A_1|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -5 \end{vmatrix}=15$，$|A_2|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}=0$，$|A_3|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}=9$

故 $x_1=\frac{15}{3}=5$，$x_2=\frac{0}{3}=0$，$x_3=\frac{9}{3}=3$ ※

（☺ Kira 总结：① 由例1，克拉默法则求解需多次求行列式值，计算太麻烦，不够先进 =0=；② 只针对"方程个数=未知数个数"情形（即系数矩阵A必须为n×n方阵，有局限性；③ 考研中考查较少，属不重要知识点。）

例2

用高斯消元法(对线性方程组初等变换)解例1方程组:

解: $\begin{cases} x_1-x_2-x_3=2 \\ 2x_1-x_2-3x_3=1 \\ 3x_1+2x_2-5x_3=0 \end{cases} \xrightarrow[\substack{r_3-3r_1 \\ ①}]{r_2-2r_1} \begin{cases} x_1-x_2-x_3=2 \\ x_2-x_3=-3 \\ 5x_2-2x_3=-6 \end{cases}$

$\xrightarrow[②]{r_3-5r_2} \begin{cases} x_1-x_2-x_3=2 \\ x_2-x_3=-3 \\ x_3=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=5 \\ x_2=0 \\ x_3=3 \end{cases}$ (∵从最后一行依次代 x_3, x_2, x_1!)

[∵Kira总结: ①高斯消元法即对方程组进行初等变换,(包含以下三种: (i)将一非零常数k乘到方程两端; (ii)将一方程若干倍加到另一方程上; (iii)交换两方程位置)最后将方程组化成"阶梯状"(由①②步). 对方程作初等变换得到的新线性方程组与原方程组同解; ②高斯消元法可求解任意形式方程组,具有通用性,明显优于克拉默法则. ③如果在上述消元过程中,不写出未知数 x_1, x_2, x_3,则消元过程如下:

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right]}_{A \quad\quad b} \xrightarrow[\substack{r_3-3r_1 \\ ①}]{r_2-2r_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow[②]{r_3-5r_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(其中(A,b)称为增广阵)

则本质上是对增广阵(A,b)进行初等变换. 故采用初等变换法本质上是对增广矩阵(非齐次),系数矩阵(齐次)进行初等行变换并判断解.

▶ 1. 齐次线性方程组. 基础解系

必备常识/做题根基

1 术语(主要概念)

(1) 齐次方程组：方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$，称为

m个方程，n个未知量的线性方程组（其中 $x_1,\cdots,x_n$为未知数，m为方程的个数，$b_1,\cdots,b_n$为常数项）

如果常数项 $b_1=b_2=\cdots=b_n=0$ 则称该方程组为齐次线性方程组。

(2) 系数矩阵：$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ 称为该方程组的系数矩阵

(3) 基础解系：设 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 是 $Ax=0$ 的解向量，若① $\eta_1,\cdots,\eta_t$ 线性无关 ② $Ax=0$ 的任一向量都可由 $\eta_1,\cdots,\eta_t$ 线性表出，则称 $\eta_1,\cdots,\eta_t$ 是 $Ax=0$ 的一个基础解系。

[注 ①齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系中向量个数为 $n-r(A)$；

▲② 由极大无关组的性质：$Ax=0$ 的任意 $n-r(A)$ 个线性无关的解都是 $Ax=0$ 的基础解系]

(〔^〕 kira 备注：此处涉及"线性无关""线性表出"和极大无关组等向量概念，读者可结合向量的讲解进行理解，此处只需直观理解为矩阵 $[\eta_1,\cdots,\eta_t]$ 列满秩，即消不出0列，接下来大家只要跟住我的节奏，会计算 $\eta_1,\cdots,\eta_t$ 就可以了~)

(4) 齐次方程组的通解：如果 $\eta_1,\cdots,\eta_t$ 是齐次方程组 $Ax=0$ 的一组基础解系，那么对任意常数 $c_1,\cdots,c_t$，

$$c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_t\eta_t$$

是齐次方程组 $Ax=0$ 的通解。

[注：即 $Ax=0$ 的基础解系可以线性表示 $Ax=0$ 的任一解]

2 必会定理性质（精）

(1) 齐次线性方程组解的判定

[kira 解读 ①线性方程组的解的情况分为3种——无解、有唯一解、有无穷多解（没错，当解存在时，不是唯一，就是无穷个）② 齐次线性方程组的性质非常好，它一定有解，只需令 $x_1=\cdots=x_n=0$（天生自带零解），因此只需研究解是否唯一，即有无非零解（解唯一即只有零解；解不唯一（有无穷多解）即存在非零解.]

● 齐次线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$ 有非零解

$\Leftrightarrow$ $r(A)<n$（即"A的秩<未知数个数"）

$\Leftrightarrow$ $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 的列向量线性相关 ← 在"向量"探讨

$\Leftrightarrow$ 当 $m=n$ 时，$|A|=0$

[推论：当 $m<n$（方程个数<未知数个数时）

$\Rightarrow$ $Ax=0$ 必有非0解]

（ kira 备注：① 可见，A有非零解 $\Leftrightarrow$ A的列不满秩；

② 当方程组（系数矩阵）长得很"扁"，即A的列多于行，必有非零解.）

● 齐次线性方程组 $Ax=0$ 只有零解

$\Leftrightarrow$ $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 的列向量无关 ← 在"向量"探讨

$\Leftrightarrow$ $r(A)=n=$ A的列数（列满秩）

$\Leftrightarrow$ 当 $m=n$ 时，$|A|\neq 0$

（ kira 提示：方程组解的判定一定学扎实，这里学不好，

后面向量相关无关也完蛋了…)

[3] 必考计算套路(十分重要)

<此处向各路大神致敬，牛掰手法带我们起飞!>

▶ 求齐次线性方程组的基础解系/通解

——例3(先彻底拆分步骤，再给标准答案 ☺)——

求下列齐次方程组的基础解系并写出通解

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-x_4=0 \\ 3x_1+6x_2-x_3-3x_4=0 \\ 5x_1+10x_2+x_3-5x_4=0 \end{cases}$$

解: $\boxed{\text{Step 1}}$ 把系数矩阵化为"行最简矩阵"(只能行变换)

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & -3 \\ 5 & 10 & 1 & -5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(☺ kiki备注：此处我们将A化为了行最简矩阵，事实上只需把A的其中r列化为 $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ 即可 $(r=r(A))$，当然，矩阵需呈现阶梯型 $\boxed{\text{追加一例}}$ $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ OK!

请运用你的超强观察力和计算力，以最快速度达成~)

②自由变量　　n-r(A) 个

$\boxed{\text{Step 2}}$ 确定自由变量的个数 $n-r(A)$ 及为自由变量赋值

① 自由变量个数为 $n-r(A)=4-2=2$，即基础解系向量个数为2

② 在行阶梯形 $\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{①}\ \ \text{②}\ \ \text{③}\ \ \text{④} \end{array}$ 中 ①③是主变量，剩下的②④是自由变量.

所以基础解系 $\eta_1=(\ \ ,1,\ \ ,0)^T$

$\eta_2=(\ \ ,0,\ \ ,1)^T$

先操作自由变量，第二、四列为自由变量，依次令二、四位置为1，其余为0

(kira $\boxed{\text{追加例}}$：则对于$B \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，自由变量个数为4-3=1.
基础解系 $\eta = (\quad, 1, \quad, \quad)^T$ 【第1、3、4列主变量，2列自由变量，令2列为1】)

$\boxed{\text{Step3}}$ 根据主变量将基础解系填写完整

$$A \to \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \;①\quad ②\quad ③\quad ④ \end{array}$$

$\eta_1 = (-2, \boxed{1}, 0, \boxed{0})^T$ ← 给②列自由变量赋值为1，所以把②列拎出来，取前2个元即2和0（秩为2所以取前2个），变为相反数-2和0后依次填空白处

$\eta_2 = (1, \boxed{0}, 0, \boxed{1})^T$ ← 给④列自由变量赋值为1，所以把A中④列拎出来，取前2个元即-1和0，变为相反数1和0后，依次填step2空白处。

kira备注：以上操作原理看似魔幻，实际上是高斯消元法的快速求解版，得到$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$后，写上方程组为

$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$，因为自由变量个数为2，所以把$x_2$和$x_4$两个变量移到右边，即

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 + x_4 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} 令 x_2 = 1, x_4 = 0 \Rightarrow \eta_1 = (-2, 1, 0, 0)^T \\ 令 x_2 = 0, x_4 = 1 \Rightarrow \eta_2 = (1, 0, 0, 1)^T \end{array}$$

（和step3求解结果一致！x_2和x_4可以取无数种组合，1和0为了方便！）

$$(\text{kira}\ \boxed{\text{追加例}}：由 B \to \begin{array}{c} ①\ \ ②\ \ ③\ \ ④ \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \eta = (-1, \boxed{1}, 1, 0)^T$$

给②列自由变量赋值为1，所以把②列拎出来，取前3个元1，-1，0（秩为3所以取3个），变为-1，1，0后，填入空白）

▲ kira 重要备注：η_1和η_2并不是唯一的（也不是相差系数$k\eta_1$和$k\eta_2$那么简单）事实上，当自由变量个数≥2时，自由变量可以取无数种不同组合，而不仅是$\boxed{1}$和$\boxed{0}$.

Step4 写出齐次线性方程组的通解

所以方程组 $Ax=0$ 通解为 $k_1(-2,1,0,0)^T+k_2(1,0,0,1)^T$，$k_1,k_2$ 为任意实数

(追加一例 ∴所以 $Bx=0$ 的通解为 $k(-1,1,0,0)^T$ k 为任意实数)

以下完整理出例3的标准答案(卷面)

解：系数矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&1&-1\\3&6&-1&-3\\5&10&1&-5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

$n-r(A)=4-2=2$

∴基础解系 $\eta_1=(-2,1,0,0)^T$，$\eta_2=(1,0,0,1)^T$

通解为 $k_1\eta_1+k_2\eta_2$，k_1,k_2 为任意实数

当然，有时化行最简很麻烦，而用高斯消元法由下往上求解则非常方便

例4

求 $Ax=0$ 的基础解系，其中 $A=\begin{bmatrix}3&-1&1\\-1&6&-2\\3&-1&1\end{bmatrix}$

解：

$A=\begin{bmatrix}3&-1&1\\-1&6&2\\3&-1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-6&2\\0&17&-5\\0&0&0\end{bmatrix}$

化到此步发现不易处理为行最简，那么直接从下往上求解

$n-r(A)=3-2=1$

心路历程：由 $17x_2-5x_3=0$ 显然直接 $x_2=5$，$x_3=17$ 最快

代入第一行 $x_1-6\times5+2\times17=0\Rightarrow x_1=-4$，肉眼直接看出，非常轻松

∴基础解系 $\eta_1=(-4,5,17)^T$

解题套路

常见题型依次如下：

(1) 已知 A 的信息，求 $Ax=0$ 的通解；

(2) 判别 $Ax=0$ 的解的情况（是否有非零解）；

(3) 已知解的情况（是否有非零解）/通解，确定 A

1 已知A的信息，求$Ax=0$的通解

（当A给定时求通解的方法已详细讲过，此处再介绍几种A较为抽象时的题型。把握原则：①基础解系中向量个数为 $n-r(A)$；② 寻找并利用好 $AB=0$（B列向量可提供解））

——>> 真题演练（2011 数一二三）——

设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 是4阶矩阵，A^* 为A的伴随矩阵，若 $(1,0,1,0)^T$ 是方程 $Ax=0$ 的一个基础解系，则 $A^*x=0$ 的基础解系可为（　　）

(A) α_1,α_3　　(B) α_1,α_2　　(C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　(D) $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

（Kira心路历程：①基础解系 $(1,0,1,0)^T$ 直接代进 $Ax=0$ $\Rightarrow$ α_1 与 α_3 相关，排除AC；② 由基础解系仅含一个向量，所以 $4-r(A)=1$ $\Rightarrow r(A)=3 \Rightarrow r(A^*)=1 \Rightarrow 4-r(A^*)=3$

$A^*x=0$ 的基础解系含3个无关向量，选 D；③由 $A^*A=|A|E=0$（A不满秩）所以A的列向量均为 $A^*x=0$ 的解）

[分析] 见"心路历程"。（注：此处用到了 A^* 的秩相关结论，即 $r(A^*)=\begin{cases} n, & 若 r(A)=n \\ 1, & 若 r(A)=n-1 \\ 0, & 若 r(A)<n-1 \end{cases}$，做题务必信手拈来

例5

设A是n阶矩阵，秩 $r(A)=n-1$

(1) 若矩阵A各行元素之和均为0，则 $Ax=0$ 的通解是___；

(2) 若行列式 $|A|$ 的代数余子式 $A_{11}\neq 0$，则方程组 $Ax=0$ 的通解是___。

[Kira 心路历程：① 由 $r(A)=n-1 \Rightarrow Ax=0$ 通解为 $k\eta$，只需找一个 $Ax=0$ 的非零解；② "各行元素之和为a"是常见套话，写作 $A\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}$ 即 $\begin{bmatrix}a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n}\\ a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n}\\ \cdots\\ a_{n1}+a_{n2}+\cdots+a_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\ a\\ \vdots\\ a\end{bmatrix}$；

③ 由 $AA^*=0$，所以 A^* 列向量是 $Ax=0$ 的解，又 $A_{11}\neq 0$，那所求非零解就取 A_{11} 所在列咯~]

解：由 $n-r(A)=n-(n-1)=1$ 故 $Ax=0$ 通解为 $k\eta$，只需寻找 $Ax=0$ 的一个非零解就可以了

(1) 由A各行元素之和为0 $\Rightarrow A(1,1,\cdots,1)^T=0$，所以 $\eta=\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}$ 为 $Ax=0$ 的一个非零解，因此通解为 $k(1,1,\cdots,1)^T$

(2) $r(A)=n-1<n \Rightarrow |A|=0 \Rightarrow AA^*=|A|E=0$

即 A^* 的每一列都是 $Ax=0$ 的解，对于

$$A^*=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{bmatrix}$$，由 $A_{11}\neq 0$

故 $(A_{11},A_{12},\cdots,A_{1n})^T$ 是 $Ax=0$ 的非零解。

因此 $Ax=0$ 的通解为 $k(A_{11},A_{12},\cdots,A_{1n})^T$ ☆

(😊 Kira 总结：只要n阶阵A不满秩，就有 $|A|=0$，就有 $A^*A=0$（A列向量是 $A^*x=0$ 解）和 AA^*（A^*列向量

是 $Ax=0$ 解）这俩非常好用的对子，非零解随便用~）

—— >> 真题演练（2005 数一二三）————

已知三阶矩阵A的第一行是(a,b,c)，a,b,c不全为零，矩阵 $B=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{bmatrix}$（k为常数），且 $AB=0$，求 $Ax=0$ 的通解。

[kira心路历程：$AB=0$ 老朋友了，B的列向量都是 $Ax=0$ 的解，又由基础解系的向量个数 $n-r(A)$，所以需讨论 $r(A)$ 再从B中取对应数目的列向量用]

解：

(2') 由 $AB=0 \Rightarrow r(A)+r(B)\le 3$ ∵ $A\ne 0, B\ne 0$

$2\ge r(A)\ge 1$，$2\ge r(B)\ge 1$ ← 下面逐个讨论 $r(A)$ 和 $r(B)$ 的可能取值 (2,1)(1,2)(1,1)

(5') (1) 若 $r(A)=2$，$r(B)=1 \Rightarrow k=9$

由 $n-r(A)=3-2=1$

所以通解为 $k_1(1,2,3)^T$，k_1 为任意常数

(2') (2) 若 $r(A)=1$，$r(B)=2 \Rightarrow k\ne 9$

由 $n-r(A)=3-1=2$

所以通解为 $k_2(1,2,3)^T+k_3(3,6,k)^T$，$k_2,k_3$ 为任意常数

(2') ▲ (3) 如 $r(A)=1$，$r(B)=1 \Rightarrow k=9$

$n-r(A)=2$ ← ∵ B 拿不出两无关列向量了，只能A自己来

由 $r(A)=1$ 且第一行为 (a,b,c)，所以A经行变换后可化为

$\begin{bmatrix}a&b&c\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ 有 $ax_1=-bx_2-cx_3$，因 a,b,c 不全为0

不妨设 $a\ne 0$ 得通解 $k_4(-\frac{b}{a},1,0)^T+k_5(-\frac{c}{a},0,1)^T$

（ 据说此题当年平均2分… 求通解从 $AB=0$ 和B中拿列向量，围绕 $n-r(A)$ 打转~ 永远有思路 ）

② 判别 $Ax=0$ 的解的情况（是否有非零解）

（😊 kira 提示：思路非常单纯，抓好3个充要条件 + 一个推论，用"方程数<未知量数"和"$|A|=0$"判断有非零解都非常快。）

—— >> 例 6 ——

齐次线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\ x+\lambda x_2+x_3=0\\ x_1+x_2+x_3=0\end{cases}$，只有零解，则 λ 应满足的条件是 ______

解：（😊 啥也别说了，用 $|A|\neq 0$），$|A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2\neq 0$ 故 $\lambda\neq 1$

—— >> 真题演练（2004、数一二三） ——

设有齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+\cdots+x_n=0\\ 2x_1+(2+a)x_2+\cdots+2x_n=0\\ \cdots\\ nx_1+nx_2+\cdots+(n+a)x_n=0\end{cases}\qquad (n\geqslant 2)$$

试问 a 为何值时，该方程组有非零解，并求其通解。

解：

设系数矩阵为 A，有 $|A|=\begin{vmatrix}1+a & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2+a & \cdots & 2\\ \vdots & & & \\ n & n & \cdots & n+a\end{vmatrix}$ （each行加到第1行） $=(a+\frac{1}{2}(n+1)n)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2+a & \cdots & 2\\ n & n & \cdots & n+a\end{vmatrix}$

$$=(a+\tfrac{1}{2}(n+1)n)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & a & \cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & & a\end{vmatrix}=(a+\tfrac{1}{2}(n+1)n)a^{n-1}$$

$\therefore Ax=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow a=0$ 或 $a=-\frac{1}{2}(n+1)n$

① 当 $a=0$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2 & \cdots & 2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ n & n & \cdots & n\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}\boxed{1} & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\qquad n-r(A)=n-1$$

所以基础解系 $\eta_1=(-1,1,0,\cdots,0)^T$，$\eta_2=(-1,0,1,0,\cdots,0)^T$，$\cdots$，$\eta_{n-1}=(-1,0,\cdots,0,1)^T$

通解为 $x=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-1}\eta_{n-1}$，其中 $k_1,\cdots,k_{n-1}$ 为任意常数

② 当 $a=-\frac{1}{2}(n+1)n$ 时　　（第k行减第1行的k倍）

$$A=\begin{bmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ n & n & n & \cdots & n+a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -2a & a & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -na & 0 & 0 & \cdots & a\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}\xrightarrow[a=-\frac{1}{2}n(n+1)n]{\text{第一行减各行}}\begin{bmatrix}0 & \boxed{0} & \boxed{0} & \cdots & \boxed{0}\\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

$n-r(A)=1$

所以基础解系为 $\eta=(1,2,3,\cdots,n)^T$

通解为 $x=k\eta$，k 为任意常数

[☺ Kira语重心长地说：用到线性方程组的知识点都很浅白，你对这种题所有的恐惧，本质上都是来自于求行列式和矩阵行变换的恐惧，把握住我们第一丸的各种原则，要相信自己一定可以搞定哦]

3 已知解的情况（是否有非零解）/通解，确定A

[说来说去都是 $n-r(A)$ … -0-]

例7

要使 $\alpha_1=(1,0,2)^T$，$\alpha_2=(0,1,-1)^T$ 都是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解，则A可以为

A. $\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 4 & -2 & -2\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 4 & 0 & -2\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$

[☺ Kira心路历程：α_1,α_2 无关，所以 $n-r(A)=3-r(A)\geq 2$（伸手

就存），所以 $r(A)\le 1$. B和D都错. 再代 α_1 和 α_2 进去看是否满足 $Ax=0$. 所以选 A.

2. 非齐次线性方程组、解的结构

必备常识/做题根基

1 术语（主要概念）

(1) 非齐次方程组：方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \quad (*)$$

如果常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 不全为0，称为非齐次线性方程组

(2) 导出组：将(*)中的常数项改为0，得到的齐次线性方程组即为原方程组的导出组.

(3) 增广矩阵：$\bar{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$ 称为(*)的增广矩阵.

2 必会定理性质（精）（重要）

(1) 非齐次线性方程组解的判定★

[Kira解读：与齐次线性方程组不同，非齐次的解可能出现3种情况，即无解，有唯一解，有无穷多解（不再关心零解也没有零解）]

例 $\left[\begin{smallmatrix} 1&1&1&1 \\ 0&1&2&1 \\ 0&0&0&2 \end{smallmatrix}\right]$ 即 $0=2$ 不管 x_1,x_2,x_3 如何取，0乘任何数都不可能得2

● 非齐次线性方程组 $Ax=b$
- 无解 $\Leftrightarrow r(A)<r(A,b)$
- 有解
  - 无穷多解 $r(A)=r(A,b)<n$
  - 唯一解 $r(A)=r(A,b)=n \overset{当m=n}{\Leftrightarrow} |A|\ne 0$

(Kira备注：只要n阶矩阵A满秩（$|A|\ne 0$），则 $Ax=b$ 必有唯一解)

▲ 注：$Ax=b$ 无解 $\Leftrightarrow r(A)+1=r(\bar{A})$（只可能+1，因为 $[\cdots] \to [\cdots]$）

$\Leftrightarrow$ b不能由A的列向量线性表出（后面说）

· BMDM ·

(2) ★ $Ax=b$ 解的性质（不要死背！不要死背！不要死背！拿眼看～）

(i) 如果 α, β 是线性方程组 $Ax=b$ 的两个解，则 $\alpha-\beta$ 是 $Ax=0$ 的解。

（日日废话！因为 $\begin{cases} A\alpha=b & ① \\ A\beta=b & ② \end{cases}$，①-② 当然有 $A(\alpha-\beta)=0$，什么题也这么看）

(ii) 如果 α 是 $Ax=b$ 的解，η 是 $Ax=0$ 的解，则 $\alpha+\eta$ 是 $Ax=b$ 的解。

（日日废话！因为 $\begin{cases} A\alpha=b & ① \\ A\eta=0 & ② \end{cases}$ ①+② 当然有 $A(\alpha+\eta)=b$.）

[😀 我们的口号："是解你就代一代" 代进 $Ax=b$ 清清爽爽～]

(3) ★ $Ax=b$ 解的结构.（基本常识）

对非齐次线性方程组 $Ax=b$，若 $r(A)=r(\bar{A})=r$ 且已知 $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-r}$ 是导出组 $Ax=0$ 的基础解系，ξ_0 是 $Ax=0$ 的某个已知解，则 $Ax=b$ 的通解为 $\xi_0+c_1\eta_1+\cdots+c_{n-r}\eta_{n-r}$，其中 $c_1, \cdots, c_{n-r}$ 为任意常数.（😀 即"非齐通 = 特解 + 齐通"～下面马上介绍神速算法～）

[3] 必考计算套路（十分重要）

▶ 求非齐次线性方程组的通解（有齐次功底后这个 so easy!）

—— » 真题演练、（2009 数一二三 局部）——

设 $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{bmatrix}$，$\xi_1=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$，求满足 $A\xi_2=\xi_1$，$A^2\xi_3=\xi_1$ 的所有向量 ξ_2, ξ_3

（😀 一道明显解 $Ax=b$ 大题）

step 1 对增广矩阵作行变换化为阶梯形（和齐次相同）

$$\bar{A}=\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

想回讲座 快出 [illegible] [illegible] …

自由变量

step 2 确定解的结构及为自由变量赋值

$n-r(A)=3-2=1$

（非齐次特解）　　　　（齐次基解）

通解为 $(\quad, 0, \quad)^T + k_1(\quad, 1, \quad)^T$

特解自由变量全写0　　基础解系老规矩，依次为自由变量赋值1，其余为0

Step3 根据主变量取值，将通解填写完整

由 $\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$
　　① ② ③ ④

特解把④直接从第一行往下抄，不变号

通解为 $(0, \boxed{0}, 1)^T + k_1(-1, \boxed{1}, -2)^T$，$k_1$ 为任意常数

基础解系老规矩，变号抄进来 ②

从而 $\xi_2 = (-k_1, k_1, 1-2k_1)^T$，$k_1$ 是任意常数

（Kira备注：最后一步就是把通解两括号合并起来，考试建议大家把 ξ_2 具体写出，以便老师给步骤分！）

▶以下完整理出呈现在卷面的标准答案：

4) $\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$　　$\therefore n - r(A) = 3 - 2 = 1$

得 $Ax = \xi_1$ 的通解为 $(0, 0, 1)^T + k_1(-1, 1, -2)^T$

从而 $\xi_2 = (-k_1, k_1, 1-2k_1)^T$，$k_1$ 是任意常数 ☆

（简单讲下）由于 $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$，对 $A^2x = \xi_1$，由增广矩阵做初等变换有 $\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 0 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$　　$\therefore n - r(A) = 3 - 1 = 2$

得 $A^2x = \xi_1$ 的通解为 $(-\frac{1}{2}, \boxed{0}, \boxed{0})^T + k_2(-1, \boxed{1}, \boxed{0})^T + k_3(0, \boxed{0}, \boxed{1})^T$

自由变量直接写0　　看第2列，因为令第2个变为1

从而 $\xi_3 = (-\frac{1}{2} - k_2, k_2, k_3)$，$k_2, k_3$ 为任意常数

（Kira备注：以上步骤看似又很麻烦，实际上还是通过高斯

消元法依次给自由变量赋值，比如由 $\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&2&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

得到 $\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_2+x_3=1\end{cases}$ 自由变量 $3-2=1$ 个

所以 $\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_2=1-x_3\end{cases}$ 令 $x_3=1 \Rightarrow \begin{cases}x_1=0\\x_2=0\\x_3=1\end{cases}$ 即 $Ax=\beta$ 一个解为 $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

所以通解为 $(0,0,1)^T+k_1(-1,1,-2)^T$，$\forall k_1$

▶ 非齐次线性方程组解的判定（何时无解、无穷多解、唯一解？）

>> 例 8

讨论 λ 的值，使 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1\\x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda\\x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2\end{cases}$ (1) 无解；(2) 有唯一解；(3) 无穷多解。

$\boxed{\text{step1}}$ 对 $\bar{A}=(A,b)$ 进行初等行变换化为阶梯形

$$\bar{A}=\begin{bmatrix}\lambda&1&1&1\\1&\lambda&1&\lambda\\1&1&\lambda&\lambda^2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&\lambda&\lambda^2\\0&\lambda-1&1-\lambda&\lambda(1-\lambda)\\0&0&(1-\lambda)(2+\lambda)&(1-\lambda)(\lambda+1)^2\end{bmatrix}$$

① ② ③ ④

讨论秩不必化最简 😊

$\boxed{\text{step2}}$ 当 $r(A)<r(\bar{A})$ 时无解 ← 最后一列胀（chéng）出来了

（😊 kira说白了：③最后一个元为0，但④最后一个元不为0）

当 $r(A)<r(A,b)$ 即 $(1-\lambda)(2+\lambda)=0$ 且 $(1-\lambda)(\lambda+1)^2\neq0$ 时无解，此时 $\lambda=-2$

$\boxed{\text{step3}}$ 当 $r(A)=r(A,b)=n$ 时，有唯一解 ← A满满的~

（😊 kira说白了：A满秩有唯一解，即A每一行都不能全化0，死也不能全化0！$r(A)=3$ 那么 $r(A,b)$ 一定等于3！注意不必限制 $(1-\lambda)(\lambda+1)^2$）

当 $r(A)=r(A,b)=3$ 即 $(1-\lambda)(2+\lambda)\neq0$ 有 $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq2$

$\boxed{\text{step4}}$ 当 $r(A)=r(A,b)<n$ 时有无穷多解 ← A空空的~

（😊 kira说白了：到少把最后一行全打成0）

当 $r(A)=r(A,b)<3$ 即 $(1-\lambda)(2+\lambda)=0$ 且 $(1-\lambda)(\lambda+1)^2=0$

$\Rightarrow \lambda=1$ 此时由 $\bar{A}\to\begin{bmatrix}1&1&1&\vdots&1\\0&0&0&\vdots&0\\0&0&0&\vdots&0\end{bmatrix}$ 求得通解为

$(1,0,0)^T+k_1(-1,1,0)^T+k_2(-1,0,1)^T$，$k_1,k_2$ 任意实数

（kira问问：现在你会直接熟练写通解了吗？不会再好好巩固前面的操作手法哦！）

解题套路

● 常见题型依次如下：

(1) 求 $AX=B$ 或 $AX=b$（已讲）的通解（与矩阵运算结合）

(2) $AX=B$ 或 $AX=b$（已讲）解的判定并求通解（即结合(1)）

(3) 已知 $AX=B$ 解的信息，确定 A、B 中的未知参数 a / A、B 的关系

(4) 利用解的结构处理抽象方程组

[1] 求 $AX=B$ 的通解（与矩阵运算结合）

[kira提示：$AX=B$，B 为矩阵 $(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 事实上为解多个线性方程 $AX_1=b_1$，$AX_2=b_2$，$\cdots$，$AX_n=b_n$，其中 $X=(x_1,\cdots,x_n)$]

>> 真题演练（2014 数一二三 (I)）

设 $A=\begin{bmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{bmatrix}$，$E$ 为 3 阶单位矩阵

(I) 求方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系

(II) 求满足 $AB=E$ 的所有矩阵 B

[kira 心路历程：(I) 送分 (II) 即求 $Ax_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$，$Ax_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$，$Ax_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ 三个方程的通解，再令 $X=(x_1,x_2,x_3)$ 合并即可]

解：(I) 解得 $\eta=(-1,2,3,1)^T$（过程略）

(II) 考查三个非齐次线性方程组 $Ax=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$，$Ax=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$，$Ax=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

由于这三个方程组系数矩阵相同，令 $\bar{A}=(A\vdots E)$ 作初等行变换

（∵"左边化行最简，右边剩啥都行）

$$\bar{A}=(A\vdots E)=\left[\begin{array}{cccc|ccc}1&-2&3&-4&1&0&0\\0&1&-1&1&0&1&0\\1&2&0&-3&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|ccc}1&-2&3&-4&1&0&0\\0&1&-1&1&0&1&0\\0&4&-3&1&-1&0&1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{cccc|ccc}1&-2&3&-4&1&0&0\\0&1&-1&1&0&1&0\\0&0&1&-3&-1&-4&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|ccc}1&0&0&1&2&6&-1\\0&1&0&-2&-1&-3&1\\0&0&1&-3&-1&-4&1\end{array}\right]$$

（☺kira备注：研究 $AX=B$ 时非常壮观，需要对 $(A\vdots B)$ 整体行变换，等要求解时，再把"⋮"右侧一列列拙出来看，就像我们求 $AX=b$ 那样，只不过求了3个 $AX=b$）

因此得三个方程组的通解：

$(2,-1,-1,0)^T+k_1(-1,2,3,1)^T$ ← 刀在(1)问求好了

$(6,-3,-4,0)^T+k_2(-1,2,3,1)^T$

$(-1,1,1,0)^T+k_3(-1,2,3,1)^T$

故所求矩阵 $B=\begin{bmatrix}2-k_1&6-k_2&-1-k_3\\-1+2k_1&-3+2k_2&1+2k_3\\-1+3k_1&-4+3k_2&1+3k_3\\k_1&k_2&k_3\end{bmatrix}$，$k_1,k_2,k_3$ 为任意常数

（☺kira备注：每个通解作为列向量，竖着排成B）

2 AX=B解的情况的判定

（☺kira提示：依然对 $(A\vdots B)$ 整体行变换，根据 $r(A)$ 和 $r(A\vdots B)$ 的关系来讨论，不难，但要耐心）

>> 真题演练（2016 数一三）

设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\2&a&1\\-1&1&a\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2&2\\1&a\\-a-1&-2\end{bmatrix}$

当 a 为何值时，方程 $AX=B$ 无解，有唯一解，有无穷多解？在有解时，求解此方程。

(亡 kira 心路历程：规规矩矩的一道大题，按步就班计算即可)

解：

对增广矩阵 (A,B) 进行初等行变换化为阶梯形

$$\left[\begin{array}{ccc|cc}1&-1&-1&2&2\\2&a&1&1&a\\-1&1&a&-a-1&-2\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|cc}1&-1&-1&2&2\\0&a+2&3&-3&a-4\\0&0&a-1&1-a&0\end{array}\right]=C$$

① 当 $r(A)=r(A,B)=3$ 时，有唯一解，此时 $a-1\neq0$ 且 $a+2\neq0$

即有 $a\neq1$ 且 $a\neq-2$

$$(A,B)\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&1&\frac{3a}{a+2}\\0&1&0&0&\frac{a-4}{a+2}\\0&0&1&-1&0\end{array}\right]$$ ← 继续化行最简

所以 $X=\begin{bmatrix}1&\frac{3a}{a+2}\\0&\frac{a-4}{a+2}\\-1&0\end{bmatrix}$ ← 分别解 $Ax=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$ 和 $Ax=\begin{bmatrix}\frac{3a}{a+2}\\\frac{a-4}{a+2}\\0\end{bmatrix}$ 再按列排一起

② 当 $r(A)=r(A,B)<3$ 时，有无穷多解，此时 $a=1$ ← 最后一行必为 0

$$(A,B)\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&1&1\\0&1&1&-1&-1\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

$Ax_1=b_1$ 的通解为 $(1,-1,0)^T+k_1(0,-1,1)^T$ ← 注意区分 k_1 和 k_2！

$Ax_2=b_2$ 的通解为 $(1,-1,0)^T+k_2(0,-1,1)^T$

所以通解 $X=\begin{bmatrix}1&1\\-1-k_1&-1-k_2\\k_1&k_2\end{bmatrix}$，其中 k_1，k_2 为任意常数

③ 当 $r(A)<r(A,B)$ 时无解，当 $a=1$ 时 $r(A)=r(A,B)=2$，不满足；当 $a=-2$ 时，$(A,B)\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|cc}1&-1&-1&2&2\\0&0&3&-3&-6\\0&0&-3&3&0\end{array}\right]$ 有 $r(A)=2$

而 $r(A,B)=3$ 所以无解

→ 真题演练 (1997)

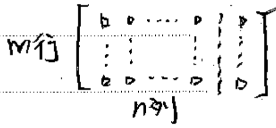
非齐次线性方程组 $Ax=b$ 中未知量个数为 n，方程个数为 m

系数矩阵的秩 $r(A)=r$，则（　）

(A) $r=m$ 时，方程组 $Ax=b$ 有解；(B) $r=n$ 时方程组 $Ax=b$ 有唯一解

(C) $m=n$ 时，$Ax=b$ 有唯一解；(D) $r<n$ 时，方程组 $Ax=b$ 有无穷多解

[☺ kira心路历程：①先画个矩阵出来，几行几列拉出来溜溜。



然后排着思考 (A) $r=m$，A行满秩，必有唯一解。做完了!……（之前解释过）②有解没解不看列秩，$m=n$ 时A不满秩也不行 B, C, D 都错]

[分析] 选(A)，见"心路历程"。

>>真题演练（2001数三）

设A是n阶矩阵，α是n维列向量，若秩 $r\begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{bmatrix}=r(A)$

则线性方程组

(A) $Ax=\alpha$ 必有无穷多解　　(B) $Ax=\alpha$ 必有唯一解

(C) $\begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=0$ 仅有零解　　(D) $\begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=0$ 必有非零解

[☺ kira讲解：①这是齐次和非齐次综合判定问题，正好复习一下，齐次线性方程组 $Ax=0$ 要么有非零解，要么只有零解，二者选一，所以C和D中必一对一错，A.B可以不看了。

②由齐次解判定，$r(A)=n$ 只有零解，$r(A)<n$ 有非零解。

要读懂 $\begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{bmatrix}$ 是 $n+1$ 阶方阵（不解释）又 $r\begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{bmatrix}=r(A)\leq n$

（要能直接感觉出不满秩）

$\therefore \begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{bmatrix}<n+1$ 所以有非零解，选D。

③再看A·B，对于 $r(A,\alpha)$ 有 $r(A)\leq r(A,\alpha)\leq r\begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{bmatrix}=r(A)$

$\Rightarrow r(A)=r(\bar{A})$ 所以有解，但唯一还是无穷多个不确定 ⊠

★ kira总结：判解的情况用秩，而全题唯一的关于秩的条件是 $r\begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{bmatrix}=r(A)$ 所以判断时一定要往它靠拢，涉及

本章知识的并不困难，就那几个秩，很快就记住了，还是那句话：
你所有的恐惧都来自于对行列式和矩阵知识的不自信。多练！

③ 已知 $AX=B$ 解的信息，确定 $A、B$ 中参数 a / $A、B$ 的秩

（Kira 提示：上一部分的秩继续用；另外可以用解的定义，代入 $Ax=B$ 中，得到关于未知参数的方程组）

>> 真题演练（2010 数一二三）

设 $A=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}a\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$，已知线性方程组 $Ax=b$ 存在 2 个不同的解。

(Ⅰ) 求 λ，a　(Ⅱ) 求方程组 $Ax=b$ 的通解

[Kira 心路历程：已知有 2 个不同解，说明无穷多个解（因为唯一解和无解的情况都被否掉了）利用 $r(A)=r(A,b)<n$ 讨论 λ 和 a
又 A 是 3 阶方阵，由 $|A|=0$，马上出 λ]

解：

(Ⅰ) 因为方程组 $AX=b$ 为 2 个不同解，所以 $r(A)=r(\bar{A})<n$。

故 $|A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}\xlongequal[\text{2列展开}]{\text{关于2行}}(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda & 1\\ 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-1)^2=0$

解得 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-1$

① 当 $\lambda=1$ 时　$\bar{A}=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & a\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{array}\right]$，可知 $r(A)=1$，$r(\bar{A})=2$，无解。

② 当 $\lambda=-1$ 时　$\bar{A}=\left[\begin{array}{ccc|c}-1 & 1 & 1 & a\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & a+2\end{array}\right]$　所以 $a=-2$

即有 $\lambda=-1$，$a=-2$

(Ⅱ) 当 $\lambda=-1$，$a=-2$ 时　$\bar{A}=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$

所以 $AX=b$ 的通解为

$(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},0)^T+k(1,0,1)^T$，$k$ 为任意常数

——>> 真题演练（2013 数一二三）

设 $A=\begin{bmatrix}1&a\\1&0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0&1\\1&b\end{bmatrix}$，当 a，b 为何值时，存在矩阵 C，使 $AC-CA=B$，并求出矩阵 C

[kira解读：乍一看是矩阵题，本质是解方程组，只不过平常我们4个方程是整齐的 $\begin{bmatrix}0\\1\\1\\b\end{bmatrix}$，本题为“$\begin{bmatrix}0&1\\1&b\end{bmatrix}$”，把 C 设出来开干！]

解：

设 $C=\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}$，由 $AC-CA=B$ 有 $\begin{bmatrix}1&a\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&a\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\1&b\end{bmatrix}$

即 $\begin{bmatrix}x_1+ax_3&x_2+ax_4\\x_1&x_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x_1+x_2&ax_1\\x_3+x_4&ax_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\1&b\end{bmatrix}$

即 $\begin{cases}-x_2+ax_3=0\\-ax_1+x_2+ax_4=1\\x_1-x_3-x_4=1\\x_2-ax_3=b\end{cases}$ $\therefore \bar{A}=\left[\begin{array}{cccc|c}0&-1&a&0&0\\-a&1&0&a&1\\1&0&-1&-1&1\\0&1&-a&0&b\end{array}\right]$

$\rightarrow\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&-1&-1&1\\0&1&-a&0&0\\0&0&0&0&a+1\\0&0&0&0&b\end{array}\right]$ 若存在矩阵 C，则此方程组有解，有 $a=-1$，$b=0$.

此时得通解为 $(1,0,0,0)^T+k_1(1,-1,1,0)^T+k_2(1,0,0,1)$，$k_1$，$k_2$ 为任意实数.

所以矩阵 $C=\begin{bmatrix}1+k_1+k_2&-k_1\\k_1&k_2\end{bmatrix}$，使 $AC-CA=B$ 成立.

（ kira点评：本题属于题型“已知 $Ax=b$ 有解，求 a，b 和通解”）

——例8——

线性方程组 $Ax=b$ 经初等行变换其增广矩阵化为

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & -1 \\ & a-3 & 2 & 6 & a-1 \\ & & a-2 & a & -2 \\ & & & -3 & a+1 \end{array}\right]$$

若方程组无解，则 $a=$（ ）

(A) -1 (B) 1

(C) 2 (D) 3

【 kira 心路历程：做到现在这种题应当轻取了～从倒数二行排着往上验 a ①当 $a=2$，后两行都变0了，$r(A)=r(\bar{A})$ 有解 ②当 $a=3$，第二三行为 $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right]$ 就矛盾方程无解 ③其它几个位置的 a 不考虑（不解释） 选D.

4 利用解的结构（基础解系等条件）处理抽象方程组

（ kira 提示：此处需用到解的结构和解的性质等知识，是很多同学不舒服的题型，请大家把握好我之前讲的原则：不要扎堆，具体问题具体推！）

——>> 真题演练（2017 数一二三）

设3阶矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 有3个不同的特征值，且 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$

<Ⅰ> 证明 $r(A)=2$ （后面讲，第Ⅱ问直接用）

<Ⅱ> 若 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，求 $Ax=\beta$ 的通解

【 kira 备注："有3个不同特征值"这个条件<Ⅱ>问用不到，后面学】

【 kira 心路历程：原题给了两个式子，直接拆开看看

$$\begin{cases} \alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2 \Rightarrow (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}=0 \Rightarrow A\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}=0 \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\beta \Rightarrow (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\beta \Rightarrow A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\beta \end{cases}$$

又 $n-r(A)=3-2=1$

这道题还没开始发挥就已经结束了… =0= 】

解：<Ⅱ> 由 $r(A)=2 \Rightarrow n-r(A)=3-2=1$.

所以 $Ax=0$ 的通解为 $k(1,2,-1)^T$，k 为任意常数.

又 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \Rightarrow (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\beta \Rightarrow A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\beta$

由解的结构，$Ax=\beta$ 的通解为 $k(1,2,-1)^T+(1,1,1)^T$，
k 为任意常数。

例 9

4阶矩阵 A 的秩 $r(A)=2$，η_1,η_2,η_3 是 $Ax=b$ 的3个解向量
其中 $\eta_1-\eta_2=[-1,0,3,-4]^T$，$\eta_1+\eta_2=[3,2,1,-2]^T$，$\eta_3+2\eta_2=[5,1,0,3]^T$
写出 $Ax=b$ 的通解

[kira心路历程：这种题拿到手，首先觉得肯定能做，只待我稍加整理～ $r(A)=2 \Rightarrow n-r(A)=4-2=2$，基础解系求2个，再任取 η_1,η_2,η_3 中的一个作为特解即可。所以主要任务是凑齐必解，方法是拿着 $A\eta_1=b$，$A\eta_2=b$，$A\eta_3=b$ 加加减减凑一凑"$Ax=0$"]

解：$r(A)=2 \Rightarrow n-r(A)=4-2=2$ 所以基础解系包含2个无关解

由题
$$\begin{cases}\eta_1=\frac{1}{2}[(\eta_1-\eta_2)+(\eta_1+\eta_2)]=[1,1,2,-3]^T\\ \eta_2=\frac{1}{2}[(\eta_1+\eta_2)-(\eta_1-\eta_2)]=[2,1,-1,1]^T\\ \eta_3=(\eta_3+2\eta_2)-2\eta_2=[1,-1,2,1]^T\end{cases}$$

要求 $Ax=0$ 的解，需要 $\eta_1-\eta_2$，$\eta_2-\eta_3$ 等；要求 $Ax=b$ 特解需要 η_1,η_2,η_3，干脆直接把 η_1,η_2,η_3 全求了，反正非常好凑！

因为 $A\eta_1=b$，$A\eta_2=b$，$A\eta_3=b$

所以 $\begin{cases}A(\eta_1-\eta_2)=0\\ A(\eta_2-\eta_3)=0\end{cases}$ 其中 $\eta_1-\eta_2=[-1,0,3,-4]^T$，$\eta_2-\eta_3=[1,2,-3,0]^T$

易验证 $\eta_1-\eta_2$ 与 $\eta_2-\eta_3$ 无关

所以 $Ax=b$ 的通解为 $\eta_1+k_1(\eta_1-\eta_2)+k_2(\eta_2-\eta_3)$

即 $[1,1,2,-3]^T+k_1[-1,0,3,-4]^T+k_2[1,2,-3,0]^T$

k_1,k_2 为任意常数。

kira总结：▲① $A(\eta_1-\eta_2)=0$ 是解的性质，可直接用，但我更喜欢这样自己推，一来省去记忆的麻烦，二来适用于更灵活方法

的题目，比如 $A(\eta_1+\eta_2-2\eta_3)=0$ 就没法猜，但我们可以推出来，手法记住，立于不败之地！② 解的性质一般以小题出现，下手从基础解系包含解向量个数 $n-r(A)$ 出发，$Ax=0$ 的解由①中我说的手法自己推，通常为 $\eta_1-\eta_2$ 等.

例10

设4元非齐次方程组 $Ax=b$ 中 $r(A)=3$，已知 η_1,η_2,η_3 为其3个解，且有 $\eta_1=\begin{bmatrix}2\\3\\4\\5\end{bmatrix}$，$\eta_2+\eta_3=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$，求方程通解

[☺ Kira带你飞：让我们再次实践一下如何靠自己推立于不败之地！首先还是从 $n-r(A)$ 着手]

解：$n-r(A)=4-3=1$ 所以通解可以表示为 $k\xi+\eta_1$，其中 ξ 为 $Ax=0$ 的基础解系.

由 $A\eta_1=b$，$A\eta_2=b$，$A\eta_3=b$ ← 结合已知条件加加减减凑出 $Ax=0$ 的解！信我！

有 $A(\eta_2+\eta_3-2\eta_1)=0$

$\Rightarrow (1,2,3,4)^T-2(2,3,4,5)^T=-(3,4,5,6)^T$

知 $\xi=(3,4,5,6)^T$ 所以通解为 $\eta_1+k\xi$，k 为任意实数.

例11

已知 β_1,β_2 是 $Ax=b$ 的两个不同的解，α_1,α_2 是对应齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，k_1,k_2 是任意常数，则 $Ax=b$ 的通解是（ ）

(A) $k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+\frac{\beta_1-\beta_2}{2}$ (B) $k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1-\alpha_2)+\frac{\beta_1+\beta_2}{2}$

(C) $k_1\alpha_1+k_2(\beta_1-\beta_2)+\frac{\beta_2-\beta_1}{2}$ (D) $k_1\alpha_1+k_2(\beta_1-\beta_2)+\frac{\beta_1+\beta_2}{2}$

[分析] 老规矩，自己用 $A\beta_1=b$，$A\beta_2=b$，$A\alpha_1=0$，$A\alpha_2=0$ 代着验.

可知 $x=\frac{\beta_1-\beta_2}{2}$ 不满足 $Ax=b$，(A)(C)排除；$\beta_1-\beta_2$ 不能保证与 α_1 无关；选(B)

▶ 3. 公共解、同解

必备常识 / 做题根基

1 术语（主要概念）

(1) 公共解：对于方程组(I)和(II)，如果α既是方程组(I)的解，α也是(II)的解，则称α是方程组(I)和(II)的公共解。

(2) 同解：对于方程组(I)和(II)，如果α是(I)的解，则α必是(II)的解，反之如果α是(II)的解，则必有α也是(I)的解，则称(I)与(II)同解。

2 必会定理性质（背）

(1) 同解的必要条件

$Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解 $\Rightarrow r(A)=r(B)$

（Kira备注：换言之，秩不同一定不同解）

3 必会计算套路

▶ 求 $AX=0$ 和 $BX=0$ 的公共解

主要方法有：① 给两个方程组 $\begin{cases}\equiv\end{cases}$ $\begin{cases}=\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}\equiv\end{cases}$ 联立求解即可

② 给两组基础解系 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 和 β_1,β_2，由

公共解 $\gamma=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=-y_1\beta_1-y_2\beta_2$

得 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+y_1\beta_1+y_2\beta_2=0$

有 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\y_1\\y_2\end{bmatrix}=0$ 解关于"任意常数"的方程组，从而确定常数，进而确定公共解。

（Kira备注：以上两种方法足够了，记牢！也可将 $AX=0$ 通解代入 $BX=0$，确定常数~）

——>> 真题演练（2007 数一二三）

设线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+ax_3=0\\x_1+4x_2+a^2x_3=0\end{cases}$ 与方程 $x_1+2x_2+x_3=a-1$ 有公共解

求 a 的值及所有公共解.

Step 1 联立方程组 $Ax=0$ 和 $Bx=0$ 并对 A 行变换化阶梯形

①和②的公共解,即为联立方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \\ x_1+2x_2+x_3=a-1 \end{cases}$$ ③ 的解

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 3 & a^2-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \end{bmatrix} \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1-a \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & (a-1)(a-2) \end{array}\right]$$

Step 2 根据原题公共解条件讨论并求解

因为③有解,有 $r(A)=r(\bar{A})$ 所以 $(a-1)(a-2)=0$ 即 $a=1$ 或 $a=2$

当 $a=1$ 时, $A\to\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$, $n-r(A)=3-2=1$, 公共解为 $x=k(-1,0,1)^T$, k 为任意常数;

当 $a=2$ 时, $A\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\to\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ $r(A)=r(A,b)=3=n$

此时有唯一公共解 $x=(0,1,-1)^T$

>> 真题演练(2002)

设4元齐次线性方程组(Ⅰ)为

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=0 \\ x_1+2x_2+x_3-x_4=0 \end{cases}$$

而已知另一4元齐次线性方程组(Ⅱ)的一个基础解系为

$\alpha_1=(2,-1,a+2,1)^T$, $\alpha_2=(-1,2,4,a+8)^T$

(1) 求方程组(Ⅰ)的一个基础解系;

(2) 当 a 为何值时,方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)有非零公共解?在有非零公共解时,求出全部非零公共解.

（二）kira脑回路：公共解问题两条路，第一条联立走不通，自然想到第二条用两组基础解系，何况第一问已在提示这样来做了。）$\boxed{\text{step1}}$ 做求 $Ax=0$ 和 $Bx=0$ 的基础解系

解：(2) 对方程组(Ⅱ)的系数矩阵 B 作初等行变换，

有 $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

$n-r(B)=4-2=2$，所以基础解系为

$\beta_1=(5,-3,1,0)^T$，$\beta_2=(-3,2,0,1)^T$

$\boxed{\text{step2}}$ 设出公共解 γ，列关于任意常数的方程组并求解

设 γ 是(Ⅰ)和(Ⅱ)的非零公共解，则

$\gamma=k_1\beta_1+k_2\beta_2=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2$，其中 k_1,k_2 不全为0，l_1,l_2 不全为0.

有 $k_1\beta_1+k_2\beta_2-l_1\alpha_1-l_2\alpha_2=0$ 即 $k_1\begin{bmatrix}5\\-3\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-3\\2\\0\\1\end{bmatrix}-l_1\begin{bmatrix}2\\-1\\a+2\\1\end{bmatrix}-l_2\begin{bmatrix}-1\\2\\4\\a+8\end{bmatrix}=0$

得齐次方程组(Ⅲ)

$$\begin{cases} 5k_1-3k_2-2l_1+l_2=0 \\ -3k_1+2k_2+l_1-2l_2=0 \\ k_1-(a+2)l_1-4l_2=0 \\ k_2-l_1-(a+8)l_2=0 \end{cases}$$

对系数矩阵初等变换，有

$$C=\begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -a-2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -a-8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a-2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -a-8 \\ 0 & 2 & -3a-5 & -14 \\ 0 & -3 & 5a+8 & 21 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a-2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -a-8 \\ 0 & 0 & -3a-3 & 2a+2 \\ 0 & 0 & +5a+5 & -3a-3 \end{bmatrix}$$

(Ⅰ)与(Ⅱ)有非零公共解，即 $Cx=0$ 有非零解

当且仅当 $a=-1$ 时，$r(C)=2<4$，$Cx=0$ 有非零解，l_1,l_2 自由变量

于是 $\eta=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2=l_1(2,-1,1,1)^T+l_2(-1,2,4,7)^T$，$l_1,l_2$ 任意常数。

(kira备注：这道题有它的特殊性，$C \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$n-r(C)=2$ 所以 k_1, k_2 都是自由变量可取任意常数，直接 $\gamma = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$ 就出来了。当题公共解问题中 k_1 和 k_2 也可能受某种限定，具体问题具体分析。比如2007上一道例题。)

解题套路

◎常见题型依次如下：

(1) 给两线性方程组，判有无公共解（已讲）

(2) 给两线性方程组，已知有(无)公共解，求参数 a（已讲）

(3) 同解的充分必要相关命题

(4) 已知同解，求参数 a.

3 同解的充分必要相关命题

—— >> 真题演练（2003 数一）——

设有齐次线性方程组 $Ax=0$ 和 $Bx=0$，其中 A，B 均为 $m\times n$ 矩阵，现有4个命题

(1) 若 $Ax=0$ 解均是 $Bx=0$ 的解，则秩 $r(A)\geq r(B)$

(2) 若 $r(A)\geq r(B)$，则 Ax 的解均是 $Bx=0$ 的解.

(3) 若 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，则秩 $r(A)=r(B)$

(4) 若 $r(A)=r(B)$，则 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解.

以上命题中正确的是

(A) (1) (2)　　(B) (1) (3)　　(C) (2) (4)　　(D) (3) (4).

[kira心路历程：① (1)和(3)互为逆命题、(3)和(4)互为逆命题。强条件可以推弱条件，这道题投机取巧也可以，因为"解有公共交集"一定是比"秩"更强的条件（说白了秩什么都保证不了）。如果四选二，肯定是(1)(3)；② 同解 $\Rightarrow r(A)=r(B)$（已讲），(1)用向量线性表出证是最好的，也可以直观想想，(1)说明"A解集 ⊂ B解集"（下部分讲）

说明B的自由变量更多，能取到A取不到的解，即 $n-r(B)\geq n-r(A)$
$\therefore r(B)\leq r(A)$.]

[分析] (3)是同解必要条件；(1)（可等价先向量再回来看）设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_t$ 是 $Ax=0$ 的基础解系，$\beta_1,\cdots\beta_s$ 是 $Bx=0$ 的基础解系，因为 $Ax=0$ 均是 $Bx=0$ 的解，所以 $\alpha_1,\cdots,\alpha_t$ 必可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表出，又因 $\alpha_1,\cdots,\alpha_t$ 无关，故有 $t\leq s$
即 $t=n-r(A)\leq n-r(B)=s$ $\therefore r(A)\geq r(B)$ $\therefore$ (1)✓

>> 真题演练（2005 数三）

已知齐次方程

$$(\mathrm{I})\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0\\2x_1+3x_2+5x_3=0\\x_1+x_2+ax_3=0\end{cases}\quad 和(\mathrm{II})\begin{cases}x_1+bx_2+cx_3=0\\2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0\end{cases}$$

同解，求 a、b、c 的值.

[☺ kira提示：从原题中至少可以读出以下信息量 ① I 一定有非0解 因为方程数小于未知数个数；② 方程个数不同也可以同解，关键还是要看秩，即"有效方程个数"，即使列100个方程，秩为1的话，有效方程也只有一个；③ 证明同解用充要条件，即"将 $Ax=0$ 的解代入 $Bx=0$ 成立，将 $Bx=0$ 的解代入 $Ax=0$ 也成立"❗]

解：由(I)(II)同解 $\Rightarrow r(A)=r(B)\leq 2<3$ 所以 $|A|=0$

即 $\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&5\\1&1&a\end{vmatrix}=2-a=0 \quad\Rightarrow a=2$

此时(I)的系数矩阵化为 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&5\\1&1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$

$n-r(A)=1\Rightarrow k[-1,-1,1]^T$ 是(I)的通解，k不为0.

将 $(x_1, x_2, x_3)^T = (-k, -k, k)$ 代入(Ⅱ)

有 $\begin{cases} (-1-b+c)k=0 & ① \\ (-2-b^2+c+1)k=0 & ② \end{cases} \Rightarrow b^2-b=0$ 得 $b=1, c=2$ 或 $b=0, c=1$

(kira 备注：此时只证了(Ⅰ)的解都是(Ⅱ)的解，还需反回来验证是否(Ⅱ)的解都是(Ⅰ)的解)

当 $b=1, c=2$ 时，$B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

此时方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)同解 ← 有效方程一毛一样

当 $b=0, c=1$ 时，$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

此时(Ⅰ)与(Ⅱ)不同解 ← 秩不同

综上，当 $a=2, b=1, c=2$ 时，(Ⅰ)与(Ⅱ)同解.

—— 例12 ——

设A是 $m\times n$ 阶矩阵，证明齐次线性方程组(Ⅰ) $A^TAx=0$ 与(Ⅱ) $Ax=0$ 同解

[kira 提示：这是一道非常数学、非常高代的题，考研主要还是计算，而不是硬刚证明；就本题而言，证明同解，干两件事以搞定，一. 设α是(Ⅰ)的解，证代入(Ⅱ)成立；二.设α是(Ⅱ)的解证代入(Ⅰ)也成立]

证：如果α是(Ⅱ)的解，则 $A\alpha=0$ 显然 $A^TAx=0 \Rightarrow \alpha$ 是(Ⅰ)的解

(kira 备注：0 前面乘任何矩阵都是0)

如果α是(Ⅰ)的解，即 $A^TA\alpha=0$，那么 ← 翻到下页有解释

$$\alpha^TA^TA\alpha = \alpha\cdot 0 = 0 \quad 即 \ (A^T\alpha)^T(A\alpha)=0$$

即 $\|A\alpha\|^2=0$ 故 $A\alpha=0$ $\Rightarrow \alpha$ 是Ⅱ的解

所以(Ⅰ)与(Ⅱ)同解. (p.s. 内积 $\|A\alpha\|$ 下一部分讲) ☆

· BMDM ·

（😊 kira 朋友回顾：要证 α 是 $A\alpha=0$ 的解，就使劲凑 $A\alpha=0$
—— 有 $A^TA\alpha=0$ 离 $A\alpha=0$ 只一步之遥，乘上 α^T 就来到前面了。
把此题处理方式作为经验记住！）

▶ 4. 克拉默法则

（克拉默法则作为一个用于解方程组的非核心知识点，我决定把它拿到本篇讲解（而非行列式），我们已经学了解方程组最高效的方法即高斯消元法，整套思路成熟且成体系，再学克拉默法则作为补充即可）

必备常识 / 做题根基

一 必会性质定理

(1) 克拉默法则：若 n 个方程 n 个未知数的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

的系数行列式 $|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$

则方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{|A|},\ x_2=\frac{D_2}{|A|},\ \cdots,\ x_3=\frac{D_n}{|A|}$$

其中 $D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & \boxed{b_1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

（😊 D_i 即用 $(b_1,\cdots,b_n)^T$ 把 A 第 i 列换掉，再求行列式）

kira 备注：① 克拉默法则在以下题型中比高斯消元法好用
(a) 题目中指明求某个 x_i；(b) 可以大量构造 $D_i=0$（比如 $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 和 A 中某列

相同时）

解题套路

真题演练（1996）

设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$，$x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ 其中 $a_i \neq a_j$（$i \neq j$）（$i,j=1,2,\cdots,n$）

则线性方程组 $A^Tx=B$ 的解是________

（ Kira心路历程：拿到题第一眼看到范德蒙行列式，必然求 $|A|=\prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)\neq 0=|A^T|$ 直接出唯一解；再看 A^T 有 $\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}$ 列 $=B$，用克拉默法则计算即可）

解：由于 $|A^T|=|A|=\prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)\neq 0$，故 $A^Tx=B$ 有唯一解

由克拉默法则知 $A^Tx=B$ 的解

$x_1=\dfrac{D_1}{|A|}=\dfrac{|A|}{|A|}=1$ （$D_1=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=|A^T|$）B换第一列

当 $i=2,\cdots,n$，$x_i=\dfrac{D_i}{|A|}=\dfrac{0}{|A|}=0$ （$D_i=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & 1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & 1 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & 1 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=0$）B换第i列

所以唯一解为 $x=(1,0,\cdots,0)^T$

向量篇

- 线性表出、向量组等价
- 线性相关，线性无关
- 向量组的秩，极大无关组
- 向量空间（仅数一）

1. 线性表出、向量组等价

必备常识 / 做题根基

【1】术语（主要概念）

(1) 向量：n 个数 $a_1,\cdots,a_n$ 组成的有序数组

$\alpha=[a_1,\cdots,a_n]^T$ 或 $\alpha=[a_1,\cdots a_n]$ 称为 n 维向量

其中前者称为列向量，后者称为行向量

（kira 备注：①即向量写成行或列都对；②可把向量看成矩阵；）

(2) 向量组：由多个同型向量（维数相同且都为行向量或列向量）组成的集合称为向量组.

(3) 向量运算：设 n 维向量 $\alpha=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^T$，$\beta=[b_1,b_2,\cdots,b_n]^T$

- 向量加法：$\alpha+\beta=[a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n]^T$；
- 数乘向量：$k\alpha=[ka_1,\cdots,ka_n]^T$；
- 向量内积：$(\alpha,\beta)=\alpha^T\beta=\beta^T\alpha=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$.

> kira 备注：向量内积本质是两矩阵相乘，即 $[a_1,a_2,\cdots,a_n]\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\ \vdots \\b_n\end{bmatrix}$，我们在矩阵部分训练过 $[\cdots]\begin{bmatrix}\vdots\end{bmatrix}$ 看一眼就是一个数，对应元相乘再相加最后得一个数.

- 向量的长度（模）：$\|\alpha\|=\sqrt{\alpha^T\alpha}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots a_n^2}$

> kira 备注：即把 α 中每个分量平方相加，再开根号.

- 单位向量：长度为 1 的向量. $e=\frac{1}{\|\alpha\|}(a_1,\cdots,a_n)^T$ 为单位向量
- 向量正交：若 $(\alpha,\beta)=0$ 即 $a_1b_1+\cdots+a_nb_n=0$ 称 α 与 β 正交，记 $\alpha\perp\beta$.

$\boxed{\text{推论1}}$ $\alpha^T\alpha=0 \Leftrightarrow a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=0 \Leftrightarrow \alpha=0$

即“α 与自身正交当且仅当 α 是 0 向量”.

$\boxed{\text{推论2}}$ 0 向量与任何同型向量正交

★ (4) 线性组合：设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 是 n 维向量，$k_1,\cdots,k_s$ 是一组实数，称 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的线性组合.

★ (15) 线性表出：对 n 维向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 和 β，如存在实数 $k_1,\cdots,k_s$
使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=\beta$
则称 β 是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 的线性组合，或称 β 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出。

kira 备注：$k_1,\cdots,k_s$ 可以取 0，也可以都取 0，
$0\cdot\alpha_1+0\cdot\alpha_2+\cdots+0\cdot\alpha_s=\beta$ 也称 β 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出。

若无论 $k_1,\cdots,k_s$ 取何值恒有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s\neq\beta$，
则称为 β 不能由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出.（如 $\beta=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，$\alpha_2=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$）

(16) 向量组等价：设有两个向量组〈I〉$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$；〈II〉$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$；
如果(I)中每个向量 α_i $(i=1,2,\cdots,s)$ 都可由(II)中的向量 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 线性表出，则称向量组(I)可由向量组(II)线性表出.
如果(I)(II)这两个向量组可以互相线性表出，则称这两个向量组等价

(17)［对比］矩阵等价（背）：若矩阵 A 经过有限次初等变换变到矩阵 B，则称 A 与 B 等价，记作 $A\cong B$.

$\boxed{\text{矩阵 } A \text{ 与 } B \text{ 等价的充要条件}}$

$A\cong B\Leftrightarrow$
- A 经一系列初等变换化成 B.
- 存在若干初等阵 $P_1,\cdots,P_s$，$Q_1,\cdots Q_t$，使 $P_1\cdots P_sAQ_1\cdots Q_t=B$
- 存在可逆矩阵 P,Q，使 $PAQ=B$

$\boxed{\text{矩阵 } A \text{ 与 } B \text{ 等价的快速判定}}$

矩阵 A 与 B 等价 $\Leftrightarrow$ A 与 B 同型且 $r(A)=r(B)$
（kira 备注：即同型且秩相等马上出矩阵等价

2 必会定理性质（背）

(1) 线性表出的等价条件（紧密结合解方程组）
向量 β 可由向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出
$\Leftrightarrow$ 非齐次线性方程组 $[\alpha_1,\cdots,\alpha_s]\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\beta$ 有解 完全切合线性表出定义，品品～

$\Leftrightarrow$ 秩 $r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)=r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta)$ （向量组的秩后面说）

解题套路

● 常见题型依次如下：

(1) 判断向量 β（向量组 $\beta_1,\beta_2\cdots$）能否（何时）由向量组 $\alpha_1\cdots\alpha_s$ 线性表出

(2) 判断向量组 $\beta_1,\beta_2\cdots$ 是否（何时）与向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots$ 等价

【1】判断向量（组）能否（何时）由向量组 $\alpha_1\cdots\alpha_s$ 线性表出

（kira 提示：其实是一个纯粹的判 $Ax=b$ 解的问题，将向量竖过来写增广阵 (A,b)，根据“$Ax=b$ 是否有解”来判断“是否可线性表出”）

→ 真题演练（2011，数一二三）

设向量组 $\alpha_1=(1,0,1)^T$，$\alpha_2=(0,1,1)^T$，$\alpha_3=(1,3,5)^T$ 不能由向量组 $\beta_1=(1,1,1)^T$，$\beta_2=(1,2,3)^T$，$\beta_3=(3,4,a)^T$ 线性表示。

(1) 求 a 的值

(2) 将 β_1,β_2,β_3 用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示。

（kira 心路历程：① 不能表出则 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 无解 $r(B)<r(B,A)\le 3 \Rightarrow |B|=0$ 即求出 a（也可结合后面相关无关来分析；② (2) 问即求解非齐次线性方程组 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ 注意 由谁表示，谁来做系数矩阵）

解：(1) 因为 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&3\\1&1&5\end{vmatrix}=1\neq 0$ 所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 无关

由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 不能由 β_1,β_2,β_3 表示，所以 $r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$

$\Leftrightarrow \beta_1,\beta_2,\beta_3$ 线性相关

即 $|\beta_1,\beta_2,\beta_3|=\begin{vmatrix}1&1&3\\1&2&4\\1&3&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&3\\0&1&1\\0&2&a-3\end{vmatrix}=a-5=0 \quad \therefore a=5$

（kira 备注：此处为方便叙述，采用了线性相关和向量组秩的

角度来做，读者可学完向量再回来吸收，或使用"白kira心路方程"中的推导方式证 $|B|=0$）

(Ⅲ) 向量组 β_1,β_2,β_3 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，即对 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$B=[\beta_1,\beta_2,\beta_3]$ 有方程组 $Ax=B$ 有解。对增广矩阵行变换

$$(A\vdots B)=\begin{bmatrix}1&0&1&\vdots&1&1&3\\0&1&3&\vdots&1&2&4\\1&1&5&\vdots&1&3&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1&\vdots&1&1&3\\0&1&3&\vdots&1&2&4\\0&1&4&\vdots&0&2&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1&\vdots&1&1&3\\0&1&3&\vdots&1&2&4\\0&0&1&\vdots&-1&0&-2\end{bmatrix}$$

老朋友

$$\to\begin{bmatrix}1&0&0&\vdots&2&1&5\\0&1&0&\vdots&4&2&10\\0&0&1&\vdots&-1&0&-2\end{bmatrix}$$ 有唯一解向量组

$x_1=(2,4,-1)^T$，$x_2=(1,2,0)^T$，$x_3=(5,10,-2)^T$

即 $\beta_1=2\alpha_1+4\alpha_2-\alpha_3$，$\beta_2=\alpha_1+2\alpha_2$，$\beta_3=5\alpha_1+10\alpha_2-2\alpha_3$ ☆

——>> 真题演练（2004 数三）——

设 $\alpha_1=(1,2,0)^T$，$\alpha_2=(1,a+2,-3a)^T$，$\alpha_3=(-1,-b-2,a+2b)^T$，$\beta=(1,3,-3)^T$，试讨论 a,b 为何值时。

(Ⅰ) β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示

(Ⅱ) β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 唯一线性表示，并求出表示式

(Ⅲ) β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，但表示式不唯一，并求出表示式。

（白kira心路方程：啥也没说了，还能再露骨点吗……这就是上一章 $Ax=b$ 解的判定的另一套说辞）

解：设 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$，对增广矩阵 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)$ 初等行变换

有 $\bar{A}=\begin{bmatrix}1&1&-1&\vdots&1\\2&a+2&-b-2&\vdots&3\\0&-3a&a+2b&\vdots&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-1&\vdots&1\\0&a&-b&\vdots&1\\0&0&a-b&\vdots&0\end{bmatrix}$ ← 老规矩，进行解判定时化阶梯形即可

(Ⅰ) 当 $a=0$，b 为任意常数时

$(A,\beta)\to\begin{bmatrix}1&1&-1&\vdots&1\\0&0&-b&\vdots&1\\0&0&-b&\vdots&0\end{bmatrix}$，$r(A)<r(A,\beta)$，$Ax=\beta$ 无解

故 β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出。

抓无解从阶梯第一个元入手，即尝试 $a-b=0$ 和 $a=0$ 找特值方程

〈Ⅱ〉当 $a\neq 0$，$a-b\neq 0$ 时，$r(A)=3$，$Ax=\beta$ 有唯一解

$$(A,\beta)\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1-\frac{1}{a}\\0&1&0&\frac{1}{a}\\0&0&1&0\end{array}\right]$$

有唯一解，要让A满秩，即每一阶梯第一个数≠0

解为 $x=(1-\frac{1}{a},\frac{1}{a},0)^T$

故 $\beta=(1-\frac{1}{a})\alpha_1+\frac{1}{a}\alpha_2$

〈Ⅲ〉当 $a\neq 0$，$a-b=0$ 时

有无穷多解，最后一行必全为0，必有 $a-b=0$，再检查 $r(A)=r(A,\beta)$

$$(A,\beta)\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1-\frac{1}{a}\\0&1&-1&\frac{1}{a}\\0&0&0&0\end{array}\right]$$ ，$r(A)=r(A,\beta)=2<3$

$Ax=\beta$ 有无穷多解 $(1-\frac{1}{a},\frac{1}{a},0)+k(0,1,1)^T$

即有 $\beta=(1-\frac{1}{a})\alpha_1+(\frac{1}{a}+k)\alpha_2+k\alpha_3$，$k$ 为任意常数。

可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，且不唯一。

2 向量组等价、矩阵等价

——>> 真题演练（2013 数一二三）——

设 A,B,C 均为 n 阶矩阵，若 $AB=C$，且 B 可逆，则（ ）

(A) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价

(B) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价

(C) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价

(D) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 B 的列向量组等价.

（☺ Kira心路历程：看到 $AB=C$ 马上由我们熟悉的记忆写出 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)B=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)$ 这是 C 由 A 表出"列向量"

又 B 可逆，题目要判断等价，所以倒换一下 A 和 C 的位置

$CB^{-1}=A$，有 $(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)B=(\alpha_1,\cdots\alpha_n)$ 这是 A 由 C 表出"列"）

[分析] 对 A，C 分别按列分块，记 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，$C=(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)$

由 $AB=C$，有

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{bmatrix} b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\ b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{nn}\end{bmatrix}=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)$$

可见 $\begin{cases} \gamma_1=b_{11}\alpha_1+b_{21}\alpha_2+\cdots+b_{n1}\alpha_n\\ \gamma_2=b_{12}\alpha_1+b_{22}\alpha_2+\cdots+b_{2n}\alpha_n\\ \cdots\\ \gamma_n=b_{1n}\alpha_1+b_{2n}\alpha_2+\cdots+b_{nn}\alpha_n. \end{cases}$

即C的列向量组可以A的列向量组线性表出.
由B可逆有 $CB^{-1}=A$，类似地，A列向量组可由C列向量组线性表出. 选B.

——》真题演练(2003数四)——

设有向量组(I)：$\alpha_1=(1,0,2)^T$，$\alpha_2=(1,1,3)^T$，$\alpha_3=(1,-1,a+2)^T$
和向量组(II)：$\beta_1=(1,2,a+3)^T$，$\beta_2=(2,1,a+6)^T$，$\beta_3=(2,1,a+4)^T$
试问：当a为何值时(II)与(I)等价？当a为何值时，(II)与(I)不等价？

[😊 kira心路历程：①记(I)(II)等价，即证 $Ax=B$ 有解，$BX=A$ 也有解，即对 (A,B) 和 (B,A) 化阶梯形，讨论解的情况和a的取值
② 往往有(I)⇒(II)或(II)⇒(I)是天然成立的(考试来回让考生算两遍没意义)，当 $|A|\neq 0$ 时，$Ax=B$ 必有唯一解；当 $|B|\neq 0$，$BX=A$ 必有唯一解，用好这个！]

解：由于行列式 $|\beta_1,\beta_2,\beta_3|=\begin{vmatrix}1&2&2\\2&1&1\\a+3&a+6&a+4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&0\\2&1&0\\a+3&a+6&-2\end{vmatrix}=6\neq 0$

$\therefore \forall a$，三个方程组 $x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=\alpha_j\ (j=1,2,3)$ 恒有解
即 $\forall a$，向量组(I)均可由向量组(II)线性表出.

再对 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \mid \beta_1,\beta_2,\beta_3]$ 作初等变换，有

$$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \mid \beta_1,\beta_2,\beta_3]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&2&2\\0&1&-1&2&1&1\\2&3&a+2&a+3&a+6&a+4\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&2&2\\0&1&-1&2&1&1\\0&1&a&a+1&a+2&a\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&2&2\\0&1&-1&2&1&1\\0&0&a+1&a-1&a+1&a-1\end{array}\right]$$

∴当方程组无解时(II)不能由(I)线性表出，(I)与(II)不等价

此时有 $a+1=0$ 即 $a=-1$；

当方程组有解时(II)可以由(I)线性表出，(I)与(II)等价，

此时有 $a\neq -1$.

综上，$a\neq -1$ 时向量组(I)和(II)等价，$a=-1$ 时(I)(II)不等价。

—— 例15 ——

设n阶矩阵A与B等价，则必有（ ）

(A) 当 $|A|=a$ 时，$|B|=a$.　　(B) 当 $|A|=a(a\neq 0)$ 时，$|B|=-a$.

(C) 当 $|A|\neq 0$，$|B|\neq 0$　　(D) 当 $|A|=0$ 时，$|B|=0$.

原解析是按“充分条件”思路来给的，即问哪个选项可⇒A与B等价，此时选B

(kira心路历程：检查A和B是否同型(果然同型，都n阶)

只需再检查是否有 $r(A)=r(B)$；(A)(C)(D)都可能有 $|A|=|B|=0$，

不满秩则 $r(A)$ 和 $r(B)$ 一切皆有可能，都错；(B)有 $r(A)=r(B)=n$)

但本题应选D，问“A≌B⇒?”？显然有 $r(A)=r(B)$

当 $|A|=0$ 时，$r(A)=r(B)<n$

⇒ $|B|=0$ √　D正确

A,B,C不能确定 $|B|$ 的值

▶ 2. 线性相关、线性无关.

必备常识/做题根基

[1] 术语(主要概念)

(1) 线性相关：对n维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 如果存在不全为0的数

使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$，称 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，否则

称为线性无关（线性无关即 $k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=0$ 成立时当且仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$）

一些能直接观察出的向量组线性相关性!

① 含 0 向量的向量组必相关（例如 $\alpha_1=[1,1,1]^T$，$\alpha_2=[1,2,3]$，$\alpha_3=[0,0,0]^T$ 有 $0\alpha_1+0\alpha_2+\alpha_3=0\Rightarrow$ 相关）

② 含成比例向量的向量组必相关（例如 $\alpha_1=(1,2,3)^T$，$\alpha_2=(2,4,6)^T$，$\alpha_3=(3,8,3)^T$，有 $2\alpha_1-\alpha_2+0\cdot\alpha_3=0\Rightarrow$ 相关）

（至此，大家应当能觉察到，相关和线性表出，秩 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 和秩都有密切关系!）

（那么如何快速判断向量组是否线性相关呢？请体会，感知并内化以下定理）

$\boxed{2}$ 必会性质定理 体会 感知 内化

(1) 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关

$\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组 $[\alpha_1,\cdots,\alpha_s]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_s\end{bmatrix}=0$ 有非零解

$\Leftrightarrow$ 向量组的秩 $r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)<s$

kira 备注：① 向量组的秩我们引入极大无关组后再讲，此处可理解为矩阵"$(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$ 的列秩 $<s$"，即 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$ 列不满秩，有几列多余了 ② 以上充要条件我们看上面方框中的例子应当有所感知。

$\boxed{\text{推论1}}$ n 个 n 维向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性相关的充要条件是行列式

$$|\alpha_1,\cdots,\alpha_n|=0$$

（n 阶方阵就很方便~直接求行列式）

$\boxed{\text{推论2}}$ $n+1$ 个 n 维向量一定线性相关

（因为列秩不可能超过 n，至少有一列会消成 0）…

(2) 向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 中至少有一个向量是其余 $s-1$ 个向量的线性组合.（注意：正推反推都成立!）

kira 解读：即向量组中多了一个"可被替代"的多余

· BMDM ·

[▮ ▮ ▮] 每个人都不可替代 😊 无关　　我也可以被替代　　[▮ ▮ ▮] 它俩一合体就能把我替代　相关

向量(这个向量可以被其余向量线性表出)多它一个不多，少它一个不少，这样一个缩有余地的向量组，就是线性相关的；反之，如果向量组里任何一个向量都"不可替代"(每个向量都不能被其它向量线性表出)，说明这个向量组没有余地，每个向量都有用，则向量组线性无关。体会 感知

(3) 如果向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$的一个部分组线性相关，那么向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$也线性相关，反之如果$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$无关，那么它的任一部分组都无关。(原命题⟺逆否命题)

😊 Kira解读：向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$的部分组相关，说明部分组里有"多余向量"，这个"多余向量"也在$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$中，所以$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$相关。反之向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$无关说明其中每个向量都不可替代，部分组中的每个向量就更不可替代了。

$$\begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
部分相关 ⇒ 整体相关

$$\begin{array}{ccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
整体无关 ⇒ 部分无关

部分组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$相关，取$\alpha_3$为多余向量$\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$，则$\alpha_3$在$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$中依然很多余，因为它依然可以$\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2+\underbrace{0\cdot\alpha_4}_{=0}$被线性表出(能感觉出$\alpha_1,\cdots,\alpha_4$有"余地")

整个β_1,β_2,β_3无关，取部分组β_1,β_2还是无关，每个向量都有用，不可替代，没有"余地"

(4) 如果$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$无关，则它的延伸组$\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}\alpha_s\\ \beta_s\end{bmatrix}$也无关

反之如果$\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}\alpha_s\\ \beta_s\end{bmatrix}$相关，则它的缩短组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$相关(原命题⟺逆否命题)

😊 Kira解读：$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性无关，则无论对它们进行怎样

的花式线性组合，都不能出 $k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=0$（当 $k_1,\cdots,k_s$ 不全为0）
那我再添个后缀变成 $\begin{bmatrix}\alpha_1\\\beta_1\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}\alpha_s\\\beta_s\end{bmatrix}$ 有个卵用吗？并木有😉
我对 $\begin{bmatrix}\alpha_1\\\beta_1\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}\alpha_s\\\beta_s\end{bmatrix}$ 花式线性组合也出不来0，因为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 所在这几行永远化不出0，所以 $\begin{bmatrix}\alpha_1\\\beta_1\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}\alpha_s\\\beta_s\end{bmatrix}$ 整体也化不出0
涌上心头的心塞感……；反之，若 $\begin{bmatrix}\alpha_1\\\beta_1\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}\alpha_s\\\beta_s\end{bmatrix}$ 相关，
说明整体就有 $k_1\begin{bmatrix}\alpha_1\\\beta_1\end{bmatrix}+\cdots+k_s\begin{bmatrix}\alpha_s\\\beta_s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$（$k_1,\cdots,k_s$ 不全为0），
这当然建立在 $k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=0$ 之上啦，所以
无关 ⇒ 伸长无关　　相关 ⇒ 缩短相关

▲(5) 如果 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，$\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta$ 线性相关，
则 β 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出，且表示法唯一。（😊做题神器😉）
（备注：只是充分条件而已哦~）
（😊kira解读：即如果s个向量无关，再添一个后新向量组相关，那么新添那个向量可由原来的s个向量线性表出，且表示法唯一）

(6) 若向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_t$ 线性表出，且 $s>t$，则 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 线性相关（即如果多数向量能用少数向量线性表出那么多数向量一定线性相关）

😊kira解读：如果 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 无关的话，它有s个"不可替代"的向量，那当 $t<s$ 时，$\alpha_1,\cdots,\alpha_t$ 无法表出 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 因为t个数不够
所以只有当 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 相关，即其中有多余向量时，才有可能被更少的向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_t$ 表出

推论：
如果 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 无关，且它可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_t$ 表出，则 $s\le t$。

♡♡ 没啦~以上我帮大家较为形象地梳理了相关无关的各种定理，其实也不多😉能够合上书从头到尾背出是最好的（完全可以

办到！就像背政治和专业课那样～）一定一定要结合体会和感知，感受向量组中是否有多余的（可以消失的）向量，当然"死背公式＋多做题＝建立不假思索的反射"是最好的。学数学一定不能懒，成果与训练量成正比～所有的狗屎都是自己加的

解题套路

- 常见题型依次如下

(1) 判定具体向量组的线性相关性

(2) 判定抽象矩阵的线性相关性．

(3) 证明向量组线性无关

(4) 已知向量组的相关性，求未知参数 a / 判能否线性表出．

（提示：以下题型多有涉及向量组的秩，读者可先自行预热下节关于秩的内容，以便更好地理解使用秩的做法）

1 判定具体向量组的线性相关性

例 14

判定下列向量组的线性相关性．

〈Ⅰ〉 $\alpha_1=[-1,3,1]^T,\ \alpha_2=[2,1,0]^T,\ \alpha_3=[1,4,1]^T$

〈Ⅱ〉 $\beta_1=[a,1,b,0,0]^T,\ \beta_2=[c,0,d,6,0]^T,\ \beta_3=[a,0,c,5,6]^T$

kira 提示：给具体向量组判线性相关性有以下思路：

① 向量 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$ 刚好凑成方阵的（如本题），啥也甭说了，直接求行列式最快

② 向量矩阵不是方阵的话，由"$Ax=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow$ 相关"，则对 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$ 进行行变换，行满秩则无关，不满秩则相关．

解：〈Ⅰ〉 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=\begin{vmatrix}-1&2&1\\3&1&4\\1&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&2&1\\0&1&1\\0&0&0\end{vmatrix}=0$ 故相关 ※

(😊 kira备注：不管原题的 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 是行向量还是列向量，为方便起见，判相关做题时，全竖起来排成矩阵就可以了。
$[\alpha_1^T\ \alpha_2^T\ \alpha_3^T\cdots\alpha_s^T]$)

② (😊 kira心路历程：遇到这种特别长的向量，就应当考虑一下关于"延长组"的定理了，从中把无关的部分拿出来用)。

因为 $\begin{vmatrix}1&0&0\\0&6&5\\0&0&6\end{vmatrix}\neq0 \Rightarrow [1,0,0]^T,[0,6,0]^T,[0,5,6]^T$ 无关

$\Rightarrow$ 其延伸组 $[a,1,b,0,0]^T,[c,0,d,6,0]^T,[a,0,c,5,6]^T$ 无关

——>> 真题演练(2012 数一二三) ——

设 $\alpha_1=(0,0,c_1)^T,\alpha_2=(0,1,c_2)^T,\alpha_3=(1,-1,c_3)^T,\alpha_4=(-1,1,c_4)$

其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数，则下列向量组线性相关的为 ( )

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ (B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ (C) $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ (D) $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

(😊 kira心路历程：c_i 不确定所以先看前两个分量，要想3维向量相关，它们的二维缩短组必先相关，因此排除 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)$ 和 $(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ (因为缩短组任一向量都不能被另一个线性表出)，再验一下 C 选项 $|\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4|=0$ 即可)

[分析] n 个 n 维向量相关 $\Leftrightarrow |\alpha_1,\cdots,\alpha_n|=0$

显然 $|\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4|=\begin{vmatrix}0&1&-1\\0&-1&1\\c_1&c_3&c_4\end{vmatrix}=0\Rightarrow\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 相关

(😊 kira总结：已知具体向量组的相关性判定方法是容易的，关键在于提高观察速度，一眼看穿 $Ax=0$ 是否有非0解的能力)

(2) 判定抽象矩阵的线性相关性

★😊 先给一个非常好用的结论，直接用：

已知 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，若 β_1,β_2,β_3 可用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$

线性表出，设 $[\beta_1,\beta_2,\beta_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]C$

则 β_1,β_2,β_3 无关 $\Leftrightarrow |C|\neq 0$（即 C 可逆，C 满秩）

（用来处理"已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 无关判 β_1,β_2,β_3 相关性"题 简直大杀器）

——>> 真题演练（2005，数一二三）——

设 λ_1,λ_2 是矩阵 A 的两个不同特征值，对应的特征向量分别为 α_1,α_2，则 $\alpha_1,A(\alpha_1+\alpha_2)$ 线性无关的充要条件是（ ）

(A) $\lambda_1\neq 0$ (B) $\lambda_2\neq 0$ (C) $\lambda_1=0$ (D) $\lambda_2=0$

[kira 提示：此处用到特征值的知识，原题隐含以下两个条件 ① $A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1$，$A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2$ ② α_1 与 α_2 无关，用刚刚讲的结论]

[分析] 因为 $(\alpha_1,A(\alpha_1+\alpha_2))=(\alpha_1,\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{bmatrix}1&\lambda_1\\0&\lambda_2\end{bmatrix}$

因此 $(\alpha_1,A(\alpha_1+\alpha_2))$ 无关的充要条件为 $\begin{vmatrix}1&\lambda_1\\0&\lambda_2\end{vmatrix}\neq 0\Leftrightarrow\lambda_2\neq 0$。

（kira 备注：此法肯定是我判相关性的首选，逻辑通畅一气呵成！或用定义，设 $k_1\alpha_1+k_2A(\alpha_1+\alpha_2)=0$，即有 $(k_1+\lambda_1k_2)\alpha_1+\lambda_2k_2\alpha_2=0$，由 α_1,α_2 无关得 $\begin{cases}k_1+\lambda_1k_2=0\\\lambda_2k_2=0\end{cases}$ (*)

又 $k_1=0,k_2=0\Leftrightarrow\alpha_1,A(\alpha_1+\alpha_2)$ 无关 $\Leftrightarrow$ (*) 只有零解 $\Leftrightarrow\begin{vmatrix}1&\lambda_1\\0&\lambda_2\end{vmatrix}\Leftrightarrow\lambda_2\neq 0$

kira 扫盲：或许有些同学还是不适应用矩阵乘法来表示向量关系，我们来练习一下～比如将 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，$3\alpha_1-\alpha_3$，$\alpha_2$ 写成矩阵乘法形式。先把 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 拍出来，写好"$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)[\quad]$"

矩阵的第一列看第一个分量 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1\cdot\alpha_1+1\cdot\alpha_2+1\cdot\alpha_3=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

把 $(1,1,1)^T$ 写第一列，再依此类推 2、3 列，得到 $=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1&3&0\\1&0&1\\1&-1&0\end{bmatrix}$

可以感受一下，手感是非常顺滑的～！

（再练一道同类型题，实践并继续体会矩阵相乘法和定义法）

——例 15——

已知 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，证明 $3\alpha_1+2\alpha_2$，$\alpha_2-\alpha_3$，$4\alpha_3-5\alpha_1$ 线性无关

证：（法一 矩阵相乘法）$[\beta_1,\beta_2,\beta_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}3&0&-5\\2&1&0\\0&-1&4\end{bmatrix}$

因为 $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 22 \neq 0$ 且 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，

所以 $3\alpha_1+2\alpha_2$，$\alpha_2-\alpha_3$，$4\alpha_3-5\alpha_1$ 线性无关。 ※

（法二 定义法）

设 $k_1(3\alpha_1+2\alpha_2)+k_2(\alpha_2-\alpha_3)+k_3(4\alpha_3-5\alpha_1)=0$ ← 即证 $k_1=k_2=k_3=0$

即 $(3k_1-5k_3)\alpha_1+(2k_1+k_2)\alpha_2+(-k_2+4k_3)\alpha_3=0$ ← 打开括号，按已知无关的 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 重组

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 无关，有

$$\begin{cases} 3k_1-5k_3=0 \\ 2k_1+k_2=0 \\ -k_2+4k_3=0 \end{cases} \quad 因为 \begin{vmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 22 \neq 0$$

齐次方程组只有零解 $k_1=0$，$k_2=0$，$k_3=0$。

所以 $3\alpha_1+2\alpha_2$，$\alpha_2-\alpha_3$，$4\alpha_3-5\alpha_1$ 线性无关 ※

此外，化矩阵相乘还常会用到"$A=BC$，当 C 为可逆矩阵，$r(A)=r(B)$"这一结论。

>> 真题演练（2014 数一二三）

设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为3维向量，则对任意常数 k, l，向量组 $\alpha_1+k\alpha_3$，$\alpha_2+l\alpha_3$ 线性无关是向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关的（ ）

(A) 必要非充分条件　　(B) 充分非必要条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既非充分也非必要条件

（kira解析：看到 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合自然想矩阵相乘来证明。不过作为小题而言，直接取特值就可以秒杀了）

[分析] 取 $k=l=0$ 显然 α_1, α_2 线性无关是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 无关的必要非充分条件（kira扫盲：如何看充分必要呢？画箭头！充分 $\Rightarrow$ 必要　箭头尖指向的是"必要"，屁股对着"充分

α_1,α_2 线性无关 $\overset{\Rightarrow}{\Leftarrow}$ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 无关)
(必要不充分) (充分不必要)

详解：$(\beta_1,\beta_2)=(\alpha_1+k\alpha_3,\alpha_2+l\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\k&l\end{bmatrix}$

"$\Leftarrow$" $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 无关有 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 可逆，故 $r(\beta_1,\beta_2)=r\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\k&l\end{bmatrix}=2$

即 $\alpha_1+k\alpha_3$，$\alpha_2+l\alpha_3$ 无关.

"$\Rightarrow$" 反之设 α_1,α_2 无关，$\alpha_3=0$，则 $\forall k,l$ 有 $\alpha_1+k\alpha_3$，$\alpha_2+l\alpha_3$ 线性无关，但 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关

(☺ kira 提示：推"⇒"时是两向量无关 ⇒ 三向量可能相关，那就强行构造"3个相关向量，其中有两个不相关"即可.)

☺ 对于含向量个数较多的向量组，用矩阵相乘的方法比较吃力，此时首选定义和秩，并结合相关无关一系列判定定理来处理

—— >> 真题演练 (2006 数一二三) ——

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 均为 n 维列向量，A 是 $m\times n$ 矩阵，下列选项正确的是 ( )

(A) 若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，则 $A\alpha_1,\cdots,A\alpha_s$ 线性相关

(B) 若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，则 $A\alpha_1,\cdots,A\alpha_s$ 线性无关

(C) 若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，则 $A\alpha_1,\cdots,A\alpha_s$ 线性无关

(D) 若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，则 $A\alpha_1,\cdots,A\alpha_s$ 线性无关

(☺ kira 心路历程：简言之，这道题在比较 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 和 $A\alpha_1,\cdots,A\alpha_s$ 的秩与 s 的大小关系，若秩小的那组满秩，那秩大的必满秩；若秩大的不满秩，那秩小的也不满秩 (不是死背的，靠感知，感知！秩只能推这两种情况)；而 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 作为条件且秩大于 $A\alpha_1,\cdots,A\alpha_s$ 所以这是道"不满秩 ⇒ 不满秩"的题即"相关 ⇒ 相关" 选好了嘛 这段话我写得长~但思考起来是很快的)

〈法一〉

[分析] 利用分块矩阵有 $(A\alpha_1,\cdots,A\alpha_s)=A(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$

那么 $r(A\alpha_1,\cdots,A\alpha_s)\le r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$ 因为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 相关

有 $r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)<s\Rightarrow r(A\alpha_1,\cdots,A\alpha_s)<s$，故 $A\alpha_1,\cdots,A\alpha_s$ 相关 选(A)

〈法二〉(定义法心路历程不如秩好想，但可以借助一个常识——用A左乘 $k\alpha_1=0$ 不会改变k取值，也不会改变右端项为0这一事实)

设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 相关，故存在不全为0的数 $k_1,k_2\cdots k_s$ 使得

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$，从而有 $A(k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s)=A\cdot 0=0$

即 $k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2+\cdots+k_sA\alpha_s=0$，即有不全为0的 $k_1,\cdots,k_s$

使上式成立，说明 $A\alpha_1,\cdots,A\alpha_s$ 线性相关，选A.

〈法三〉(投机取巧法) 让 $A\alpha_1,\cdots A\alpha_s$ 相关是非常容易的.

直接令A为0. B和D没有机会；"$\alpha_1\cdots\alpha_s$ 无关，所有 $A\alpha_1,\cdots A\alpha_s$ 相关"

这句话你念一念就知道很不靠谱，A随便取个心怀满秩就是

"无关 ⇒ 无关"了，如令 $A=E$，所以C错. 选A.

例16

下列命题正确的是（　）

A. 若向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，则 α_1 可由 $\alpha_2,\cdots\alpha_s$ 线性表示

B. 若有不全为0的 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$，使 $\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_s\alpha_s+\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2+\cdots+\lambda_s\beta_s=0$ 成立，则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，$\beta_1,\cdots,\beta_s$ 线性相关

C. 若等式 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_s\alpha_s+\lambda_1\beta_1+\cdots+\lambda_s\beta_s=0$ 仅在 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_s$ 时成立，则 $\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_s+\beta_s$ 线性无关

D. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，$\beta_1,\cdots,\beta_s$ 亦线性相关，则存在不全为0的数 $\lambda_1,\cdots\lambda_s$ 使 $\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_s\alpha_s=0$ 和 $\lambda_1\beta_1+\cdots+\lambda_s\beta_s=0$ 同时成立.

(☺kira心路历程：这道读完立刻选完 so easy! A和B说白了一句话——"乱点鸳鸯谱"，我们说过相关是至少有某一个向量"多余"了，那个向量是谁？看不出来，不一定是(A)的 α_1，…

· BMDM ·

也不一定是(B)中$(\alpha_1,\cdots\alpha_s)$中的成员。 C是线性无关定义,组起来$\lambda_1(\alpha_1+\beta_1)+\lambda_2(\alpha_2+\beta_2)+\cdots+\lambda_s(\alpha_s+\beta_s)=0$ 即可. D太绝对了.
随便举个例子① $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ 相关 ② $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ 相关, ② 得到0的线性组合只能是 $k\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}-k\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$. $\forall k\neq 0$. 但$(k,k,-k)$永远无法把①变成0, 例子太多随便举. 总而言之, 当我们谈论相关时, 我们在谈论"某一"而不是"任意" ^_^)

—— 真题演练 (2004 数一二三) ——

设A,B为满足AB=0的任意两个非零矩阵,则必有 ( )

(A) A的列向量组线性相关, B的行向量组线性相关.

(B) A的列向量组线性相关, B的列向量组线性相关.

(C) A的行向量组线性相关, B的列向量组线性相关.

(D) A的行向量组线性相关, B的列向量组线性相关.

(^_^ kira提示: ① 首先要注意一般性,不要用n阶方阵讨论这个问题 取 $A_{m\times n}, B_{n\times s}$; ② 最直接的方法是回忆,没吃过猪肉,咱见过猪跑 ^_^, 线性表出(方程组有解)我们是这么拆的 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)B=O_{m\times s}$ 所以A用列向量组, 而对于B肯定要颠倒过来试 $A\begin{bmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_n\end{bmatrix}=O_{m\times s}$; ③ 比较高级的做法是用秩, AB=0 肯定都不满秩, 再区分不满的是列秩还是行秩即可; ④ 小题还可以举特例 ~)

[分析] <法一> 由 $AB=0\Rightarrow(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1s}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2s}\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{ns}\end{bmatrix}=0$

$$\Rightarrow\begin{cases}b_{11}\alpha_1+b_{21}\alpha_2+\cdots+b_{n1}\alpha_n=0\\b_{12}\alpha_1+b_{22}\alpha_2+\cdots+b_{n2}\alpha_n=0\\b_{1s}\alpha_1+b_{2s}\alpha_2+\cdots+b_{ns}\alpha_n=0\end{cases}$$

因为 $B\neq 0$ 所以必然有一组不全为0的 $b_{i1},\cdots,b_{is}$ 可得 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 相关.

(^_^ kira备注: 看着写起来繁琐, 道理很浅白很素朴 ^_^)

同理 $\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1\\\vdots\\\beta_s\end{bmatrix}=0$.

$\Rightarrow \begin{cases} a_{11}\beta_1+\cdots+a_{1n}\beta_s=0 \\ \vdots \\ a_{m1}\beta_1+\cdots+a_{mn}\beta_s=0 \end{cases}$ 因为A≠0，所以必然有一组不全为0的 $c_{i1},\cdots,c_{in}$ 可推 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 相关. ※

〈法二〉设A为 $m\times n$ 矩阵，B为 $n\times s$ 矩阵，$AB=0\Rightarrow r(A)+r(B)\le n$.

$\begin{cases} A\neq 0\Rightarrow r(A)\geq 1 \\ B\neq 0\Rightarrow r(B)\geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1\le r(A)<n \\ 1\le r(B)<n \end{cases}$ ← $\boxed{\text{这套推理很常用，当作常识和经验}}$

（kira备注：关键词"n"，n是A的列和B的行，决定了A列不满秩，B行不满秩）

得 $r(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)<n$，$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是A的列向量

$r(\beta_1,\cdots,\beta_n)^T<n$，$\beta_1,\cdots,\beta_n$ 是B的行向量

即A列向量相关，B行向量相关 ※

〈法三〉设 $A=(1,0)$，$B=(0,1)^T$ 有 $AB=0$，但A列向量组相关，B行向量组相关，只能选A. ※

kira总结：①此种题型到此告一段落，方法和思考角度基本就这些，感知非常重要，与其说"背定理"不如说"感知定理"，然后具体问题具体分析 ②头脑中可以随时调用些 $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 这样的向量，用特例拿下小题.

(3) 证明向量组线性无关.

（kira提示：证明线性无关是很数学的一种题型，高等代数必考题，对于考研来说证明题的考频还是很低的；定义法是通法（可适当结合反证法）用定义来证逻辑是非常通顺的，对于个别简化题型，可采用之前讲过的化矩阵相乘等方法）

例17

设A是n阶矩阵，α 是n维列向量，若 $A^{m-1}\alpha\neq 0$，$A^m\alpha=0$，证明向量组 $\alpha, A\alpha, A^2\alpha, \cdots, A^{m-1}\alpha$ 线性无关.

（kira心路历程：要证谁无关，就把谁的线性组合式摆上，然后对k的取值具体问题具体分析）

设 $k_1\alpha+k_2A\alpha+k_3A^2\alpha+\cdots+k_mA^{m-1}\alpha=0$ (*)

kira心路历程：原题 $A^{m-1}\alpha\neq0$，$A^m\alpha=0$，暗示了如果左乘"大量A"即 A^m，会出0项，如果左乘"适当多的A"，这项会保留下来，而仅留一项时，k必为0

由于 $A^m\alpha=0$ 知 $A^{m+1}\alpha=0$，$A^{m+2}\alpha=0$，…

用 A^{m-1} 左乘(*)两端，有 $k_1A^{m-1}\alpha=0$，因为 $A^{m-1}\alpha\neq0$ $\therefore k_1=0$

同理用 A^{m-2} 左乘上式，可知 $k_2A^{m-1}\alpha=0$ $\therefore k_2=0$

类似可得 $k_3=0$，…，$k_m=0$ 从而 $\alpha, A\alpha, \cdots, A^{m-1}\alpha$ 线性无关

kira锦囊：有 $A\alpha_i=0$，$A\alpha_j\neq0$（方程解的题目，用矩阵左乘，会得到大量0，从而拿到系数 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$（请以下一例作为经验运用。属于难度较大的题）

>> 真题演练（1996 数二）

设向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_t$ 是齐次方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，向量 β 不是方程组 $Ax=0$ 的解，即 $A\beta\neq0$，试证明：向量组 $\beta, \beta+\alpha_1, \beta+\alpha_2, \cdots, \beta+\alpha_t$ 线性无关

（kira心路历程：看到 $A\beta\neq0$ 不是太明显了哦！必然要用A左乘了！）

证：设有一组数 $k, k_1, k_2, \cdots, k_t$ 使得

$$k\beta+k_1(\beta+\alpha_1)+k_2(\beta+\alpha_2)+\cdots+k_t(\beta+\alpha_t)=0 \quad (*)$$

则因 $\alpha_1,\cdots,\alpha_t$ 是 $Ax=0$ 的解，知 $A\alpha_i=0$（$i=1,2,\cdots,t$）

用A左乘(*)两端有 $(k+k_1+k_2+\cdots+k_t)A\beta=0$

因为 $A\beta\neq0$ 所以 $k+k_1+\cdots+k_t=0$ (**) ← 得到结论赶紧回代！别憋着！

▲ 把(**)代入(*)，重新合组后有

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_t\alpha_t=0$$

因为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_t$ 是基础解系，它们线性无关，故必有

$k_1=0$，$k_2=0$，…，$k_t=0$ 代入(*)有 $k=0$

因此向量组 $\beta, \beta+\alpha_1, \cdots, \beta+\alpha_t$ 线性无关. ※

(😊 Kira总结：求k是个漫长的过程，要学会不断左乘A，不断回代出求出的 $k=0$，不断充分利用条件，直到全部k为0，请将以上例子认真掌握，再不断去习题中实践)

④ 已知向量组的相关性，求参数/判能否线性表出

(😊 Kira提示：依然结合好之前带大家感知过的那6个定理，根据不同题设灵活处理)

例18

若 $\alpha_1=[1,3,4,-2]^T, \alpha_2=[2,1,3,t]^T, \alpha_3=[3,-1,2,0]^T$ 线性相关，则 $t=$ ___.

(😊 Kira心路历程：给具体向量竖着排成矩阵，做行变换使 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)<3$ 即可（$Ax=0$ 有非0解）；$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 非方阵，不能求 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|$，否则直接令行列式加最为方便)

解：系数矩阵 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&1&-1\\4&3&2\\-2&t&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&6-2(t+4)\\0&0&0\end{bmatrix}$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关 $\Leftrightarrow (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)x=0$ 有非零解

$\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)<3$ 即 $6-2(t+4)=0 \Rightarrow t=-1$ ※

>> 真题演练 (1998 数四)

若向量组 α,β,γ 线性无关；α,β,δ 线性相关，则

(A) α 必可由 β,γ,δ 线性表示. (B) β 必不可由 α,γ,δ 线性表示.

(C) δ 必可由 α,β,γ 线性表示. (D) δ 必不可由 α,β,γ 线性表示.

(😊 Kira心路历程：相关组比无关组多了一个 δ，说明 α,β 都不可少，而 δ "多余"（定理5），γ 直接变 $0\cdot\gamma$，所以选C. 一眼就出来了)

[分析] α,β,γ 无关 $\Rightarrow \alpha,\beta$ 无关，又 α,β,δ 相关.　　选C

所以 δ 可由 α,β 线性表示，所以 δ 可由 α,β,γ 线性表示. ※

· BMDM ·

——>> 真题演练（1992 数一）——

设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关，向量组 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关。
问 (1) α_1 能否由 α_2, α_3 线性表出？证明你的结论
(2) α_4 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出？证明你的结论。

（kira 心路历程：这种题目我个人倾向于用相关无关的定理和定义来做，对用秩相对无感，此处只讲我自己的方法，大家可以借鉴其它真题书学更多方法）

[分析] (1) $\because \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 无关 $\Rightarrow \alpha_2, \alpha_3$ 无关，又因为 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1$ 相关
所以 α_1 可以由 α_2, α_3 线性表出。
（太熟练了！这一套真的是太熟练了！倒背如流！）

(2) （kira 心路历程：肯定不能啊，α_4 与 α_2 和 α_3 无关，α_1 又可以换成 α_2 和 α_3，那 α_4 和它们全还是无关）

[反证] 假设 $\alpha_4 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$
由(1)设 $\alpha_1 = l_1\alpha_2 + l_2\alpha_3$，得 $\alpha_4 = (k_1l_2 + k_2)\alpha_2 + (k_1l_3 + k_3)\alpha_3$
即 α_4 可以由 α_2 和 α_3 表出，与题设矛盾。
因此 α_4 不能由 α_2 和 α_3 表出。

kira 提示：①不少同学到这儿又糟了，要注意我们设 k_1, k_2, k_3, l_1, l_2 时它们都可以取 0 的，这是线性表出不是线性无关，不要走错片场！ ②反证法处理无法表出时很好用。

3. 向量组的秩、极大无关组

必备常识 / 做题根基

[1] 术语（主要概念）

(1) 极大线性无关组：在向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 中，如存在 r 个向量 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性无关，再加进任一个向量 α_j ($j=1,2,\cdots,s$) 向量组 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r},\alpha_j$ 就线性相关，则称 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 是向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 的一个极大线性无关组。

（Kira 解读：说白了，s 个向量中最多有 r 个不可代替，必不可少，剩下的都"多余"，可以被替代）

(2) 向量组的秩：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的极大线性无关组中所含向量的个数 r 称为这个向量组的秩。

（注：零向量组成的向量组，没有极大线性无关组，规定秩为0）

举例

向量组 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\alpha_4=\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix},\alpha_5=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$ 中，

α_1,α_2 线性无关，再添任一 α_j，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_j$ 必相关。

所以 α_1,α_2 是 $\alpha_1,\cdots\alpha_5$ 的一个极大无关组。

向量组的秩为 2.

（Kira 备注：① 可见要求向量组的秩，先确定极大无关组。② 只要有 α_1,α_2 在，$\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 就显得多余了（它们不再能为这个向量组提供更多"信息"）；③ 显然，极大无关组不唯一，比如 α_1 和 α_4 也完全可以胜任，但极大无关组包含向量的个数是恒定的，也就是说，向量组的秩是恒定的）

[2] 必会定理性质

(1) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_t$ 线性表出，则 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\le r(\beta_1,\cdots,\beta_s)$

（Kira 解读：即 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的极大线性无关组（设为 A_0）可由 $\beta_1,\cdots\beta_t$ 的极大线性无关组（设为 B_0）表出，则有 $r(A_0)\le r(B_0)$ 即 $(\beta_1,\cdots\beta_t)$ 的极大线性无关组含向量个数不少于 $r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$ 自然 $r(\beta_1,\cdots,\beta_t)$ 不小于 $r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$ 这是极大无关组的良好传递性质）

$\boxed{推论}$ 如果(I)(II)是两个等价向量组，则 $r(I)=r(II)$
(😊 kira复习：所谓等价向量组，即(I)可由(II)线性表出，(II)也可由(I)线性表出)

(2) 矩阵A的秩 $r(A)$ (即非零子式的最高阶数)
即等于其行向量组的秩，也等于其列向量组的秩.
有★ $r(A)=A$ 的行秩 $=A$ 的列秩
★ 初等变换不改变矩阵、向量组的秩
(😊 不论行变换或列变换都不改变)
· 向量组等价 $\not\Leftarrow$ 秩相等

(3) 任一向量组与自己的极大线性无关组等价.
$\boxed{推论}$ ① 向量组的任意两个极大线性无关组等价.
② 等价向量组的极大无关组等价.

(4) 向量组任意两个极大无关组所含的向量个数相等.

$\boxed{3}$ 必会计算套路

▶ 求向量组的极大无关组 (轻取 😊 非常好玩)

例19
写出下列向量组的秩，极大线性无关组，并用极大线性无关组表示其余向量.

$\alpha_1=[2,1,4,3]^T$, $\alpha_2=[-1,1,-6,6]^T$, $\alpha_3=[-1,-2,2,-9]^T$
$\alpha_4=[1,1,-2,7]^T$, $\alpha_5=[2,4,4,9]^T$

解: $\boxed{Step 1}$ 将所有向量以列向量形式组成矩阵 (竖着写)

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{Step 2}}$ 对矩阵进行初等行变换化为阶梯形

$$\to \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \end{matrix} \end{array}$$

非零行行数即为向量组秩
$r(\alpha_1, \dots, \alpha_5) = 3$

$\boxed{\text{Step 3}}$ 从每一个台阶上任取1列组合得到极大无关组

	第一台阶	第二台阶	第三台阶
极大无关组为	α_1	α_2(或α_3)	α_4(或α_5)

即极大无关组为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 或 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$ 或 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 或 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5$

▶ 用极大无关组表示其他向量(接上方)

$\boxed{\text{Step 4}}$ 用观察法写出其他向量关于极大无关组的表达式

(kira 备注: 自下而上自左而右)

$$\underset{\alpha_3}{\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} = (-1) \cdot \underset{\alpha_2}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} + (-1) \underset{\alpha_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

显然第二台阶的α_3只需用第1、2台阶的α_1, α_2表示.

α_3第2行的-1只可能来自α_2的第2行,因为α_1第2行=0

α_2给第一行提供了-1,还需α_1再提供-1 所以系数取1.

即 $\alpha_3 = -\alpha_1 - \alpha_2$

同理,由观察法 $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = (-3) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

即 $\alpha_5 = 4\alpha_1 + 3\alpha_2 - 3\alpha_4$

以下完整给出上述例题的卷面标准答案
(见下一页)

解：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{bmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$

所以向量组的秩为3. 极大线性无关组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 或 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$ 或 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 或 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_5$.

不妨取 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$

由 $\begin{bmatrix}-2\\-1\\0\\0\end{bmatrix}=(-1)\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+(-1)\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}4\\0\\-3\\0\end{bmatrix}=(-3)\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$

有 $\alpha_3=-\alpha_1-\alpha_2$, $\alpha_5=4\alpha_1+3\alpha_2-3\alpha_4$ ※

解题套路

● 常见题型依次如下.（大题考察较少）

(1) 求向量组的秩.

(2) 极大线性无关组与线性相关结合出题.

(3) 用极大无关组证明向量组线性表出.

(4) 用列向量组的秩证明矩阵的秩（结合解向量的秩）

Ⅰ 求向量组的秩

>> 真题演练（2017数一三）

设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{bmatrix}$, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为线性无关的三维列向量,

则向量组 $A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3$ 的秩为________

（😀 Kira心路历程：我有100种方法做这道题…你也有…

讲道理，只有A能求秩啊亲，把 $r(A)$ 一求就万事ok了.

下面我们逻辑严明地来推一下～没有任何新东西，都做过）

解：$(A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3) = A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

因为三维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 无关，所以矩阵 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 可逆

于是 $r(A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3) = r(A)$

又 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = 2 \Rightarrow r(A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3) = 2$.

kiro备注：数学最重要是每一步有理有据"$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是三维列向量"这个条件看似不起眼，实则很关键。只有方阵才可逆，只有C可逆才有"$A = BC \Rightarrow r(A) = r(B)$"，一环扣一环。这道题很容易就可以蒙对，但如果你每一步都如此有理有据能站住脚，我敢打包票，你做题将战无不胜！

四 极大线性无关组与线性相关结合出题

→ 真题演练（2006 数三四）

设四维向量组 $\alpha_1 = [1+a, 1, 1, 1]^T$，$\alpha_2 = [2, 2+a, 2, 2]^T$，$\alpha_3 = [3, 3, 3+a, 3]^T$，$\alpha_4 = [4, 4, 4, 4+a]^T$，问 a 为何值时，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关？当 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关时求一个极大无关组，并将其余向量用该极大线性无关组线性表出。

（kira心路历程：① 4个4维向量，很爽，可以直接写行列式。② 相关 $\Leftrightarrow Ax=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow r(A)<4$ ③ 求极大无关组刚做了一套，ok！）

解：记 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$，则 $|A| = \begin{vmatrix} 1+a & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+a & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+a & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+a \end{vmatrix} = (a+10)a^3$

（记 $\begin{vmatrix} a+10 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & & & \\ a+10 & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$）

当 $a=-10$ 或 0 时，$|A|=0$，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关。

① 当 $a=0$ 时显然 α_1 为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个极大线性无关组

且 $\alpha_2 = 2\alpha_1$，$\alpha_3 = 3\alpha_1$，$\alpha_4 = 4\alpha_1$

② 当 $a=-10$，对A作初等行变换有

$$A=\begin{bmatrix}-9&2&3&4\\1&-8&3&4\\1&2&-7&4\\1&2&3&6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-9&2&3&4\\10&-10&0&0\\10&0&-10&0\\10&0&0&-10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&-1&0&0\\1&0&-1&0\\1&0&0&-1\end{bmatrix}$$

由 $\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}0\\-1\\0\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\0\\-1\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\0\\0\\-1\end{bmatrix}$ 所以 $\alpha_1=-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4$． ※

5] 用极大无关组证明向量组之间的线性表出

例 20

已知向量组 (Ⅰ): $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与 (Ⅱ): $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t$ 有相同的秩，证明 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出.

(Kira 心路历程: ① 首先看到 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 同时出现在 (Ⅰ) 和 (Ⅱ) 中说明两向量组同型，这时我们一切讨论的前提；② "秩"这一抽象概念完全可以具象化为极大无关组，在两个不同向量组之间传递，这是我觉得极大无关组十分亲切的原因.)

证明: 由于 (Ⅰ) 和 (Ⅱ) 有相同的秩，因此它们极大无关组所含向量个数相同，设 $\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir}$ 是向量组 (Ⅰ) 的极大线性无关组，显然 $\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir}$ 也是 (Ⅱ) 中的 r 个线性无关的向量

又因为 $r(\text{Ⅰ})=r(\text{Ⅱ})=r$，所以 $\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{ir}$ 也是 (Ⅱ) 的极大线性无关组，因此 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 可以由 $\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{ir}$ 线性表出，即有 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出

Kira 备注: ① 最后一步只需将线性无关组之外的 α_j 取 0 即可 ② 我想，大概很多同学面对证明题都是道理都懂，也能"感知"其中的逻辑，就是下不去笔．为什么?

因为你没有认真积累素材，换言之，我建议你背诵默写证明题的标准答案，学习答案如何设，如何推，如何把抽象的逻辑用扎实的定理和数学语言叙述出来。想自己会证明，先背诵默写证明，像背诵英语作文那样，像背诵政治简答那样，记住，数学是一门语言，你是怎么学会写英语作文的，你就可以怎么学会写证明。③第一次遇到证明不会不是你的错，我们都不是天才，巧妙的方法不好想，但我们可以学，再见到类似题，就会证了。我还是那句话，考试考的是经验。

[4] 用到向量组的秩证明矩阵的秩（结合解向量的秩）

例21

设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times s$ 矩阵，若 $AB=0$，证 $r(A)+r(B)\le n$.

（Kira心路历程：看到 $AB=0$，马上条件反射出两件事——① B 的列向量是方程 $Ax=0$ 的解 ② 秩 $r(A)+r(B)\le n$，作为常识记住使用，此题用① ⇒ ②）

证：对矩阵 B 按列分块，记 $B=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s]$，则

$AB=A[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s]=[A\beta_1,A\beta_2,\cdots,A\beta_s]=[0,0,\cdots,0]$

于是 $A\beta_j=0\quad(j=1,2,\cdots,s)$

即 B 的列向量均是齐次方程组 $Ax=0$ 的解，由于方程组 $Ax=0$ 解向量的秩为 $n-r(A)$ $\Rightarrow r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)\le n-r(A)$

又 $r(\beta_1,\cdots,\beta_s)=r(B)$，从而有 $r(A)+r(B)\le n$.

Kira备注：拿到题怎么想？A 是系数矩阵，B 是解向量，解方程基础解系部分讲反过 $r(A)$ 和 n（基础解系）的关系，即无关解向量个数为 $n-r(A)$，结论呼之欲出～

·BMDM·

4. 向量空间（仅数学一）

必备常识 / 做题根基

【1】术语（主要概念）

自行翻译成老朋友：向量组极大无关组，秩

(1) 向量空间：设 V 是 n 维向量构成的非空集合，且 V 对于向量的加法和数乘两种运算封闭（即 V 中向量做加法和数乘运算得到的新向量仍在 V 中），则 V 为向量空间．（本质上，向量空间是一个向量组 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$）

(2) 基：向量空间的极大无关组（本质上基是向量组 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 的极大无关组）

(3) 维数：基包括向量的个数（本质上，是 $r(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$）

(4) 坐标：设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是 n 维向量空间 V 的一个基，对任一元素 $\alpha\in V$，总有且仅有一组数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 使 $\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n$．

$(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 称为 α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标．

(5) 基变换，过渡矩阵与坐标变换公式：设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 都是 n 维向量空间 V 的基，且

$$\begin{cases}\beta_1=a_{11}\alpha_1+a_{21}\alpha_2+\cdots+a_{n1}\alpha_n\\ \beta_2=a_{12}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+\cdots+a_{n2}\alpha_n\\ \cdots\\ \beta_n=a_{1n}\alpha_1+a_{2n}\alpha_2+\cdots+a_{nn}\alpha_n\end{cases} \quad ①$$

即 $$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \cdots&&&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)C \quad ②$$

称 C 为基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵.

① 或 ② 称为基变换公式

(kira备注: $(\beta_1,\cdots,\beta_n)$ 写左边, $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 写右边, 用 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 来线性表出 $(\beta_1,\cdots,\beta_n)$ 称为"基 $\alpha\rightarrow$ 基 β"的过渡矩阵, 逻辑很通顺, 别写反了...)

坐标变换公式: 设 $\alpha\in V$, α 在基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标为 $(x_1,\cdots,x_n)^T$ 在基 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 下的坐标为 $(y_1,\cdots,y_n)^T$, 且 $(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)C$ (C 是从基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵), 则

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix} \quad 或 \quad \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=C^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

(6) 正交基及规范正交基.

向量空间的一组基, 如果其中的向量两两正交, 就称为正交基; 若正交基中每个向量都是单位向量, 就称其为规范正交基.

(施密特正交化法 数一二三均有要求, 在第三轮特征值特征向量部分作详细讲解)

kira提示: 考向量空间考的就是概念, 所以一定不要混淆, 尤其是向量维数和空间维数, 例如

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\quad \alpha_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$ 是3维向量 (分有3个分量)

但由 α_1 和 α_2 生成的向量空间 $L(\alpha_1,\alpha_2)$ 是2维向量空间 (秩为2)

解题套路

◎ 常见题型如下.

(1) 求过渡矩阵.

(2) 向量空间维数问题

(3) 向量空间综合大题（例如 2015(20) 可后期留作练习）

[1] 求过渡矩阵

（😊 化向量组为矩阵乘法，老朋友~）

—— >> 真题演练（2009）——

设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 3 维向量空间 R^3 的一组基，则由基 $\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_2,\frac{1}{3}\alpha_3$ 到基 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 的过渡矩阵为

(A) $\begin{bmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}1&2&0\\0&2&3\\1&0&3\end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{6}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&\frac{1}{6}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{6}\end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\end{bmatrix}$

（😊 kira 心路历程：「抄题时间比解题时间久系列」……）

解 $(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1)=(\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_2,\frac{1}{3}\alpha_3)\begin{bmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{bmatrix}$ 选A

先写好[ ]，然后一列列观察，填数

[2] 向量空间维数问题

—— >> 真题演练（2010）——

设 $\alpha_1=(1,2,-1,0)^T$，$\alpha_2=(1,1,0,2)^T$，$\alpha_3=(2,1,1,a)^T$，若由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 生成的向量空间的维数为 2，则 $a=$ ___

（😊 kira 心路历程：即 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$，这要拿即可送分题）

解：由向量空间维数是 2 $\Rightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&1&1\\-1&0&1\\0&2&a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&3\\0&0&a-6\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow a=6$$

满分第三轮——

特征值特征向量、二次型

Kira前言:

近十年真题中，本九年年贡献(至少)一道大题和若干道小题，其地位之高不言而喻。毕竟，在考察特征值、相似对角化、二次型等知识点的同时，也考察了行列式、矩阵、向量和解方程组的熟练度，可以说浓缩了线代全部的精华，含金量极高，一道顶十道~

特征值 & 特征向量篇

特征值、特征向量

相似 $A\sim B$，对角化 $A\sim\Lambda$

实对称矩阵

▶ 1. 特征值、特征向量

必备常识 / 做题根基

1 术语(主要概念)

(1) 特征值和特征向量：设 A 为 n 阶矩阵，若存在常数 λ 和非零 n 维向量 α，使 $\boxed{A\alpha=\lambda\alpha}$，则称 λ 为 A 的特征值，α 是 A 的属于 λ 的特征向量。(Kira备注：λ 不一定是实数。)

(2) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$ 称为 A 的特征多项式。

(Kira备注：特征多项式 $|\lambda E-A|$ 乍一看是行列式，是"数"，其实化开了就是我们做题常用的 $(\lambda-2)(\lambda+3)$ 和 $\lambda^3+\lambda^2+1$ 等关于 λ 的多项式。)

2 必会定理性质（背）

- (1) n阶矩阵有n个特征值，任一特征值都有无穷多特征向量；
  若$x_1, x_2, \cdots, x_n$都是A属于λ的特征向量，则$k_1x_1+\cdots+k_sx_s$也是A属于λ的特征向量（$k_1, \cdots, k_s$不全为0）

（kira备注：即$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$的非0线性组合仍是λ的特征向量）

★(2) 不同特征值的特征向量线性无关.

★(3) k重特征值至多有k个线性无关的特征向量.

（kira备注：① "k重特征值有k个无关特征向量"，说白了就是$(\lambda E-A)x=0$的基础解系有k个无关向量，再说白了就是对$\lambda E-A$行变换，最终能化出k个0行。比如λ_0是2重特征值，则矩阵$(\lambda_0 E-A)_{3\times3}$可能化出1个0行（仅1个无关特征向量），可能化出2个0行（至多2个无关特征向量）；② 每个特征值当然有无穷多个特征向量，但其中线性无关的最多只能找到k个（再多一个就相关了））

★(4) 设n阶矩阵A的n个特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$则

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} & \text{①（其中}\sum_{i=1}^{n} a_{ii}=tr(A)\text{"A的迹"，即A主对角元之和）} \\ \prod_{i=1}^{n}\lambda_i = |A| & \text{②} \end{cases}$$

（kira备注：① 不需要对A做任何处理，$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$一定等于$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$
② 式在求$|A|$中非常常用，当A不满秩时，显然有特征值为0.）

★(5) 设$f(x)$为任意多项式，则$f(A)=0 \Rightarrow f(\lambda)=0$.（λ为A的任一特征值）

例如：已知 $A^2+A=0 \Rightarrow \lambda^2+\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-1$ 或 0

（😊 kira备注：$f(A)=0$ 说明A的每个λ都满足 $f(\lambda)=0$，但λ不一定能取到 $f(\lambda)=0$ 的所有根，以上例为例 A的特征值可能全为 -1，可能全为0，也可能有0有1，具体要根据题中条件来分析）

★(6) 设 $f(x)$ 为任意多项式，则 $f(A)\alpha=f(\lambda)\alpha$，$f(A^{-1})\alpha=f(\frac{1}{\lambda})\alpha$，如 $(A^2+A)\alpha=(\lambda^2+\lambda)\alpha$（其中 $A\alpha=\lambda\alpha$）

★(7) 背下这个表格（高频考点题）⬇

矩阵	A	$kA+E$	kA	A^k	A^{-1}	A^*	$P^{-1}AP$	$f(A)$
特征值	λ	$k\lambda+1$	$k\lambda$	λ^k	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\|A\|}{\lambda}$	λ	$f(\lambda)$
特征向量	α	α	α	α	α	α	$P^{-1}\alpha$	α

例如

3阶矩阵A的特征值为 1, 2, 3，求下列矩阵特征值（口算）

① $A+2E$：3, 4, 5；② A^{-1}：$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$；

③ A^2+E：$1^2+1, 2^2+1, 3^2+1$；④ $(A^*+E)^2=(\frac{6}{1}+1)^2, (\frac{6}{2}+1)^2, (\frac{6}{3}+1)^2$

其中 $|A|=\prod_{i=1}^{3}\lambda_i=1\times2\times3=6$（活学活用！）

» 真题演练（2015. 数二、三）

设3阶矩阵A的特征值为 $2,-2,1$，$B=A^2-A+E$，其中E为3阶单位矩阵，则 $|B|=$ ____.

简解：

$B=A^2-A+E$ 的特征值为 $2^2-2+1, (-2)^2-(-2)+1, 1^2-1+1$

即为 3, 7, 1 $\therefore |B|=3\times7\times1=21$ ※

（😊 kira备注：由表格中 $f(A)$ 的特征值为 $f(\lambda)$，所以 A^2-A+E 的特征值直接写 $\lambda^2-\lambda+1$ 就可以啦！）

3 必考计算套路

▶ 求矩阵A的特征值和特征向量（多为3阶矩阵A）

例

求矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&-2&2\\-3&1&3\end{bmatrix}$ 的特征值与特征向量.

Step 1 解方程 $|\lambda E-A|=0$ 得到特征值.(直接代入，不要动A)

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&1\\-1&\lambda+2&-2\\3&-1&\lambda-3\end{vmatrix}$$

← (主对角线变 $\lambda-a_{ii}$ 其余元全部变号即可~)

打洞

$$=\begin{vmatrix}\lambda-4&0&4-\lambda\\-1&\lambda+2&-2\\3&-1&\lambda-3\end{vmatrix}$$

← (技巧：寻找这样的两行(列) ①作差后消出0，如◌所示 ②同时出现成比例的2个含λ的元，如 $4-\lambda$ 和 $\lambda-4$)

$$=\begin{vmatrix}\lambda-4&0&\boxed{0}\\-1&\lambda+2&-3\\3&-1&\lambda\end{vmatrix}$$

← (利用成比例，果断再消1个0)

$$=(\lambda-4)((\lambda+2)\lambda-3)$$ ← (按第一行展开)

$$=(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda+3)=0$$

得到矩阵A的特征值是 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=4$，$\lambda_3=-3$

Step 2 将每一个λ代入 $(\lambda E-A)X=0$ 求出对应特征向量

① 当 $\lambda=1$ 时，由 $(E-A)X=0$，即

$$\begin{bmatrix}0&-1&1\\-1&3&-2\\3&-1&-2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&-3&2\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

kira操作：此处互换并处理前两行，并直接把最后一行全打成0

得基础解系：

$\alpha_1=(1,1,1)^T$

大Tip 此处是永乐大帝的神来之笔，非常好用 原理

如下：首先，$\lambda=1$是二重根，故$r(E-A)\geq 2$（基础解系至多有一个无关向量；又因为$(E-A)x=0$必有解，故$r(E-A)<3$；所以$r(E-A)$只能等于2，所以行变换后必然会出一个0行。

索性在一开始就直接把不好算（不喜欢）的行全写成0。这样处理绝不会影响最终的基础解系，请放心使用，非常省力！

② 当$\lambda=4$时，由$(4E-A)x=0$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 6 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -6 & 2 \\ 0 & 17 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

此处不方便化行最简，直接用眼看着代入求解就好。由第二行马上出$(x_1, 5, 17)$代入第一行有$x_1=-4$

得基础解系$\alpha_2=(-4,5,17)^T$

③ 当$\lambda=-3$时，由$(-3E-A)x=0$

$$\begin{bmatrix} -4 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & -6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得基础解系$\alpha_3=(1,-3,1)^T$

step 3 将基础解系写成特征向量（即乘k）

所以矩阵A关于特征值1，4，-3的特征向量分别是$k_1\alpha_1$，$k_2\alpha_2$，$k_3\alpha_3$，其中k_1，k_2，k_3全不为0。

解题套路

◎ 常见题型依次如下：

1. 已知数字型矩阵A，求A的特征值和特征向量。
2. 已知A的特征向量，求A中未知参数a（反求A）
3. 由$f(A)=0$，求A的特征值

4. 由 $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)B$ 确定A的特征值、向量

5. 由A的特征值求各种 $f(A)$（比如 A^*+E）的特征值

6. 利用解的结构求A的特征值和特征向量

I 已知数字型矩阵A，求A的特征值和特征向量

下面我们来看一些特殊矩阵A

I. 上三角 下三角 对角

求矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\&2&2\\&&3\end{bmatrix}$ 的特征值与特征向量

解：由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1\\0&\lambda-2&-2\\0&0&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)=0$

得A的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$

[▲ kira 说法：上三角，下三角，对角矩阵的特征值为主对角线上的元素～直接喊：1，2，3 ！]

II. 当 $r(A)=1$，即A各行(列)成比例

求矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&1&3\\4&2&6\\6&3&9\end{bmatrix}$ 的特征值与特征向量

解：由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-3\\-4&\lambda-2&-6\\-6&-3&\lambda-9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&0\\-4&\lambda-2&-3\lambda\\-6&-3&\lambda\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&0\\-22&\lambda-11&0\\-6&-3&\lambda\end{vmatrix}=\lambda|\lambda^2-13\lambda|=0.$

得到矩阵A的特征值为 $\lambda_1=13,\lambda_2=\lambda_3=0$.

当 $\lambda=13$ 时，由 $(13E-A)X=0$，即

$$\begin{bmatrix}11&-1&-3\\-4&11&-6\\-6&-3&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&7&-5\\-4&11&-6\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&7&-5\\0&3&-2\\0&0&0\end{bmatrix}$$

得基础解系 $\alpha_1=[1,2,3]^T$，因此属于 $\lambda=13$ 的特征向量是 $k_1\alpha_1$ $(k_1\neq0)$

当$\lambda=0$时，由$(0\cdot E-A)x=0$ 即

$$\begin{bmatrix}-2&-1&-3\\-4&-2&-6\\-6&-3&-9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&1&3\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

得基础解系$\alpha_2=[-1,2,0]^T$，$\alpha_3=[-3,0,2]^T$

因此属于$\lambda=0$的特征向量为$k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$ （k_2,k_3不全为0）

[▲ kira总结：秩为1的矩阵A特征值为$\lambda_1=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$，$\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=0$，即有一个特征值为$tr(A)$（即A的主对角元之和），其余$n-1$个特征值均为0～

直接喊：2+2+9，0，0 !]

Ⅲ. 当A呈 $\begin{bmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{bmatrix}$ 型，即主对角元一个数其余元一个数

• 求矩阵$A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$的全部特征值.

两种套路：

〈法一〉行列式功底

解：由$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}\xlongequal[\text{第一行}]{\text{全部加到}}\begin{vmatrix}\lambda-5&\lambda-5&\lambda-5\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}$

$=(\lambda-5)\begin{vmatrix}1&1&1\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}\xlongequal[\text{马上消光}]{\text{大量-2}}(\lambda-5)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&\lambda+1&0\\0&0&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-5)(\lambda+1)^2=0$

所以A的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=-1$，$\lambda_3=5$.

〈法二〉背特征值表格功底 ←_←

解：$A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1&&\\&-1&\\&&-1\end{bmatrix}\triangleq B-E$

全写成b　　必有kE

其中B的特征值为（直接喊!）2+2+2，0，0 !

所以 $B-E$ 的特征值为 $5,-1,-1$

② 已知 A 的特征向量，求 A 中未知参数 a（反求 A）

（kira Tip：从定义 $A\alpha=\lambda\alpha$ 下手）

>> 真题演练（2017 数二 14）

设矩阵 $A=\begin{bmatrix}4&1&-2\\1&2&a\\3&1&-1\end{bmatrix}$ 的一个特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，则 $a=$ ____

解：由 $A\alpha=\lambda\alpha$，α 非零向量，有

$$\underbrace{\begin{bmatrix}4&1&-2\\1&2&a\\3&1&-1\end{bmatrix}}_{A}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}}_{\alpha}=\underbrace{\lambda}_{\lambda}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}}_{\alpha}\quad 即\quad \begin{bmatrix}1\\3+2a\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda\\\lambda\\2\lambda\end{bmatrix}$$

从而 $3+2a=1$ 解得 $a=-1$

>> 真题演练（1995，4）

设三阶矩阵 A 满足 $A\alpha_i=i\alpha_i$ $(i=1,2,3)$，其中列向量 $\alpha_1=[1,2,2]^T$，$\alpha_2=[2,-2,1]^T$，$\alpha_3=[-2,-1,2]^T$ 试求 A.

解：

由 $A\alpha_1=\alpha_1$，$A\alpha_2=2\alpha_2$，$A\alpha_3=3\alpha_3$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 无关，

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 分别是特征值 $1,2,3$ 的特征向量，有

$A[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=[\alpha_1,2\alpha_2,3\alpha_3]$，由 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$ 可逆

故 $A=[\alpha_1,2\alpha_2,3\alpha_3][\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]^{-1}$

$$=\begin{bmatrix}1&4&-6\\2&-4&-3\\2&2&6\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&-2&1\\-2&-1&2\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}7&0&-2\\0&5&-2\\-2&-2&6\end{bmatrix}$$

[kira总结：求出3个特征值和3个特征向量，直接利用 $A[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=[k_1\alpha_1,k_2\alpha_2,k_3\alpha_3]$ 马上好啦]

3 由 $f(A)=0$ 求A的特征值 （即 P106 必会性质(5)）

>> 真题演练（2010 数一三 6）

设A为4阶实对称矩阵，且 $A^2+A=0$，若A的秩为3，则A相似于（　）

(A) $\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{bmatrix}$

解：由 $A^2+A=0 \Rightarrow \lambda^2+\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-1$ 或 0

即A的特征值只能取0或-1.

因为A为4阶实对称阵，所以 $A\sim\Lambda$（后面讲）

因为 $r(A)=3$，所以A的特征值只能是 $-1,-1,-1,0$

选(D)

【 kira总结：用好 $f(A)=0 \Rightarrow f(\lambda)=0$（P106 (5)仔细读备注）】

4 用 $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)B$ 确定A的特征值、特征向量

（ kira Tip：

遇到下面这种题子，不管三七二十一，化 $A(\alpha_1,\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{bmatrix}\square&\square\\\square&\square\end{bmatrix}$

绝对万无一失，包成功包速度～注：用到相似 ）

>> 真题演练（2008 数一 13）

设A为2阶矩阵，α_1,α_2 为线性无关的2维列向量，$A\alpha_1=0$，$A\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2$，则A的非零特征值为___.

解：$A(\alpha_1,\alpha_2)=(0,2\alpha_1+\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{bmatrix}0&2\\0&1\end{bmatrix}$

$0=0\cdot\alpha_1+0\cdot\alpha_2$，才把0,0竖起来写第1列：$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

$=2\cdot\alpha_1+\alpha_2$，才把2,1竖起来写第2列：$\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$

→ 拼成 $\begin{bmatrix}0&2\\0&1\end{bmatrix}$

（ kira表示：这套写法非常顺手，我超喜欢～ ）

·BMDM·

令 $B=\begin{bmatrix}0&2\\0&1\end{bmatrix}$，$P=(\alpha_1,\alpha_2)$ $\Rightarrow P^{-1}AP=B$ 即 $A\sim\begin{bmatrix}0&2\\0&1\end{bmatrix}$

所以A的特征值为 0，1 ∴填 <u>1</u> ☆

进一步求特征向量

因为 $B=\begin{bmatrix}0&2\\0&1\end{bmatrix}$ 关于0，1的特征向量分别是 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

又因为 $(P^{-1}AP)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\Rightarrow AP\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=0\cdot P\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 即 $A\alpha_1=0\cdot\alpha_1$

$\boxed{\text{即 } B\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}$ $\boxed{P=(\alpha_1,\alpha_2)}$

同理 $P^{-1}AP\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\Rightarrow AP\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=1\cdot P\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ 即 $A(2\alpha_1+\alpha_2)=2\alpha_1+\alpha_2$

所以A关于特征值0，1的特征向量分别为 $k_1\alpha_1$ 和 $k_2(2\alpha_1+\alpha_2)$ ☆

kira备注：

以上过程看似繁琐，实则当作结论记住套用即可，即

当 $P^{-1}AP=B$ 时 $\begin{cases}\text{若}B\text{的特征向量是}\alpha,\text{则}A\text{对应特征向量}P\alpha\\\text{若}A\text{的特征向量是}\alpha,\text{则}B\text{对应特征向量}P^{-1}\alpha\end{cases}$

（自己找规律背，很好背！我稍加观察就记住了！）

〈法二〉用定义（不一定稳）

由 $A\alpha_1=0=0\cdot\alpha_1$，$A(2\alpha_1+\alpha_2)=A\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2$

（kira备注：拿着右边形式往左边括号里硬填……）

知矩阵A的特征值是0和1，特征向量是 $k_1\alpha_1$ 和 $k_2(2\alpha_1+\alpha_2)$，k_1，k_2 全不为0. ☆

5 由A的特征值求各种f(A)的特征值（送分题）

>> 真题演练（2015 数二三）

设3阶矩阵A的特征值为2，-2，1，$B=A^2-A+E$，其中E为3阶单位矩阵，则行列式 $|B|=$____

解：A的特征值为2，-2，1 $\Rightarrow A^2-A+E$ 的特征值为

2^2-2+1，$(-2)^2-(-2)+1$，1^2-1+1，即3，7，1

$\Rightarrow |B|=3\times7\times1=21$ （非常无聊～） ☆

>> 真题演练（2003 数一）

设 $A=\begin{bmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{bmatrix}$，$P=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，$B=P^{-1}A^*P$，

求 $B+2E$ 的特征值与特征向量，其中 A^* 为 A 的伴随矩阵，E 为 3 阶单位矩阵

解：

step1 先求A的λ和α

∵ 由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&-2\\-2&\lambda-3&-2\\-2&-2&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-7)(\lambda-1)^2=0$

所以矩阵 A 的特征值 $\lambda_1=7$，$\lambda_2=\lambda_3=1$

当 $\lambda=7$ 时 A 的特征向量为 $\alpha_1=[1,1,1]^T$ （过程略）

当 $\lambda=1$ 时特征向量可取为 $\alpha_2=[-1,1,0]^T$，$\alpha_3=[-1,0,1]^T$

又 $|A|=7\times1\times1=7$

step2 求A*的λ和α

∴ A^* 的特征值为 $\frac{|A|}{\lambda_i}$ 即 $1,7,7$ ← 表格5列

对应特征向量为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$

step3 求B+2E的λ和α

∴ $B+2E=P^{-1}A^*P+2E$ 的特征值为 $1+2,7+2,7+2$ 即 $3,9,9$

由 B 关于 $\frac{|A|}{\lambda}$ 的特征向量是 $P^{-1}\alpha$ ← 表格6列

有 $(B+2E)(P^{-1}\alpha)=(\frac{|A|}{\lambda}+2)(P^{-1}\alpha)$

所以 $B+2E$ 关于特征值 $\frac{|A|}{\lambda}+2$ 的特征向量是 $P^{-1}\alpha$

求得 $P^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，有

$$P^{-1}\alpha_1=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

∴ $B+2E$ 属于 $\lambda=3$ 的特征向量为 $k_1(0,1,1)^T$，$k_1\neq0$

类似地，有 $P^{-1}\alpha_2=(1,-1,0)^T$，$P^{-1}\alpha_3=(-1,-1,1)^T$

∴ $B+2E$ 属于 $\lambda=9$ 的特征向量为

$$k_2\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}，\quad k_2,k_3 \text{ 不全为 } 0. \quad ※$$

（☺ kira 备注：同一特征值的特征向量最终要整合成 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$ 这种线性组合形式。）

· BMDM ·

(kira 补充：① 本题还可以求出 A^* 和 P^{-1}，死算～
② P107 表格大题小题都直接拿来使用，不必证明。)

6 利用解的结构求A的特征值和特征向量

例1

已知 A 是3阶矩阵，如果非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有通解 $5b+k_1\eta_1+k_2\eta_2$，求A的特征值和特征向量。

解：(kira 马上发现公式) 由解的结构

$$\begin{cases} A(5b)=b & \leftarrow \boxed{Ax=b \text{ 的特解 } 5b} \\ A\eta_1=0 \\ A\eta_2=0 \end{cases} \leftarrow \boxed{Ax=0 \text{ 的解 } \eta_1 \text{ 和 } \eta_2}$$

(朝 $Ax=\lambda x$ 化) $\Rightarrow \begin{cases} Ab=\frac{1}{5}b \\ A\eta_1=0\cdot\eta_1 \\ A\eta_2=0\cdot\eta_2 \end{cases}$ $\Rightarrow$ b 是 $\lambda=\frac{1}{5}$ 的特征向量，η_1,η_2 是 $\lambda=0$ 的无关特征向量

$\Rightarrow$ A的特征值是 $\frac{1}{5},0,0$。

特征向量是 k_3b，$k_1\eta_1+k_2\eta_2$ ($k_3\neq0$，k_1,k_2 不全为0)

Ⅱ. 相似 ($A\sim B$)，相似对角化 ($A\sim\Lambda$)

必备常识 / 做题根基

1 术语 (主要概念)

★(1) 相似矩阵：设 A 和 B 为 n阶方阵，如果存在可逆矩阵P，使 $P^{-1}AP=B$，则称A与B相似，记为 $A\sim B$ (相似必等价)

(2) 相似对角化 (说白了就是找一个与A相似的对角阵Λ)

n阶矩阵若与对角阵Λ相似，则称 A 可以相似对角化，记为 $A\sim\Lambda$，并称Λ是A的相似标准形。

2 必会定理性质（达到拿张白纸能默写的水准）

① 相似的性质

第一组
$$\begin{cases} ① \text{对}\forall n\text{阶矩阵}A,\text{有}A\sim A \\ ② A\sim B \Rightarrow B\sim A \\ ③ A\sim B, B\sim C \Rightarrow A\sim C \end{cases}$$

（Kira备注：③常这么用—— $A\sim\Lambda, B\sim\Lambda \Rightarrow A\sim B$）

第二组 $A\sim B \Rightarrow \begin{cases} ① f(A)\sim f(B)，\text{其中}f(x)\text{为多项式，如}A^2+A\sim B^2+B \\ ② A^T\sim B^T \quad \Leftarrow ((P^{-1}AP)^T=B^T) \\ ③ A^{-1}\sim B^{-1}，\text{若}A\text{可逆} \Leftarrow (P^{-1}A^{-1}P=B^{-1}) \end{cases}$

第三组 $A\sim B \Rightarrow \begin{cases} ① |A|=|B| \\ ② r(A)=r(B) \\ ③ |\lambda E-A|=|\lambda E-B|，\text{即}A\text{和}B\text{特征值相同} \\ ④ tr(A)=tr(B) \end{cases}$

（一脸默4个行不行?!）
（必须行!!!）

Kira备注：以上结论反推不成立。
经典反例：$A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$
A、B满足：$|A|=|B|$，特征值相同，$tr(A)=tr(B)$
但A和B不相似（$r(A)\neq r(B)$ 肯定A与B不相似）

② $A\sim\Lambda$（A可对角化）的充要条件和充分条件

充要条件（这三句话说半天其实一个意思，满足其中之一即有$A\sim\Lambda$）

$$A\sim\Lambda \begin{cases} \Leftrightarrow A\text{有}n\text{个线性无关的特征向量} \\ \Leftrightarrow \text{对}A\text{的每个}k_i\text{重特征值}\lambda_i，\text{必有}k_i\text{个无关特征向量} \\ \Leftrightarrow r(\lambda_i E-A)=n-k_i \end{cases}$$

☺ kira举例解释：

也就是说 如果矩阵A的特征值为3,3,1 且 $A\sim\Lambda$：

⇒ 二重特征值3 一定有2个无关特征向量.

▲ $3E-A$ 的秩一定是1（即有2行为0）$\begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

（kira透露：做题主要用这一句，把多重特征值的 $\lambda E-A$ 写出来，可对角化的话，秩一定为"$n-\lambda$的重数".）

反过来，如果矩阵A的特征值为3,3,1

且二重特征值3有2个无关特征向量.

即 $3E-A$ 的秩是1（即有2行为0）$\begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

⇒ $A\sim\Lambda$. A可相似对角化.

◇◇ kira戳穿：

所以，A能否相似于Λ，关键取决于A的多重特征值.

只要多重特征值λ的 $r(\lambda E-A)$ 等于 $n-$"λ的重数"，

（直白一点，$(\lambda E-A)$ 行变换后可以得到"λ重数"个0行

比如"二重特征值λ的 $(\lambda E-A)$ 矩阵可化出2个0行"）

可立即推 $A\sim\Lambda$，而完全不必考虑单特征值（一重特征值）

因为对于单特征值而言，以上3个充要条件恒成立

● 充分条件

① A有n个不同的特征值 ⇒ $A\sim\Lambda$

② A是实对称矩阵 ⇒ $A\sim\Lambda$（高级）

③ 对角阵Λ的优点：

(i) $\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$；(ii) $\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^n \end{bmatrix}$；

(五) $\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\lambda_1} & & \\ & \frac{1}{\lambda_2} & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{\lambda_n}\end{bmatrix}$

即求行列式 $|\Lambda|$ 方便，求n次方 Λ^n 方便，求逆 Λ^{-1} 方便

3) 必考计算套路

▶ 相似对角化计算，求 Λ 和 P （已知3阶 - A）

step1 求 A 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

step2. 求对应特征向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

step3. 可逆阵 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}$$

（ kira备注：将3个特征向量排成 P，3个特征值排成 Λ，注意 λ_i 和 α_i 要对应起来，顺序一致 ）

→ 真题演练（2015 数一二三）

设矩阵 $A = \begin{pmatrix}0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a\end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $B = \begin{pmatrix}1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$

(1) 求 a, b 的值

(2) 求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵。

解：(1) 由 $tr(A) = tr(B) \Rightarrow 3 + a = b + 2$ ①

由 $|A| = |B| \Rightarrow 2a - 3 = b$ ②

解得 $a = 4$, $b = 5$

（ kira点拨：已知 A~B 求未知参数 a 和 b，两个未知数需要两个方程，马上调用 P117 我们会默的公式们 显然 $tr(A) = tr(B)$ 和 $|A| = |B|$ 算起来最快～优先考虑）

例> $A=\begin{bmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&4\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&5&0\\0&3&1\end{bmatrix}$

step 1 求A的特征值

$$|\lambda E-A|=|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&0\\0&\lambda-5&0\\0&-3&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-5)=0$$

(Kira提示：既然给了 A~B，就好好利用，快速选取计算量最小的方案～)

step 2 求A的特征向量（p.s. 只求P的话，α前就不必乘k了）

当$\lambda_1=\lambda_2=1$时

$$A-E=\begin{bmatrix}-1&2&-3\\-1&2&-3\\1&-2&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

得线性无关的特征向量$\alpha_1=(2,1,0)^T$，$\alpha_2=(-3,0,1)^T$

当$\lambda_3=5$时

$$A-5E=\begin{bmatrix}-5&2&-3\\-1&-2&-3\\1&-2&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

得线性无关的特征向量$\alpha_3=(1,1,-1)^T$

step 3 写出P和Λ

令$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$\Lambda=\begin{array}{c}\begin{matrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\end{matrix}\\\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&5\end{bmatrix}\end{array}$，则有$P^{-1}AP=\Lambda$.

按一定顺序码好$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　把特征值按与P一致的顺序写好

解题套路

● 常见题型依次如下：

1. 利用相似的必要条件相关问题；

2. 判断两矩阵是否相似；证明两矩阵相似；

3. 判断矩阵能否相似对角化。(判断 $A\sim\Lambda$?)

4. 已知 $A\sim\Lambda$，反求A的参数 / 求 $|A|$ / $r(A)$ ...

5. 求 A^n

四 利用相似的必要条件

>> 真题演练 (2016 数一二三)

设A, B是可逆矩阵，且A与B相似，则下列结论错误的是

(A) A^T 与 B^T 相似　　(B) A^{-1} 与 B^{-1} 相似

(C) $A+A^T$ 与 $B+B^T$ 相似　　(D) $A+A^{-1}$ 与 $B+B^{-1}$ 相似

Kiki解析:

(A)和(B)是默写很的，显然对。C和D用定义来推

由 $A\sim B \Rightarrow \exists$ 可逆 P，使 $P^{-1}AP=B$

$\boxed{\text{选项A}}$ ∵ $B^T=(P^{-1}AP)^T=P^TA^T(P^{-1})^T=P^TA^T(P^T)^{-1}$ (可逆阵为 $(P^T)^{-1}$)

$\boxed{\text{选项B}}$ $B^{-1}=(P^{-1}AP)^{-1}=P^{-1}A^{-1}(P^{-1})^{-1}=P^{-1}A^{-1}P$ (可逆阵为 P)

$\boxed{\text{选项C}}$ ∵ $B+B^{-1}=P^{-1}AP+P^{-1}A^{-1}P=P^{-1}(A+A^{-1})P$ (可以共用 P)

$\boxed{\text{选项D}}$ 而 $B+B^T$ 中 B 和 B^T 各自可逆阵不一致，无法推出相似

>> 真题演练 (2009 数二 14)

设 α,β 为3维列向量，β^T 为 β 的转置，若 $\alpha\beta^T$ 相似于 $\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，

则 $\beta^T\alpha=$ ______

(Kiki解析：由矩阵部分的知识，$\beta^T\alpha=tr(\alpha\beta^T)=2+0+0=2$
看到 $\beta^T\alpha$ 和 $\alpha\beta^T$ 马上想到迹的关系，而 $A\sim B$ 也有 $tr(A)=tr(B)$
秒出答案~)

例2

若3阶矩阵A相似于B，矩阵A的特征值是1,2,3，

那么 $|2B-E|=$ ____.

Kira解析： • $A\sim B \Rightarrow$ B的特征值为1,2,3.

$\Rightarrow 2B-E$ 的特征值为1,3,5

$\Rightarrow |2B-E|=15$

或 • $A\sim B \Rightarrow 2B-E \sim 2A-E$

而 $2A-E$ 的特征值为1,3,5

$\Rightarrow |2B-E|=|2A-E|=15.$ ☆

[2] 判断矩阵相似/证明两矩阵相似

>> 真题演练(2013. 数一二三)

矩阵 $\begin{bmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ 相似的充分必要条件为

(A) $a=0, b=2$　　(B) $a=0$, b为任意常数

(C) $a=2, b=0$　　(D) $a=2$, b为任意常数.

Kira Tip：做该类题目推出 $A\sim B$，99%的题目都使用 $A\sim\Lambda$，且 $B\sim\Lambda$ 这一套路，只要A,B都可对角化，且有相同的特征值Λ即大功告成.

[分析] 显然 $\begin{bmatrix}2&&\\&b&\\&&0\end{bmatrix}$ 已对角化且特征值为2,b,0

$\begin{bmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{bmatrix}$ 为实对称矩阵 $\Rightarrow$ 可相似对角化

(后面讲)

又 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-a&-1\\-a&\lambda-b&-a\\-1&-a&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda[(\lambda-2)(\lambda-b)-2a^2] \xlongequal[\lambda=0,2,b]{\text{由相似(推成立)}} \lambda(\lambda-2)(\lambda-b)$

显然 $a=0$，b 为任意常数，选 B ※

>> 真题演练（2014 数一二三）

证明 n 阶矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{bmatrix}$

证：（完全按照上一页 kira tip 来走

设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{bmatrix}$

下面分别求矩阵 A 和 B 的特征值与特征向量

证 $A\sim\Lambda$

$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \lambda-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda-n)\lambda^{n-1}$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1=n$，$\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=0$

因为 A 是实对称矩阵，所以可以相似对角化 $A\sim\begin{bmatrix} n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$

证 $B\sim\Lambda$

$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & \lambda & \cdots & -2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda-n \end{vmatrix}=(\lambda-n)\lambda^{n-1}$

即 B 的 n 个特征值为 $\lambda_1=n$，$\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=0$

对于 $(n-1)$ 重特征值 0，$r(0E-B)=r(-B)=1$

所以 B 一定可以相似对角化，$B\sim\begin{bmatrix} n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$

所以 $A\sim B$ ※

（kira 再强调：

① 证相似三步走：$A\sim\Lambda \rightarrow B\sim\Lambda \rightarrow A\sim B$! so easy !

② 看能否对角化只抓多重特征值即可，比如抓 B 的 $n-1$ 重特征值出来看，$\lambda E-B$ 秩为 1（能化 $n-1$ 个 0 行），所以 $B\sim\Lambda$.）

例3

在下列矩阵中，

$A=\begin{bmatrix}3&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}3&2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}2&3&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，$D=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&2\\0&0&3\end{bmatrix}$

两两相似的矩阵是________

Kira解析：

先排除明显不相似的（判"不相似"用$\boxed{\text{第三组}}$性质，即必要条件 $|A|=|B|$，$tr(A)=tr(B)$ 等），不满足必要条件的肯定不相似：$r(B)=2$，不可能与A, C, D相似；

$tr(C)=2$，而 $tr(A)=tr(D)=3$ 排除C；

所以 两两相似的是 A和D OK!

再证明一下（又是 $A\sim\Lambda$，$B\sim\Lambda \Rightarrow A\sim B$，老朋友了）

（上三角阵）A的特征值为 3, 0, 0，二重特征值为0

由 $r(0\cdot E-A)=r(-A)=1 \Rightarrow A\sim\Lambda=\begin{bmatrix}3&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}$

同理 $D\sim\begin{bmatrix}3&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}$ 所以 $A\sim D$

3 判断矩阵能否相似对角化（判断 $A\sim\Lambda$?）

Kira Tip：① 先考虑充分条件 —— 有n个不同特征值必有 $A\sim\Lambda$；实对称必有 $A\sim\Lambda$；② 不满足充分条件的再看多重特征值λ的 $r(\lambda E-A)$（这也是老生常谈了）

例4

不能相似对角化的矩阵是

(A) $\begin{bmatrix}1&2&1\\0&3&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&0\\0&0&3\end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

kira解析：

① 先抓充分条件：• A有3个不同特征值 1.3.0 $\Rightarrow A\sim\Lambda$

• D实对称 $\Rightarrow D\sim\Lambda$

② 再看多重特征值的情况

• 对B的二重特征值 1，有 $r(E-B)=\begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}=2 \neq 1$

所以B不可相似对角化

• 对C的二重特征值0，有 $r(0\cdot E-C)=\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}=1 \Rightarrow C\sim\Lambda$

选(B)

（非常清晰！其他题不再讲，一个套路）

$\boxed{4}$ 已知 $A\sim\Lambda$，反求A / 求$|A|$ / $r(A)$ …

kira tip：已知 $A\sim\Lambda$，马上充要条件都可以用，依然从多重特征值λ的 $r(\lambda E-A)$ 着手。

>> 真题演练 (2003.数二)

若矩阵 $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & a \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ 相似于对角阵 Λ，试确定常数a的值，并求可逆矩阵P，使 $P^{-1}AP=\Lambda$

解：矩阵A的特征多项式为

求λ

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 0 \\ -8 & \lambda-2 & -a \\ 0 & 0 & \lambda-6 \end{vmatrix}=(\lambda-6)[(\lambda-2)^2-16]=(\lambda-6)^2(\lambda+2)=0$$

所以A的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=6$，$\lambda_3=-2$

利用二重λ的 $r(\lambda E-A)=1$

由于 $A\sim\Lambda$，所以对于二重特征值 $\lambda_1=\lambda_2=6$ 有

$$r(6E-A)=r\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -8 & 4 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=r\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=1 \Rightarrow a=0$$

求P

所以$\lambda_1=\lambda_2=6$的两个无关特征向量可取为

$\alpha_1=(0,0,1)^T$，$\alpha_2=(1,2,0)^T$

当$\lambda_3=-2$时，$\lambda E-A=\begin{bmatrix}-4&-2&0\\-8&-4&0\\0&0&-8\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$

得特征向量 $\alpha_3=(1,-2,0)^T$

令$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&2&-2\\1&0&0\end{bmatrix}$ 则P可逆且$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}6&&\\&6&\\&&-2\end{bmatrix}$ ☆

5 求A^n

Kira常识：若$A\sim\Lambda$，则有$P^{-1}AP=\Lambda\Rightarrow P^{-1}A^nP=\Lambda^n\Rightarrow A^n=P\Lambda^nP^{-1}$

>> 真题演练（2016数一二三）

已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&-1&1\\2&-3&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ <I> 求A^{99}

解：（啥也别说了，赶紧抓 $A\sim\Lambda$）

求λ和α

由$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&-1\\-2&\lambda+3&0\\0&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)=0$

所以A的特征值为$\lambda_1=0$，$\lambda_2=-1$，$\lambda_3=-2$

其对应的特征向量分别为$\alpha_1=(3,2,2)^T$，$\alpha_2=(1,1,0)^T$，

$\alpha_3=(1,2,0)^T$

拼成P和Λ

令$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{bmatrix}3&1&1\\2&1&2\\2&0&0\end{bmatrix}$，$\Lambda=\begin{bmatrix}0&&\\&-1&\\&&-2\end{bmatrix}$ 有$P^{-1}AP=\Lambda$

$A^n=P\Lambda^nP^{-1}$

$\because A=P\Lambda P^{-1}\Rightarrow A^{99}=P\Lambda^{99}P^{-1}=\begin{bmatrix}3&1&1\\2&1&2\\2&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&&\\&(-1)^{99}&\\&&(-2)^{99}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\2&-1&-2\\-1&1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}-2+2^{99}&1-2^{99}&2-2^{98}\\-2+2^{100}&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{bmatrix}$ ☆

Kira总结：

① 列式很容易，计算很烦，加油，沉住气，紧凑沉稳地算；

② $A^n=P\Lambda^nP^{-1}$ 因为$A^n=(P\Lambda P^{-1})^n=P\Lambda(P^{-1}P)\Lambda P^{-1}\cdots P\Lambda P^{-1}$，中间$P^{-1}P=E$消失了

Ⅲ. 实对称矩阵

必看常识 / 做题根基

1 术语 (主要概念)

(1) 实对称矩阵：若 $A^T=A$，则 A 为实对称矩阵

(2) 施密特正交化方法 (Schmidt 正交化) [包含了单位化!]

如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，令

$$\beta_1=\alpha_1$$
$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$
$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

那么 β_1,β_2,β_3 两两正交，称为正交向量组，将其单位化

$$\gamma_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|},\ \gamma_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|},\ \gamma_3=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}$$

从 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 这一过程即称为 Schmidt 正交化.

★ kira 说人话&技巧传授

例如 $\alpha_1=[0,1,2]^T$，$\alpha_2=[1,0,1]^T$，$\alpha_3=[1,1,0]^T$

有 $\beta_1=\alpha_1=\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$ (保留 α_1 不变)

$$\beta_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}-\frac{2}{5}\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}5\\0\\5\end{bmatrix}-\frac{1}{5}\begin{bmatrix}0\\2\\4\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}5\\-2\\1\end{bmatrix}$$

★ 计算时分母提出来，口算整数加减法~

$\boxed{\alpha_2}$

分子是 $(\alpha_2,\beta_1)=[1,0,1]\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}=2$，对应元相乘再相加，拿眼看着算 $0+0+2=2$ 即可，非常快! 分母是 (β_1,β_1)，$0^2+1^2+2^2=5$，口算!

$$\beta_3=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}-\frac{1}{5}\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}-\frac{3}{30}\begin{bmatrix}5\\-2\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}10-0-5\\10-2+2\\0-4-1\end{bmatrix}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}5\\10\\-5\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$$

$\boxed{\alpha_3}$　$\boxed{\beta_1}$　$\boxed{\beta_2}$

提出后剩下拿眼看着算，此步可省略

将其单位化，有 $\gamma_1=\frac{1}{\sqrt5}\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$，$\gamma_2=\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix}5\\-2\\1\end{bmatrix}$，$\gamma_3=\frac{1}{\sqrt6}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$ ☆

!!! kira 大提示 ① 单位化的时候，只对 [ ] 里面单位化即可，外面的系数 (如 β_2 的 $\frac{1}{5}$，β_3 的 $\frac{1}{2}$) 通通扔掉；② 计算的方法 ▶ 如对 $\beta_1=\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$ 单位化

有 $\sqrt{0^2+1^2+2^2}=\sqrt5$ 故 $\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$ 外添系数 $\frac{1}{\sqrt5}$，$\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$ 保持不变；

▶ 如对 $\beta_2=\frac15\begin{bmatrix}5\\-2\\1\end{bmatrix}$ 标准化，不考虑 $\frac15$，直接 $\sqrt{5^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{30}$。

故 $\begin{bmatrix}5\\-2\\1\end{bmatrix}$ 外添系数 $\frac{1}{\sqrt{30}}$，$\begin{bmatrix}5\\-2\\1\end{bmatrix}$ 保持不变；

▶ 同理 对 $\beta_3=\frac12\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$ 标准化，可算 $=\frac{1}{\sqrt6}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$

（☺ 干干净净，清清爽爽！）

2 必会性质定理（背）

(1) 实对称矩阵的性质：

即有 $Q^TAQ=\Lambda$

★ • ① 必可以相似对角化，且可用正交矩阵 Q 相似对角化

Kira 说明：所谓"正交矩阵"，即列向量为单位向量（即 $\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$ 有 $\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}=1$，模长为1）且两两正交（即任意两列内积为0）

★ • ② 不同特征值的特征向量必相互正交

• ③ 特征值必是实数。

（☺ Kira 备注：由①可知，所有 $A\sim\Lambda$ 的充要条件设在 A 为实对称阵上都适用，比如 k 重特征值必有 k 个无关特征向量。）

! 提示：因为二次型的矩阵为实对称阵，所以实对称矩阵的对角化与二次型化为标准型密切相关。

3 必考计算套路

▶ 实对称矩阵的正交相似对角化（求 Q，使 $Q^TAQ=\Lambda$）

【步骤点拨】即在 $A\sim\Lambda$ 求 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 的基础上，对 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 进行单位化（当 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 已正交），或对 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 先正交化再单位化（若有多重特征值的特征向量不相互正交）

从而得到正交阵 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$，有 $Q^TAQ=\Lambda$

>> 真题演练（2006 改编）

A 是 3 阶实对称阵，各行元素均为 3，$\alpha_1=(-1,2,-1)^T$

$\alpha_2=(0,-1,1)^T$ 是 $AX=0$ 的解

(1) 求 A 的特征值、特征向量

(2) 求正交矩阵 Q，使 $Q^TAQ=\Lambda$ ← 详讲

(3) 求 A 及 $(A-\frac{3}{2}E)^6$

解：$\boxed{\text{求Q的 step 1}}$ 求特征值和特征向量

（本题降低了难度，设置了第(1)问）

(1) $A\alpha_1=0=0\cdot\alpha_1$，$A\alpha_2=0=0\cdot\alpha_2$

∴ $\lambda=0$ 是 A 的特征值，α_1,α_2 是 $\lambda=0$ 的无关的特征向量。

又 $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

∴ $\lambda=3$ 是 A 的特征值，α_3 是 $\lambda=3$ 的特征向量。

考试时求Q时此问可省略

⇒ A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=0$，$\lambda_3=3$

特征值 0 对应的特征向量为 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$（k_1,k_2 不全为0）

特征值 3 对应的特征向量为 $k_3\alpha_3$（$k_3\neq0$）

$\boxed{\text{求Q的 step 2}}$ 对 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 正交化和单位化

（本题 α_3 的 λ 与 α_1 和 α_2 不同，所以 α_3 天生与 α_1、α_2 正交，直接单位化

只需对二重特征值的特征向量 α_1,α_2 正交化）

(2) $\beta_1=\alpha_1=(-1,2,-1)^T$

$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}-\frac{-3}{6}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ ← 参见 P_{127} 的精细讲解

α_3 的特征值与 α_1,α_2 不同，一定与 α_1,α_2 正交。

单位化 $\gamma_1=\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$，$\gamma_2=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\gamma_3=\frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ ← 务必按我前面介绍的方式单位化，对比检验！

$\boxed{\text{求Q的 step 3}}$ 写出 Q 和 Λ（按顺序！）

令 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$，有 $Q^TAQ=Q^{-1}AQ=\Lambda=\begin{bmatrix}0&&\\&0&\\&&3\end{bmatrix}$

· BMDM ·

(3) $A=Q\Lambda Q^T=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt6} & -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{2}{\sqrt6} & 0 & \frac{1}{\sqrt3}\\ -\frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt6} & \frac{2}{\sqrt6} & -\frac{1}{\sqrt6}\\ -\frac{1}{\sqrt2} & 0 & \frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix}$

"永丹大帝说：辛苦地乘起来，但效果还可以"

$$=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$$

实对称矩阵 $A-\frac{3}{2}E\sim\Lambda-\frac{3}{2}E$

且有 $Q^{-1}(A-\frac{3}{2}E)Q=Q^{-1}AQ-\frac{3}{2}Q^{-1}Q=\Lambda-\frac{3}{2}E$

$\therefore (A-\frac{3}{2}E)^6=Q(\Lambda-\frac{3}{2}E)^6Q^{-1}$

$$=Q\begin{bmatrix}0-\frac{3}{2}&&\\&0-\frac{3}{2}&\\&&3-\frac{3}{2}\end{bmatrix}^6Q^{-1}=Q\begin{bmatrix}-\frac{3}{2}&&\\&-\frac{3}{2}&\\&&\frac{3}{2}\end{bmatrix}^6Q^{-1}$$

$$=Q\cdot(\frac{3}{2})^6EQ^{-1}=(\frac{3}{2})^6E$$

即 $(A-\frac{3}{2}E)^6=\begin{bmatrix}(\frac{3}{2})^6&&\\&(\frac{3}{2})^6&\\&&(\frac{3}{2})^6\end{bmatrix}$ ☆

(Kira备注：发现了木有~已知 Q 和 Λ 反求 A 的大好处在于不必像以前那样辛苦求 P^{-1} 了，直接转置就是 Q^{-1}，非常方便~正交矩阵大法好！)

解题套路

● 常见题型依次如下（大多和二次型联系密切，下一部分会讲）

1. A 为实对称阵，求 $r(A)$ / $|A|$ / …
2. A 为实对称抽象矩阵，求特征向量（利用正交）/ 求 A 所有的特征值和特征向量.
3. 对 A 正交相似对角化（求 Q） [已讲]

四 A为实对称阵，求 $r(A)$ / $|A|$ / …

（Kira解读：本质上还是在利用 $A\sim\Lambda$ 的各种必要条件，只不过前面多了一步：A为实对称阵 $\Rightarrow A\sim\Lambda$）

—— 真题演练（2012 数一二）——

设 α 为3维单位向量，E为3阶单位矩阵，则矩阵 $E-\alpha\alpha^T$ 的秩为______.

[分析]．

（由我在矩阵部分给大家反复强调的结论↓）$\alpha=(a_1,a_2,a_3)^T$

$\alpha^T\alpha=[\cdot\ \cdot\ \cdot]\begin{bmatrix}\cdot\\\cdot\\\cdot\end{bmatrix}=a_1^2+a_2^2+a_3^2$ 是一个常数！（不用背，自己拆开写写～）

$\alpha\alpha^T=\begin{bmatrix}\cdot\\\cdot\\\cdot\end{bmatrix}[\cdot\ \cdot\ \cdot]$ 是一个 3×3 矩阵 且 $r(\alpha\alpha^T)=1$，$tr(\alpha\alpha^T)=a_1^2+a_2^2+a_3^2$

〈法一〉由 $\alpha=(a_1,a_2,a_3)^T$ 为单位向量，$\alpha^T\alpha=a_1^2+a_2^2+a_3^2=1$

$$A=\alpha\alpha^T=\begin{bmatrix}a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3\\ a_2a_1 & a_2^2 & a_2a_3\\ a_3a_1 & a_3a_2 & a_3^2\end{bmatrix}$$ 由 $r(A)=1\Rightarrow\lambda=1,0,0$

$\therefore E-A$ 的特征值为 0,1,1．因为 $E-A$ 为实对称阵

所以 $E-A\sim\begin{bmatrix}0&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}$，$r(E-A)=2$

（Kira提示：看到 $\alpha\alpha^T$，$\alpha^T\alpha$，$\beta\alpha^T$，$\beta^T\alpha$ 要有亲切感，不要如临大敌～自己动手写一写 $[\cdot\cdot\cdot]\begin{bmatrix}\cdot\\\cdot\\\cdot\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}\cdot\\\cdot\\\cdot\end{bmatrix}[\cdot\cdot\cdot]$ 看一看，自然就明白了）

〈法二〉小题直接特值处理．$\alpha=(1,0,0)$ 符合题意

$$\therefore E-\alpha\alpha^T=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$ 秩为2（秒杀！）

—— 例5 ——

设A是3阶实对称矩阵，$r(A)=2$，若 $A^2=A$，则A的特征值是______

[分析] 由 $A^2-A=0 \Rightarrow \lambda^2-\lambda=0$ 设λ是A的任一特征值

∴ A的特征值为1或0.

因为A是实对称阵 $\Rightarrow A\sim\Lambda$，又∵ $r(A)=r(\Lambda)=2$

∴ $\Lambda=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix} \Rightarrow$ A的特征值为 1,1,0.

(kira备注：若未给A实对称和 $r(A)=2$，则无法判断 λ_A 的具体情况，只能粗略看到 $\lambda=0$ 或1.(具体原因P107有说明))

$\boxed{2}$ A为实对称阵，求A的特征值和特征向量(利用正交)

(kira Tip：由于实对称阵不同特征值的特征向量正交，所以可以在不知道A具体元素的情况下，求特征向量！)

>> 真题演练 (2011 数一二三)

设A为3阶实对称矩阵，$r(A)=2$，且

$$A\begin{bmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{bmatrix}$$

(I) 求A的所有特征值和特征向量；

(II) 求矩阵A

解：(kira备注：我看一眼这道题，直接读成"$A[\alpha_1,\alpha_2]=[-\alpha_1,\alpha_2]$"太明显了！)

(I) 由于A为三阶实对称阵，$r(A)=2$，所以 $\lambda_1=0$ 是A的特征值

又 $A\begin{bmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{bmatrix}$ 即 $A\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$

所以 $\lambda_2=-1$，$\lambda_3=1$ 是A的特征值，记 $\alpha_2=(1,0,-1)^T$，$\alpha_3=(1,0,1)^T$，则 λ_2 和 λ_3 对应特征向量分别为 $k_2\alpha_2$，$k_3\alpha_3$，k_2,k_3 全不为0

利用 kira Tip 开始表演！ → 设 $\alpha=(x_1,x_2,x_3)^T$ 为 $\lambda_1=0$ 的特征向量

因为A为实对称矩阵，所以不同特征值对应的特征向量相互正交，有 $(1,0,-1)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$，$(1,0,1)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$

即 $\begin{cases}x_1-x_3=0\\x_1+x_3=0\end{cases} \Rightarrow \alpha_1=(0,1,0)^T$ ← 随便找个与 α_2,α_3 都正交的向量就好！口算！

∴ $\lambda_1=0$ 对应的特征向量为 $k_1\alpha_1$，k_1 为任意非零常数。

<五>（老题型）

设 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&-1&1\end{bmatrix}$，$\Lambda=\begin{bmatrix}0&&\\&-1&\\&&1\end{bmatrix}$

则由题可知 $P^{-1}AP=\Lambda$，即

$$A=P\Lambda P^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&&\\&-1&\\&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\\frac12&0&-\frac12\\\frac12&0&\frac12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

（只举一例，其他同理）

$\boxed{3}$ 对A正交相似对角化（求Q）［已讲］

——补充例题之暗示透露特征值的线索——

设A为3阶矩阵，已知 $-2E+A$ 不可逆，$|3E+A|=0$，$(E-A)X$ 有非零解，则 $|A|=$ ________

Kira解析：由 $|\lambda E-A|=0$，你能发现以上3个条件都暗示了特征值嘛？Of Course！

① $(-k_1E+A)$ 不可逆 $\Rightarrow |-k_1E+A|=(-1)^n|k_1E-A|=0$
$\Rightarrow$ A有特征值 k_1

② $|k_2E+A|=0 \Rightarrow (-1)^n|-k_2E-A|=0 \Rightarrow |-k_2E-A|=0$
$\Rightarrow$ A有特征值 $-k_2$

③ $(k_3E-A)X=0$ 有非零解 $\Rightarrow |k_3E-A|=0 \Rightarrow$ A有特征值 k_3

综上，原题中A有特征值 $2,-3,1$，故 $|A|=2\cdot(-3)\cdot1=-6$

· BMDM ·

二次型篇

二次型的标准形、合同

二次型的规范形，惯性指数

正定

▶1. 二次型的标准形，合同

必备常识/做题根基

1 术语（重要概念）

(1) 二次型：含有n个变量$x_1,\cdots,x_n$的二次齐次多项式$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$（其中$a_{ij}=a_{ji}$）称为n元二次型。

(2) 二次型的矩阵：二次型有矩阵表示$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx$

其中$x=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T$，$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$称为二次型的矩阵

A的秩称为二次型的秩（A必须为实对称阵）

kira解读：根据二次型写出A是基本功，其中平方项系数a_{ii}写主对角线，二次项系数除以2，对称着写在对角线两侧

例如 $f(x_1,x_2)=x_1^2+3x_2^2\boxed{-6}x_1x_2$ ÷2

有$A=\begin{bmatrix}1&\boxed{-3}\\\boxed{-3}&3\end{bmatrix}$

(3) 标准形：如果二次型中只含有变量的平方项，所有混合项$x_ix_j(i\neq j)$系数为0，即$x^TAx=d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2$，称为“标准形”

(4) 坐标变换：如果$\begin{cases}x_1=c_{11}y_1+c_{12}y_2+\cdots+c_{1n}y_n\\x_2=c_{21}y_1+c_{22}y_2+\cdots+c_{2n}y_n\\\cdots\\x_n=c_{n1}y_1+c_{n2}y_2+\cdots+c_{nn}y_n\end{cases}$ (*) 满足$|C|=\begin{vmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{n1}&c_{n2}&\cdots&c_{nn}\end{vmatrix}\neq0$（C满秩）

称(*)为由$x=[x_1,\cdots,x_n]^T$到$y=[y_1,\cdots,y_n]^T$的坐标变换
描述为矩阵，即 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{n1}&c_{n2}&\cdots&c_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}$ 或 $x=Cy$，C可逆

(5) 合同：两个n阶矩阵A和B，如存在可逆矩阵C，使$\boxed{C^TAC=B}$
就称A和B合同，记作$\boxed{A\simeq B}$，并称由A到B的变换为
合同变换（😊 kira备注：此处C未必正交，即不一定有$C^T=C^{-1}$和$A\sim B$）

2 相关定理性质 (背)

(1) • x的n元二次型x^TAx经坐标变换$x=Cy$后，成为y的
n元二次型y^TBy，其中$B=C^TAC$（😊 kira备注：①这是我们
后面求坐标变换$x=Cy$，将二次型化标准形$y^T\Lambda y$的
理论基础 ②显然$A\simeq B$）

• 特别地，若$x=Cy$是正交变换，即C是正交矩阵，则有
$B=C^TAC=C^{-1}AC$，即经过正交变换，$A\simeq B$且$A\sim B$

(2) 任意n元二次型x^TAx都可以通过（一个很好的）坐标变换
化成标准形$d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$，其中$d_i\in R$.

(3) 任一n阶实对称阵A，总可以合同于一个对角矩阵，
即 $C^TAC=\begin{bmatrix}d_1&&\\&d_2&\\&&\ddots\\&&&d_n\end{bmatrix}$，其中C可逆.

（😊 kira备注：这个定理真是太棒了！$\forall$实对称A，都有$A\simeq\Lambda$，
即有$C^TAC=\Lambda$（C可逆），前面又学过$\forall$实对称A，都有
$A\sim\Lambda$，即有$P^{-1}AP=\Lambda$（P可逆），那么$C^TAC=\Lambda$和$P^{-1}AP=\Lambda$
的完美交集当然就是C为正交矩阵啦～且Λ就是$\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix}$
请看性质(4) ➜）

(4) 对任一 n 元二次型 x^TAx，其中 A 为实对称阵，必存在正交变换 $x=Qy$（Q 是正交矩阵），使 x^TAx 化为标准形

$\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$

这里 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值（注：只有正交变换化成的标准形平方项系数为特征值；没说正交可以化标准形，但系数不一定是特征值）

(5) 合同的性质 (背)

$$A \simeq B \Rightarrow \begin{cases} ① & A^T \simeq B^T \\ ②\bigstar & r(A)=r(B) \\ ③ & A^{-1}\simeq B^{-1}，若 A 可逆 \end{cases}$$

（在正交相似变换下）

实对称矩阵 A，则 $A\simeq B \Rightarrow A\sim B$（合同必相似）

3 必考计算套路.

（因为 $C^TAC=C^{-1}AC=B$, 正交阵 $C^T=C^{-1}$）

▶ 利用正交变换法化二次型为标准形

[步骤点拨] 本质上是求正交阵 Q 使 $Q^TAQ=Q^{-1}AQ=\Lambda$，套路与"实对称阵的正交相似对角化"基本相同，开头加一步"写出二次型矩阵 A"，最后答案要写成二次型形式，即"经过正交变换 $x=Py$ 得 $x^TAx=y^T\Lambda y=\lambda_1 y_1^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$"

>> 真题演练（2017 数一二三）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$

(1) 求 a 的值

(2) 求正交矩阵 Q

化标准型的 step1 | 写出二次型的矩阵 A

(1) 二次型的矩阵 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & a \end{bmatrix}$ 由标准型为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$

所以 $|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & a \end{vmatrix}=-3a+6=0$ 得 $a=2$

化标准型的 step2 | 按正交相似对角化的老规矩求 Q

由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & 4\\ -1 & \lambda+1 & -1\\ 4 & -1 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+3)(\lambda-6)=0$ 得 $\lambda_1=0,\ \lambda_2=-3,\ \lambda_3=6$

由 $0\cdot E-A=\begin{bmatrix}-2 & -1 & 4\\ -1 & 1 & -1\\ 4 & -1 & -2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ 得 $\lambda_1=0$ 对应特征向量 $\alpha_1=[1,2,1]^T$

由 $-3E-A=\begin{bmatrix}-5 & -1 & 4\\ -1 & -2 & -1\\ 4 & -1 & -5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ 得 $\lambda_2=-3$ 对应特征向量 $\alpha_2=[1,-1,1]^T$

由 $6E-A=\begin{bmatrix}4 & -1 & 4\\ -1 & 7 & -1\\ 4 & -1 & 4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ 得 $\lambda_3=6$ 对应特征向量为 $\alpha_3=[-1,0,1]^T$

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 已正交，只须单位化得

$$\eta_1=\frac{1}{\sqrt6}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\ \eta_2=\frac{1}{\sqrt3}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix},\ \eta_3=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

得到 $Q=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt6}{6} & \frac{\sqrt3}{3} & -\frac{\sqrt2}{2}\\ \frac{\sqrt6}{3} & -\frac{\sqrt3}{3} & 0\\ \frac{\sqrt6}{6} & \frac{\sqrt3}{3} & \frac{\sqrt2}{2}\end{bmatrix}$ 有 $Q^TAQ=\begin{bmatrix}0 & & \\ & -3 & \\ & & 6\end{bmatrix}$ ☆

[化标准型的step3] 写成标准形形式（kira加一步）

即经坐标变换 $x=Qy$ 得 $x^TAx=y^T\Lambda y=-3y_2^2+6y_3^2$ ☆

（kira备注：此处 $-3y_2^2+6y_3^2$ 中的系数和 y_i 顺序都不能随意变动，须与 $x=Qy$ 中 Q 的列排序保持一致 <p.s. 原题 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$ 顺序无所谓，旨在提供一个 $\lambda=0$ 求 a>）

▶ 利用配方法化二次型为标准形

kira提示：此法多用于二次型矩阵 A 的 $|\lambda E-A|$ 因式分解有困难或配方一看就很方便时.

[步骤点拨]

<1> 含有平方项的二次型：①选一个平方项，比如 $a_{11}x_1^2$ ②对所有含 x_1 的项配方（把 a_{11} 甩括号外）③从剩下未配方

的平方项中再选一个配方，比如 $a_{22}x_2^2$ ④对所有含 x_2 的项配方… ⑤循环以上步骤，直至所有项都包含在平方项中. ⑥写出坐标变换（令 y_i=第 i 个被平方项，反解出 $x=Cy$）

——>>真题演练（2014 数一二三改编）——

将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 化为标准形，并写出所用坐标变换

解：（😊 Kira 备注：这道用二次型矩阵 A 来做的话，A 不好求，而配方是较为轻松的）

$\boxed{\text{step 1}}$ 对所有含 x_1 的项配方（把 x_1 的系数甩括号外）

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1^2+2ax_1x_3+a^2x_3^2)-x_2^2+4x_2x_3-a^2x_3^2$$

根据 $2ax_1x_3=2\cdot x_1\cdot ax_3$ 硬凑一项平方项 $a^2x_3^2$

多加了 $a^2x_3^2$ 此处减去

$$=(x_1+ax_3)^2-x_2^2+4x_2x_3-a^2x_3^2$$

$\boxed{\text{step 2}}$ 对所有含 x_2 的项配方（把 x_2 系数 (-1) 甩括号外）

$$=(x_1+ax_3)^2-(x_2^2-4x_2x_3+4x_3^2)-a^2x_3^2+4x_3^2$$

$$=(x_1+ax_3)^2-(x_2-2x_3)^2+(4-a^2)x_3^2 \quad ☆$$

$\boxed{\text{step 3}}$ 循环以上步骤直至所有项都包含在平方项中（已完成）

$\boxed{\text{step 4}}$ 写出坐标变换（令 y_i=第 i 个被平方项反解出 $x=Cy$）

令 $\begin{cases} y_1=x_1+ax_3 \\ y_2=x_2-2x_3 \\ y_3=x_3 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x_1=y_1-ay_3 \\ x_2=y_2+2y_3 \\ x_3=y_3 \end{cases}$ 则有 $f=y_1^2-y_2^2+(4-a^2)y_3^2$

② 对于不含有平方项的二次型：①选一个非零混合项，比如 $a_{12}x_1x_2$，令 $x_1=y_1+y_2$，$x_2=y_1-y_2$；$x_3=y_3$，…，$x_n=y_n$ ②重复 <1> 的步骤

例题

用配方法化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+4x_1x_3$

解:

$\boxed{\text{Step 1}}$ 对 $2x_1x_2$ 令 $x_1=y_1+y_2$, $x_2=y_1-y_2$, $x_3=y_3$

在 f 中不含平方项，由于含有 x_1x_2

则令 $x_1=y_1+y_2$, $x_2=y_1-y_2$, $x_3=y_3$ 有

$f(x_1,x_2,x_3)=2(y_1+y_2)(y_1-y_2)+4(y_1+y_2)y_3$

$=2y_1^2-2y_2^2+4y_1y_3+4y_2y_3$ ← (此时作出平方项 ☺)

$\boxed{\text{Step 2}}$ 再重复 (1) 中套路

$=2y_1^2+4y_1y_3+2y_3^2-2y_2^2+4y_2y_3-2y_3^2$

$=2(y_1+y_2)^2-2(y_2-y_3)^2$

令 $\begin{cases} z_1=y_1+y_3 \\ z_2=y_2-y_3 \\ z_3=y_3 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} y_1=z_1-z_3 \\ y_2=z_2+z_3 \\ y_3=z_3 \end{cases}$

即经坐标变换 $\begin{cases} x_1=z_1+z_2 \\ x_2=z_1-z_2-2z_3 \\ x_3=z_3 \end{cases}$ ← 换到 x ☺

二次型化为标准形: $f=2z_1^2-2z_2^2$

解题套路

● 常见题型依次如下:

1. 利用二次型定义和性质求参数 a
2. 给定二次型的秩/特征值…求标准形
3. 利用正交变换及配方法将二次型化为标准形(已讲)

Ⅰ 利用二次型定义和性质求参数 a

—— 》真题演练（2012 数一二三）——

已知 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{bmatrix}$，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TA^TAx$ 的秩为 2

(1) 求实数 a；(2) 求正交变换 $x=Qy$ 将 f 化为标准形；

[kira的心路历程：显然 A^TA 是二次型的矩阵，所以 $r(A^TA)=2=r(A)$，只需对 A 行变换即可；如果想不到 $r(A^TA)=r(A)$，就把 A^TA 求出，由 $|A^TA|=0$ 或行变换都 OK！]

解：

〈Ⅰ〉 二次型 f 的秩即为 A^TA 的秩，有 $r(A)=r(A^TA)=2$

又 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&a+1\\0&0&-a-1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&a+1\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow a=-1$

〈Ⅱ〉（过程略） $A^TA=\begin{bmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{bmatrix}$，$\lambda_1=0$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=6$

令 $Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\-\frac{1}{\sqrt3}&0&\frac{2}{\sqrt6}\end{bmatrix}$，则正交变换 $x=Qy$ 将 f 化为

标准形 $2y_2^2+6y_3^2$

☆

（kira总结：本题对二次型部分知识用到了"二次型的秩即为二次型矩阵 A 的秩"，剩余求 a 的工作依赖于前两章的功底；二次型的秩为高频考点，需熟练掌握）.

—— 例 1 ——

设二次型 $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2bx_2x_3+2x_1x_3$ 经正交变换 $x=Py$ 化成 $f=y_2^2+2y_3^2$，其中 $x=(x_1,x_2,x_3)^T$ 和 $y=(y_1,y_2,y_3)^T$，P 是三阶正交矩阵，试求常数 a、b

（kira的心路历程，已知二次型和标准形，完全可以看作

相似对角化问题了~]

解:

由题设 $A=\begin{bmatrix}1&a&1\\a&1&b\\1&b&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0&&\\&1&\\&&2\end{bmatrix}$ 由于P是正交阵,

有 $P^TAP=P^{-1}AP=B \Rightarrow |A|=|B|=0 \Rightarrow |A|=2ab-a^2-b^2=0$ ①

又 A的特征值为 0,1,2 $\Rightarrow |E-A|=-2ab=0$ ②

综①②, $a=b=0$

(Kira总结:本题用到了"二次型化标准形(在正交变换下)"这一主干知识点.因为P是正交阵,所以B是A正交相似对角化得到的矩阵;剩余求a的工作依赖于"相似的必要条件"功底)

② 给定二次型的秩/特征值/特征向量…求标准形

★例2

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-5x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3+2bx_2x_3$ 的秩为2,且 $(2,1,2)^T$ 是A的特征向量,那么经正交变换二次型的标准形是______

[Kira Tip — 特征向量怎么用?答:利用 $A\alpha=\lambda\alpha$ 建立方程组]

解: $A=\begin{bmatrix}1&a&1\\a&-5&b\\1&b&1\end{bmatrix}$, 由 $(2,1,2)^T$ 是A的特征向量

有 $\begin{bmatrix}1&a&1\\a&-5&b\\1&b&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}=\lambda_1\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}2+a+2=2\lambda_1\\2a-5+2b=\lambda_1\\2+b+2=2\lambda_1\end{cases} \Rightarrow a=b=2, \lambda_1=3$

因 $r(A)=2 \Rightarrow |A|=0$, 于是 $\lambda_2=0$ 是A的特征值

又 $\Sigma a_{ii}=\Sigma\lambda_i \Rightarrow 1-5+1=0+3+\lambda_3 \Rightarrow \lambda_3=-6$ 是A的特征值,因此正交变换下二次型的标准型为 $3y_1^2-6y_3^2$.

(顺序无所谓)

(Kira总结:求标准型(正交变换的)本质是一道花式求特征值λ的题

· BMDM ·

马上考虑从定义 $A\alpha=\lambda\alpha$ 和性质 $|A|=\prod\lambda_i$，$\sum a_{ii}=\sum\lambda_i$ 中寻找λ的信息（本题全用到了～一道6题!）

例3

已知三元二次型 x^TAx 中，二次型矩阵 A 的各行元素之和均为 6，且满足 $AB=0$，其中 $B=\begin{bmatrix}1&1&2\\-2&-1&-3\\1&0&1\end{bmatrix}$，用正交变换化二次型为标准形，并写出所用的坐标变换。

[☺ kira心路历程：①看到"各行元素之和"不废话，马上 $A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=6\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，②$AB=0$ 这种方程组形式习惯性看作 $AB=0\cdot B$，马上搞定了 总之一切往特征值上扯了]

解：由 A 的各行元素为 6，有 $A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=6\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

$\therefore \lambda_1=6$ 为 A 的特征值，对应特征向量为 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

由 $AB=0$ 知 $A\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}=0=0\cdot\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}=0=0\cdot\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$

故 $\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$，$\alpha_3\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$ 是 A 属于特征值 $\lambda_2=\lambda_3=0$ 的特征向量

α_2,α_3 无关

将 α_2,α_3 正交化得到 $\beta_2=\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}-\frac{3}{6}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$$

将 α_1,β_2,β_3 再单位化分别得

$\eta_1=\frac{1}{\sqrt3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，$\eta_2=\frac{1}{\sqrt6}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$，$\eta_3=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$

令 $Q=[\eta_1,\eta_2,\eta_3]$，则经正交变换 $x=Qy$，化二次型为标准形 $6y_1^2$

[3] 利用正交变换及配方法将二次型化为标准形（已讲）

· BMDM ·

▶ Ⅱ 二次型的规范形、惯性指数

必备常识 / 做题根基

① 术语（主要概念）& ② 必会定理性质

(1) 规范形：在标准型中，如平方项系数 d_i 为 1, -1 或 0

即 $x^TAx = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2$

则称其为二次型的规范形.

(2) 惯性定理（十分重要故提前讲）：对于一个二次型，不论选取怎样的坐标变换使它化为含平方项的标准形，其中正平方项的个数 p，负平方项的个数 q 都是由所给二次型唯一确定的.

（😊 Kira 说人话：惯性定理决定了一件非常重要的事儿~ 即标准形和规范形对应的正平方项个数 p 和负平方项个数 q 是完全相同的！这就是为什么我们可以从规范形中去判断 A 的特征值的符号~）

(3) 惯性指数：在二次型 x^TAx 的标准型中，正平方项的个数 p 称为二次型的正惯性指数，负平方项的个数 q 称为二次型的负惯性指数.

（⇒ 二次型的秩 $r(f) \triangleq r(A) = p+q$，也就是实对称阵 A 的非 0 特征值为 $p+q$ 个.）

▲ 实对称矩阵 $A \simeq B \Leftrightarrow x^TAx$ 与 x^TBx 有相同的正、负惯性指数.

解题套路

◎ 常见题型汇总如下：

1. 已知正负惯性指数/规范形，求参数 a 的范围/值
2. 已知 $f=x^TAx$ 的部分信息，求规范形
3. 等价，相似，合同

[1] 已知正负惯性指数/规范形，求参数 a（高频）

>> 真题演练（2014 数一二三）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数是1，则 a 的取值范围是 ______.

[Bkira心路历程：要想用上惯性指数，必然先化二次型为标准形，再确保平方项系数只有一个为负～ So easy 😊]

解：二次型的标准形为 $(x_1+ax_3)^2-(x_2-2x_3)^2+(4-a^2)x_3^2$

（用配方法，前文详细推过）

由负惯性指数为1 $\Rightarrow 4-a^2\geq 0$ 即 $-2\leq a\leq 2$. ※

>> 真题演练（2009 数一二三）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$

(1) 求二次型 f 的矩阵的所有特征值

(2) 若二次型 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$，求 a 的值.

[😊 Bkira心路历程：本题不再是求 a 的范围，而是 a 的值. 显然 f 的特征值可以由 a 来表示，再根据规范形锁定 a 的范围，必然会明确的取值（否则题就错了）]

解：(1)（先规矩）二次型的矩阵 $A=\begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & -1 & a-1 \end{bmatrix}$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a & 0 & -1\\ 0 & \lambda-a & 1\\ -1 & 1 & \lambda-a+1\end{vmatrix}=(\lambda-a)[\lambda-(a+1)][\lambda-(a+2)]$$

$\Rightarrow$ A的特征值为 $\lambda_1=a,\ \lambda_2=a+1,\ \lambda_3=a+2$

(II) f的规范形为 $y_1^2+y_2^2$ $\Rightarrow$ $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$中有一个为0,两个为正.

又 $a<a+1<a+2$,所以 $a=0$ ☆

[2] 已知 $f=x^TAx$ 的部分信息,求规范形

例4

二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 的正惯性指数 $p=1$,
又矩阵满足 $A^2-2A=3E$,求此二次型的规范形.

[kira心路历程:给 $A^2-2A-3E=0$ 马上有 $\lambda^2-2\lambda-3=0$
再对A进行分析,看是否有 $\lambda=0$,最后结合 $p=1$,即确定 λ 及其重数)

解:

由 $A^2-2A-3E=0 \Rightarrow \lambda^2-2\lambda-3=0$ 所以 $\lambda=3$或-1

又因为 $A(A-2E)=3E \Rightarrow$ A可逆 $\Rightarrow r(A)=3=p+q$

由 $p=1 \Rightarrow q=2$ 所以f的特征值为 $3,-1,-1$

所以二次型的规范形为 $y_1^2-y_2^2-y_3^2$. ☆

[3] 等价、相似与合同

(kira备注:只要你在分别学习"等价""相似""合同"时认真背默过定义和性质,就绝对不会混淆,按照它们各自的规矩来就好~)

串概念时间

- A与B等价 $\Leftrightarrow$ A经初等变换得到B $\Leftrightarrow PAQ=B$, P,Q可逆
  ($A\cong B$)
- A与B相似 $\Leftrightarrow P^{-1}AP=B \Rightarrow$ (四个)必要条件随手默写
  ($A\sim B$)

- A与B合同 $\Leftrightarrow C^TAC=B$，C可逆.
  $\Leftrightarrow x^TAx$与x^TBx有相同正负惯性指数.

[kira Tip：问两矩阵是否等价，相似，合同这种题，要优先从反面排除，一眼抓出不满足必要条件 or 充要条件，马上推"不等价"，"不相似"，"不合同"。]

一些常用素材

相似
① 当A和B有以下任一情况成立，则不相似：
- $\lambda_A \neq \lambda_B$；$r(A)\neq r(B)$；$|A|\neq|B|$；$\sum a_{ii}\neq\sum b_{ii}$（四大必要）
- $A\sim\Lambda$ 但B不能相似对角化.

② 证明 $A\sim B$ 的方法：$A\sim\Lambda$且$B\sim\Lambda$；$P^{-1}AP=B$；

合同
③ 判断是否合同的方法：A、B正负惯性指数是否同（A、B实对称）
④ 实对称A、B，则有 $A\sim B \Rightarrow A\simeq B$，但反推不成立.

⑤ 判断是否等价的方法：$r(A)=r(B)$则等价，否则不等价.
（最简单~）

例5

设A是3阶实对称矩阵，将矩阵的1，2两行互换后再1，2两列互换得到矩阵B，试判断A与B是否等价，相似，合同？

解：

① 矩阵A经初等变换得到B，故A与B等价.

②③由题意有 $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=B$

因为 $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$；$\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{T}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

所以A与B等价，相似，合同

（kira备注：顺着题意写，用好等价，相似，合同定义。）

例 6

判断 $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ 是否等价、相似、合同

[分析]

① 因为 $r(A)=r(B)=1$，所以 A 与 B 等价；

② $|\lambda E-A|=\lambda^3-3\lambda^2=0 \Rightarrow$ A 的特征值为 3,0,0 ←（∵ 小心二重入）

又因 A 实对称，则必有 $A\sim\begin{bmatrix}3&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}$ 即 A 与 B 相似

③ 因为实对称矩阵 A 与 B 特征值相同，故有相同正、负惯性指数 ⇒ A 与 B 合同（∵ 相似必合同）

∴ A 与 B 等价、相似、合同

>> 真题演练（2007）

设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，则 A 与 B

(A) 合同且相似 (B) 合同，但不相似

(C) 不合同但相似 (D) 既不合同，也不相似

[分析]

① $\sum a_{ii}\neq\sum b_{ii}$ ∴ 不相似（当然，忘了看迹也没事，反正还是要求特征值…）

② B 的惯性指数：$x^TBx=x_1^2+x_2^2 \Rightarrow p=2, q=0$

$|\lambda E-A|=(\lambda-3)(\lambda^2-3\lambda) \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=3, \lambda_3=0$

所以 $x^TAx=3x_1^2+3x_2^2$ $p=2, q=0$. ∴ 合同

选 B

举反例

举二阶矩阵的例子，它们有相同的特征值但不相似

[引 Kiro 心路历程：满足相同入（必要条件）却不相似

那么只需不满足其余3个必要条件中任一个就可以了，或者根据教材①，只需$A \sim \Lambda$但B不能对角化，而决定能否对角化的唯一因素是多重λ所对应的$r(\lambda E-A)$～分析完毕～）

解：

例$A=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$ 满足特征值相同，但$r(A)\neq r(B)$，不相似

（kira注：①判断特征值相同，最方便是全写上三角阵，直接对角线即特征值，如以上两矩阵都有$\lambda_1=\lambda_2=0$；

② 事实上，对B有二重特征值$\lambda=0$而$r(0E-B)=1\neq 0$，所以B不可相似对角化，而A是对角阵，所以不相似）

▶五.正定

必备常识／做题根基

1 术语（主要概念）

(1) 正定：若二次型$f=x^TAx$对任何$x\neq 0$都有$f>0$，则称f为正定二次型，正定二次型的矩阵A称为正定矩阵

（kira备注：换言之，当f正定时，$f=x^TAx=0$（即"="成立）当且仅当$x=0$；f完全有等于0的权利，只不过不必须取0）

2 必会定理性质 (背)

(1) 正定的充要条件

● n元二次型x^TAx正定

$\Leftrightarrow \forall x\neq 0$，恒有$f=x^TAx>0$ （证f正定，常用）

$\Leftrightarrow f=x^TAx$的标准型中的n个系数全大于0

$\Leftrightarrow x^TAx$的正惯性指数$p=n$

$\Leftrightarrow A$的特征值全是正数．（证f正定，常用）

$\Leftrightarrow A$与E合同，即$\exists$可逆D，使$A=D^TD$．

$\Leftrightarrow A$的顺序主子式全大于0．（常用）

★(2) x^TAx正定的必要条件：(1) $a_{ii}>0$（常用） (2) $|A|>0$（常用）

解题套路

◉ 常见题型依次如下：

1. 判别矩阵是否正定
2. 已知二次型正定，求参数 a.
3. 证明矩阵为正定矩阵

1 判别矩阵是否正定

例7

判断以下矩阵是否正定

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&-5&6\\7&8&9\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&0\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1&4&3\\2&2&3\\5&6&7\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&2&1\\1&1&5\end{bmatrix}$$

[本类题通用心路历程：① 先看是否为实对称阵，若不是实对阵，必然不正定；② 再看 a_{ii} 是否都为正，若主对角线出现 0 或负数，必然不正定 ③ 最后考虑充要条件：各阶顺序主子式大于0，则正定.]

[分析] A 主对角线有 -5，B 主对角线有 0．排除 A、B.

C 的二阶顺序主子式 $\begin{vmatrix}1&4\\2&2\end{vmatrix}=-6<0$ 排除 C

检验 D 的一、二、三阶主子式均大于0. 所以 D 正定

2 已知二次型正定，求参数 a.

例8

$f(x_1,x_2,x_3)=(3x_1-x_2+ax_3)^2+(x_1+x_2-x_3)^2+(2x_1-x_2+x_3)^2$ 正定

$\Leftrightarrow$ a 满足 ______

[kira备注：本题考察对定义的深刻理解和灵活运用]

解：f 正定 $\Leftrightarrow$ 对 $\forall (x_1,x_2,x_3)^T\neq 0$ 有 $f>0$. 即 $f=0$ 当且仅当 $(x_1,x_2,x_3)=0$。

$\Leftrightarrow$ 齐次方程组 $\begin{cases} 3x_1-x_2+ax_3=0 \\ x_1+x_2-x_3=0 \\ 2x_1-x_2+x_3=0 \end{cases}$ 只有0解

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3 & -1 & a \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3(a-1) \neq 0 \Rightarrow a \neq 1$ ※

(☺ kira备注：本题需作为经验掌握下来)

例9

二次型 $x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2ax_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 正定，则 a ____

[☺ kira 心路历程：用充要条件各阶顺序主子式全大于0即可]

解：

二次型矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ 的顺序主子式全大于0.

即 $\Delta_1=1>0$；$\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 4 \end{vmatrix}=4-a^2>0 \Rightarrow -2<a<2$

$\Delta_3=|A|=-4a^2-4a+8>0 \Rightarrow -2<a<1$

$\therefore$ 当 $-2<a<1$ 时二次型正定 ※

例10

设 A 是3阶实对称矩阵，且 $A^2+2A=0$，若 $kA+E$ 是正定矩阵，则 k ____

(☺ kira 心路历程：看到 $A^2+2A=0$ 自然有 $\lambda^2+2\lambda=0$，自然用充要条件 $\lambda_i>0$ 来做)

解：由 $A^2+2A=0 \Rightarrow \lambda^2+2\lambda=0 \Rightarrow \lambda=0$ 或 -2.

$\therefore kA+E$ 的特征值为 $k\lambda+1$ 即 1 或 $-2k+1$

又 $kA+E$ 正定 $\therefore -2k+1>0 \Rightarrow k<\frac{1}{2}$ ※

3 证明矩阵为正定矩阵

>> 真题演练（2010 数一）

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为 $y_1^2+y_2^2$，且 Q 的第3列为 $(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})^T$

（I）求矩阵 A；

（II）证明 $A+E$ 为正定矩阵，其中 E 为3阶单位阵

[Kira 心路历程：①给了标准形已知 $\lambda=1,1,0$，第3列对应 0 的特征向量，再用正交找到 1 的特征向量，从而求出 A；② 证明正定三条路：顺序主子式，特征值，定义，本题显然是玩特征值的. OK~]

解：（I）

先找后推理：
由标准型 $y_1^2+y_2^2$ 所以二次型矩阵 A 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=0$. 且 Q 的第3列 $e_3=(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})^T$ 就是对应特征值 $\lambda_3=0$ 的特征向量.

再深入求解所有特征向量，并反求A：
因为 A 实对称，所以 A 的不同特征值对应的特征向量正交

令 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 对应的特征向量为 $\xi=(x_1,x_2,x_3)^T$，则 ξ 与 e_3 正交

即 $x_1+x_3=0$，解得 $\xi_1=(0,1,0)^T$，$\xi_2=(1,0,-1)^T$ ← 目瞪眼看~

由于 ξ_1,ξ_2 已正交，故只需单位化：$e_1=(0,1,0)^T$，$e_2=(\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2})^T$

因此正交阵 $Q=(e_1,e_2,e_3)=\begin{bmatrix}0&\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\1&0&0\\0&-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$

由 $Q^TAQ=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix}\Rightarrow A=Q\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix}Q^T=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$.

（II）因 A 的特征值为 $1,1,0$，所以 $A+E$ 的特征值为 $2,2,1$；

因 A 和 E 都为实对称阵，则 $A+E$ 为实对称阵，

$A+E$ 的特征值都大于零 所以 $A+E$ 是正定矩阵 ※

（Kira 备注：证明正定一定记得先看实对称，先看实对称，先看实对称！再验充要条件.）

例11

设 A 为正定矩阵，证明 A^{-1} 也是正定矩阵

[☺ kira心路历程：先证实对称，再用特征值或定义证明，A^{-1} 的特征值很方便看出，故采用特征值法]

解：由 A 正定所以 $A^T=A$，且 A 的特征值有 $\lambda_1>0,\cdots,\lambda_n>0$

$\boxed{\text{验实对称}}$ 由 $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}=A^{-1}$ 得 A^{-1} 为实对称矩阵

$\boxed{\text{验}\lambda>0}$ A^{-1} 的特征值为 $\frac{1}{\lambda_1},\cdots,\frac{1}{\lambda_n}$，得 A^{-1} 的特征值全为正数

OK! 所以 A^{-1} 正定 ※

>> 真题演练（1999数三）

设 A 为 $m\times n$ 实对称矩阵，E 为 n 阶单位矩阵，已知矩阵 $B=\lambda E+A^TA$，试证：$\lambda>0$ 时，矩阵 B 为正定矩阵。

[☺ kira心路历程：先证实对称，原题未给正定矩阵，B 和 A 之间特征值关系不够明显，优先考虑定义法]

解：① $B^T=(\lambda E+A^TA)^T=(\lambda E)^T+(A^TA)^T=\lambda E+A^TA=B$

所以 B 是 n 阶实对称矩阵。

② 构造二次型 x^TBx，有

$$x^TBx=x^T(\lambda E+A^TA)x=\lambda x^Tx+x^TA^TAx=\lambda x^Tx+(Ax)^T(Ax)$$

$\boxed{\text{代入}B\text{，并努力拆为内积 }x^Tx\text{、}(Ax)^T(Ax)\text{ 形式}}$

$\because \forall x\neq 0$ 都有 $x^Tx>0$，$(Ax)^TAx\geq 0$

$\boxed{\text{内积 }x^Tx\geq 0\text{，当 }x\neq 0\text{ 时当然有 }x^Tx>0}$ $\boxed{Ax\text{ 有可能取 }0}$

所以，当 $\lambda>0$ 时，对 $\forall x\neq 0$ 有

$$x^TBx=\lambda x^Tx+(Ax)^T(Ax)>0$$

即二次型 x^TBx 正定，故 B 是正定矩阵。 ※

(☺ kira备注：定义法的操作流程就是构造待证矩阵的

二次型 x^TBx，再进行拆分和组合，化成一定大于0的 x^Tx 或 x^TAx（当A正定）或 $(Ax)^T(Ax)$（当 $Ax=0$ 只有0解），此时必有二次型 x^TBx 正定 ▲注意：x^Tx、x^TAx、$(Ax)^T(Ax)$ 都是一个数（1×1）

—— 例12 ——

设 A 是 $m\times n$ 实对称矩阵（$m>n$），证明 A^TA 正定的充分必要条件是 $r(A)=n$.

[Kira 心路历程：在我们充分掌握上一道真题之后，会发现本题比上一题缺少了"λE"，我们失去了确保正定的 x^Tx 即只能另求出路；本题处理方式在本页上方已做总拨，希望大家当作基本经验掌握下来.]

解：因为 $(A^TA)^T=A^T(A^T)^T=A^TA$，所以 A^TA 是实对称矩阵

"⇒" 设 A^TA 正定，则对任意 $x\neq0$ 有 $x^TA^TAx>0$ 即 $(Ax)^TAx>0$

令 $Ax=\alpha$，则有 $\alpha^T\alpha=|\alpha|^2>0$ ← 注：α 是 $m\times1$ 列向量 ∴ $\alpha^T\alpha$ 是常数

所以当 $\alpha\neq0$，即对 $\forall x\neq0$，都有 $Ax\neq0$

从而方程组 $Ax=0$ 只有零解 ∴ $r(A)=n$

"⇐" 设 $r(A)=n$，要欲证 A^TA 正定，只证 $\forall x\neq0$，有 $x^TA^TAx>0$

即 $(Ax)^T(Ax)>0$，即 $\forall x\neq0$ 必有 $Ax\neq0$

因为 $r(A)=n$ 所以 $Ax=0$ 只有0解

$\Rightarrow \forall x\neq0$ 恒有 $Ax\neq0$ $\Rightarrow (Ax)^T(Ax)>0$

∴ A^TA 正定

（Kira 总结：本题综合了向量、方程组的解等知识，对数学思维考察较深；看懂后强行记住，日后可套用类似题）

最后来一发真题演练

数一二三/lc关

——>> 真题演练 (2015 数一二三) ——

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $x=Py$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，其中 $P=(e_1,e_2,e_3)$，若 $Q=(e_1,-e_3,e_2)$，则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为 ( )

(A) $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$ (B) $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$

(C) $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$ (D) $2y_1^2+y_2^2+y_3^2$

[Kira 解析：快看看 $Q=(e_1,-e_3,e_2)$ 给了个啥？这就是我之前反复强调的"顺序"，正交阵中 e_i 的排序必须与标准形对应，e_2 换到最后一列，那 $\lambda=1$ 也要写到最后，即"$+y_3^2$"；$-e_3$ 提到第二列（添"-"并不影响 $-e_3$ 还是 $\lambda=-1$ 的特征向量），则 $\lambda=-1$ 要提到第二个写，即"$-y_2^2$"；e_1 不变，y_1^2 不变。Q 相当于把 P 的顺序给错了，那我们就将错就错~ 选 A]

解：因 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在 $x=Py$ 下标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$

大题抓 $Q=PC$

故 $P^TAP=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$ 又 $Q=(e_1,-e_3,e_2)=(e_1,e_2,e_3)\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}$

$=P\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}\triangleq PC$

则 $Q^TAQ=C^T(P^TAP)C=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，故在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为 $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$

——>> 真题演练 (2013 数一二三) ——

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$

记 $\alpha=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$，$\beta=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$

(1) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$

(2) 若 α，β 正交且均为单位向量，证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$

[Kira带你飞 :)：① 先观察 $f(x_1,x_2,x_3)$，像 $(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2$ 完全可以拆成向量表示，从而顺理成章得到 $2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$；② ★同志们，"正交且为单位向量"是非常非常重要的暗示，α 和 β 直接就是正交阵的两个列向量且肯定是属于两不同特征值的特征向量，所以用 $A\alpha=\lambda_1\alpha$ 和 $A\beta=\lambda_2\beta$ 一定会出特征值 2 和 1（因为证 $2y_1^2+y_2^2$）另一个特征值为 0，可以从 $r(A)$ 或 $|A|$ 等处入手～OK!]

证：(1) 将二次型矩阵展开，有

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3)&=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)\\
&\quad+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)\\
&=2(x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}\cdot[a_1,a_2,a_3]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\\
&\quad+(x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}[b_1,b_2,b_3]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\\
&=(x_1,x_2,x_3)\,2\alpha\alpha^T\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+(x_1,x_2,x_3)\,\beta\beta^T\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\\
&=(x_1,x_2,x_3)\,(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

:) 这个非常明显，向量计算基本功～

即二次型 f 所对应的矩阵为 $2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$.

(2) 记矩阵 $A=2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$，因为 α，β 正交且均为单位向量，

有 $\alpha^T\alpha=\beta^T\beta=1$，$\alpha^T\beta=\beta^T\alpha=0$

· BMDM ·

所以 $\begin{cases} A\alpha=(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\alpha=2\alpha \\ A\beta=(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\beta=\beta \end{cases}$ 那 $\lambda_1=2$、$\lambda_2=1$ 是A的两特征值

由 $r(A)=r(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\leq r(2\alpha\alpha^T)+r(\beta\beta^T)=1+1=2$

所以A不满秩，$\lambda_3=0$ 也是矩阵A的特征值，可得二次型 f 在正交变换下的标准形式为 $f=2y_1^2+y_2^2$ ☆

（☺ kira总结：①这道题一看是证明，其实是计算的简化版。试想，原题若改为"(Ⅰ)用α和β表示f的矩阵；(Ⅱ)求f在正交变换下的标准形"，那难度就陡然上升了！② 既然已知标准形为 $2y_1^2+y_2^2$，显然有 $\lambda_3=0$，那么证"$r(A)<3$"便是水到渠成的事情，很容易想到～）

（数二完结撒花～♥♥）

数一专题

2016 二次型与二次曲面综合——

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$，则 $f(x_1,x_2,x_3)=2$ 在空间直角坐标系下的二次曲面为（　）

(A) 单叶双曲面　(B) 双叶双曲面　(C) 椭球面　(D) 柱面

[☺ kira解析：四种曲面对应的方程依次为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1)$ 它们之间的差别在于平方项的系数的正负号，故解题方向为化规范形（从本题可以看出二次型和二次曲面方程存在结合点～）]

解：由题，二次型对应的矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$，由 $|\lambda E-A|=0$ 解得矩阵A的特征值为 $\lambda_1=5$，$\lambda_2=\lambda_3=-1$，故二次型的规范形为 $f=z_1^2-z_2^2-z_3^2$，于是 $f(x_1,x_2,x_3)=2$ 表示的二次曲面 $z_1^2-z_2^2-z_3^2=2$ 为双叶双曲面。

（数一完结撒花～♥♥）