Kira 高数葵花宝典

(考研数学一、二、三公共考点)

Kira 序——篇名的由来

我在今年 3 月分享过英语笔记后，陆续有同学问我是否能分享一下数学笔记。我拿出两本早已被我画得稀烂也翻到很厚的视频课笔记端详，感觉实在太凌乱以至于无法分享。

遂决定从宇哥和汤神这两本笔记中抽取各自最最精华的方法，揉入我自己的观点和态度，掺进我去年在微博彻夜答疑收获来的经验，凝成此本《Kira 高数葵花宝典》。

蛰伏半载，诚意之作。

在最初我是不知道该如何写可以分享的笔记的，考虑过把原笔记完整抄一遍再写批注，又觉得不妥。思前想后，决定把顺序完全打乱重排，完全按照我自己的思路来走。

于是"大王小王篇"诞生。

所谓"大王小王"即扑克中两张王牌，王炸甩出来，谁都要不起。而在考研高数中我认为最根基最重要最容易被低估难度的，我把它们拿出来汇成大王小王篇，以警考生。

So ladies and gentlemen, what do you think is the King of 考研高数?

我认为是烂熟的计算功力，是对极限、导数、不定积分、定积分的定义及其计算技巧的倒背如流熟稔于心。

计算弱会发生什么？你会对数学感到彻头彻尾的**恐惧**，面对每一道题目你都会心虚，你知道你一定做不到最后，一定算不出结果；面对每一个稍复杂的新延伸的定理和概念，面对广义积分面对级数面对概统，你都战战兢兢，因为你只要一看到"极限"，看到"积分"这些字眼就心烦意乱。你看到 Γ 函数的定义式立刻就昏了，觉得自己肯定记不住，也用不来。

但事实上，它好用到哭。

康忙北鼻. 计算是做高数最开心的事情好嘛。
对于数学系的同学来说，计算题=送分题。

我在刚准备考研的时候，也是个计算弱渣，甚至到10月的时候，计算仍是我对自己数学不自信的重要因素。11 月的时候我狠砸半个月，把极限和积分彻底打通。

一切都不一样了。

当搞定大王小王之后，你会发现，以前那些难缠的 N 元求导/积分/级数根本不是事儿。

接着是"4A 篇"。

四张 A 在一副牌中的地位举足轻重，拿下它们就相当于拿下了考研高数公共考点的半壁江山。我挑选的是——多元函数微积分、微分方程、中值定理和级数。在每一部分，我都做了非常详尽的讲解。当你稳稳拿下大王小王篇后，就可以去搞定4A 篇了。

最后是"拾遗篇"。

拾遗篇将大王小王篇和4A 篇筛下的其他知识点一一回收，确保整本葵花宝典知识的完整性。这些内容只是比较小而琐碎，但不代表它们不重要。它们都应是你的常识才对。

感谢你选择《Kira 高数葵花宝典》，希望它能够为你高数的学习提供一串串锦囊妙计，帮你打开视野，助你少走弯路。我也真心希望你能够从中发现尽可能多的亮点，不枉我倾尽全力写下的一字一句。

祝考研成功！

Kira

《Kira 高数葵花宝典》涉及的知识点范围（以下内容根据数一二三最新考纲写成，请认真参考）

撇开真题实战而谈论数学知识点无意义。我只经受过数三真题的检验，且本科在数学系，数一数二的其他问题可做，但不认为自己有关于数一数二真题的发言权，故高数葵花宝典只包含数一数二数三的公共考点。

- 本宝典包含：

/函数、极限、连续/

[拾遗篇]

函数有界性、单调性、周期性、奇偶性、连续性（包括左连续、右连续）

无穷与无界

间断点类型判别

闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值和最小值定理、介值定理）及应用

[大王小王篇]

基本初等函数、复合函数、分段函数、反函数、隐函数

数列极限、函数极限（包括左极限、右极限）

极限的性质、极限存在的两个准则、极限四则运算法则

无穷小的基本概念、性质和比较方法

无穷大量及其与无穷小量的关系

[4A 篇]

闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值和最小值定理、介值定理）及应用

/一元函数微分学/

[4A 篇]

罗尔定理、拉格朗日中值定理、泰勒定理、柯西中值定理及其应用

[拾遗篇]

导数概念、可导性连续性、平面曲线切线方程法线方程
导数和微分的关系、一阶微分形式的不变性、求函数微分
函数单调性判别方法
函数极值的概念（极值、最大值、最小值的求法及其应用）
用导数判断函数的凹凸性、求函数拐点和渐进线
画简单函数的图形

[大王小王篇]
基本初等函数的求导公式、导数四则运算法则、复合函数求导法则
分段函数的导数、反函数和隐函数的导数
高阶导数
洛必达法则求极限

/一元函数积分学/

[大王小王篇]
不定积分的基本性质和基本积分公式、换元积分法和分部积分法
定积分概念和基本性质、变限积分函数求导、牛顿莱布尼茨公式、定积分的换元积分法和分部积分法
反常积分概念及计算

[4A 篇]
定积分中值定理

[拾遗篇]
原积分和不定积分概念
利用定积分计算平面图形面积、旋转体体积和函数平均值

/多元函数微分/

[4A 篇]
多元函数概念、二元函数几何意义
二元函数的极限与连续、有界闭区域上二元连续函数的性质
多元函数偏导数与全微分、求多元复合函数一阶、二阶偏导数、求全微分、求多

元隐函数的偏导数
多元函数极值和条件极值

/多元函数积分/

[4A 篇]
二重积分概念及基本性质，二重积分计算（直角坐标、极坐标）
反常二重积分计算

/无穷级数/

[4A 篇]
级数收敛与发散、收敛级数的和
级数基本性质、级数收敛的必要条件
几何级数收敛与发散条件、正项级数收敛性的比较判别法和比值判别法
绝对收敛与条件收敛、绝对收敛与收敛的关系
交错级数的莱布尼茨判别法
幂级数基本性质（和函数连续性、逐项求导和逐项积分）
幂级数求和、麦克劳林展开式

/常微分方程/

[4A 篇]
微分方程的阶、解、通解、初始条件和特解等概念
求解变量可分离的微分方程、齐次微分方程和一阶线性微分方程
线性微分方程解的性质及结构
解自由项为多项式、指数函数、正弦函数、余弦函数的二阶常系数非齐次线性微分方程
二阶常系数齐次线性微分方程及简单的非齐次线性微分方程

- 本宝典不含

【数一】

/一元函数微分学/ 曲率.

/一元函数积分学/ 用定积分表示弧长、功、引力、压力、质心、形心等几何量物理量.

/向量代数和空间解析几何/ 全部（包括向量运算；平面方程、曲面方程和曲线方程及相关运算；空间曲线参数方程等）

/多元函数微分学/ 方向导数与梯度；空间曲线的切线和法平面；空间曲面的切平面和法线；二元函数的二阶泰勒公式；

/多元函数积分学/ 三重积分；曲线积分；格林公式；曲面积分；散度旋度；

/无穷级数/ 傅里叶级数和狄利克雷收敛定理；

/常微分方程/ 高于二阶的常系数齐次线性微分方程；伯努利方程，全微分方程；变量代换法，降阶法；欧拉方程；微分方程的物理应用问题.

【数二】

/一元函数微分学/ 曲率.

/一元函数积分学/ 用定积分表示弧长、功、引力、压力、质心、形心等几何量物理量.

/多元函数微分学/ 方向导数与梯度；空间曲线的切线和法平面；空间曲面的切平面和法线；二元函数的二阶泰勒公式；

/常微分方程/ 高于二阶的常系数齐次线性微分方程；降阶法；微分方程的物理应用问题.

【数三】

差分方程

经济学应用

-索引-

（*下划线表示该部分有我想特别强调的一些有 Kira 特色的知识点）

「Kira高数葵花宝典阅读指南」

① 每个人学习高数都应跟老师建立一套完整体系，我的高数葵花宝典可帮你在自身体系上缝缝补补而不可代替任何一种体系，也不可代替笔记。它更像一本为你指点迷津的工具书。

② 字较多较细是因为我想尽可能体现"讲解"属性，数学重在讲解。最低要求是请把所有"Kira XX"读完，它们都是我最想说给你听的。同样，请耐心阅读我强调的文字和打星号的文字。

③ 应这样对待例题：与其说它们是题目，不如说它们是概念和我观点的"生动诠释"，是帮助你理解与掌握知识的。

▲④ 关于葵花宝典的每一句话：就如同我很多微博写了也是白写一样，这本书很多话哪怕我用十分力道去写，很多人也读不出其中的要害。只有吃过亏才能长记性，只有摔过跤才能长眼神。

我只想说，每一句"Kira XXX"和"强调文字"我写的时候都是力透纸背，上面铺满了历年考生的尸体和血泪！

⑤ 每部分的"Kira前言"一定要看

▲⑥「大题小题篇」才是你真正的敌人，它们笑里藏刀。

⑦ 读不明白地方旺旺来找我讲（微博私信有不便讲的多了我视频讲。（微博和公号发）。

⑧ 每部分"特别关注"即重点。我划得较为简略，后续会在宝贝简介中更新详细版重点。请持续关注。

⑨ 赞花宝贝会成为我给大家讲题时用到和"教材"也会是给大家点拨所用的参照。

⑩ 非常感谢大家对本宝贝的支持。关于宝贝内容也欢迎多多与我交流。祝考研顺利！

Kira
2016.9.30.

「大王小王锦」之

极限计算

- 本Part的解锁条件：无
- 本Part的特别关注：P3 (2)(3) ▲P8. 二.(1)(3)(4). 例4
  (看到即赚到！) P11. (iv) P14. 四 P17. 六.1.3.
  ▲P18. 七(例11, 12) P31. A)

(本章是所有后续的根基，建议我讲的每一句你都有印象并内化为自己的能力。P7末尾有kira总结，好好看！)

- 本Part的陷阱：由于本Part进化常高，所以全程无陷阱。基础较好的同学可以着重看一下“特别关注”。

我在P27章外说过①性价比低，这块可直接跳过，暂不深究。

在本部分中，你必须熟练记忆并运用以下公式和结论

1 泰勒公式与等价无穷小 (8个) ($x \to 0$)

最常考，背2项即可

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

[第一组]

背3项足够用

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2)$$

[第二组]

- 以下等价无穷小由第一组自然得出（不必强背，用熟自然会）

$\sin x \sim x$ ； $\tan x \sim x$ ；

$\arcsin x \sim x$ ； $\arctan x \sim x$ ；

$x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3$ ； $x - \arctan x \sim \frac{1}{3}x^3$ ；

$x - \arcsin x \sim -\frac{1}{6}x^3$ ； $x - \tan x \sim -\frac{1}{3}x^3$

- 以下等价无穷小由第二组自然得出（非常好用！背熟！）

$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ ； $x - \ln(1+x) \sim \frac{1}{2}x^2$ ；

$e^x - 1 \sim x$

注意易错点

(i) $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ 和 $e^x - 1 \sim x$，两者1的位置看准（正负）

不要颠倒搞反符号

(ii) $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$，而 $1-\cos^2 x = \sin^2 x$，做题总写混！看准！

2 复合函数 & 积分 的无穷小比阶（秒杀选择）

[1] $f(x) \sim ax^m$，$g(x) \sim bx^n$，则 $\boxed{f[g(x)] \sim ab^m x^{mn}}$
其中 $f(x)$，$g(x)$，a，b 均 $\neq 0$

（ps：简单套一下就知道了，$f(g(x)) \sim a(bx^n)^m \sim ab^m x^{mn}$ 啦）

例1

已知 $f(x) \sim \frac{1}{2}x^2$，$g(x) \sim \frac{3}{4}x^3$，则 $f(g(x)) \sim ?$

解：口算得 $f(g(x)) \sim \frac{1}{2}(\frac{3}{4})^2 x^6$

[2] 若 $f(x)$，$g(x)$ 连续且不为0，$x \to 0$，$f(x) \sim g(x)$，
则 $\boxed{\int_0^x f(t)\,dt \sim \int_0^x g(t)\,dt}$

（Kira说人话：这个式子的作用在于把长得复杂的积分替换为长得简单的积分）

例2

当 $x \to 0$ 时，$\int_0^{x-\ln(1+x)} \frac{\sin t^2}{t}\,dt \sim \underline{?}$

解：$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t^2}{t}\,dt \sim \int_0^x t\,dt = \frac{1}{2}x^2$ （由[2]）

$g(x) = x-\ln(1+x) \sim \frac{1}{2}x^2$

$f[g(x)] = \int_0^{x-\ln(1+x)} \frac{\sin t^2}{t}\,dt = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}x^2)^2 = \underline{\frac{1}{8}x^4}$ （由[1]）

（Kira说人话：本质上 $\int_0^x \frac{\sin t^2}{t}\,dt$ 是关于 x 的函数，记为 $f(x)$
则 $\int_0^{x-\ln(1+x)} \frac{\sin t^2}{t}\,dt$ 是 x 的复合函数，即 $f(\underbrace{x-\ln(1+x)}_{\text{记为}})$
$f(g(x))$）

记为 f(g(x))，再套用 [1])

3 其它公式和神器

(1) $\begin{cases} a^x-1 \sim x\ln a & (x\to 0) \\ \sqrt[n]{a}-1 \sim \frac{1}{n}\ln a & (n\to\infty) \end{cases}$

注意! $(a^x)'=a^x\ln a$ 别混!

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x=0 \quad (\alpha>0)$ ⇦ 大神器! 至好用!

从此——

$\lim\limits_{x\to 0} x\ln x=0$; $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}\ln x=0$; … 秒算!

(3) $\ln u \sim u-1 \quad (u\to 1)$ ⇦ 好用! 可帮助去 ln 符号

从此——

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}$$

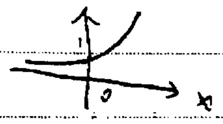
轮加算!

P5: 公式 $\lim u^v \overset{1^\infty}{=} e^{\lim v\ln u} = e^{\lim v(u-1)}$ 正是这个道理.

(4) 常见单侧极限 ⇦ 不用背，看图yy即可；首先你要会图…

① 含 a^x or $a^{\frac{1}{x}}$ (特别地，$a=e$)

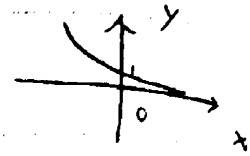
当 $a>1$ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0, & \lim\limits_{x\to+\infty} a^x=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^-} a^{\frac{1}{x}}=0, & \lim\limits_{x\to 0^+} a^{\frac{1}{x}}=+\infty \end{cases}$



(再读一遍，看图说话，不许背！)

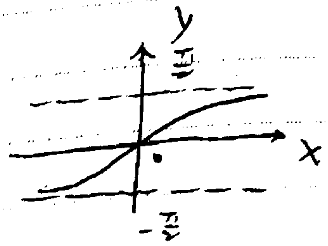
·BMDM·

当 $0<a<1$ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} a^x=+\infty, & \lim\limits_{x\to+\infty} a^x=0 \\ \lim\limits_{x\to0^-} a^{\frac{1}{x}}=+\infty, & \lim\limits_{x\to0^+} a^{\frac{1}{x}}=0 \end{cases}$

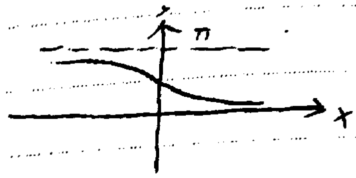


② 含 arctanx 或 arccot 的函数

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x=-\frac{\pi}{2} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x=\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

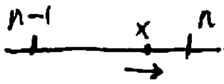


$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arccot} x=\pi \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arccot} x=0 \end{cases}$$



③ 取整函数 $[x]$ （即不大于 x 的最大整数）

$\begin{cases} 当 x\to n^-, & [x]=n-1 \\ 当 x\to n^+, & [x]=n \end{cases}$ ，n 是整数



（☺ kira备注：这个也不需要背！极限 $x\to a$ 的实际意义是"取遍 a 两侧邻域内所有点，但取不到 a"；所以 $x\to n^-$ 时，取遍 n 左侧附近所有点，但它们都比 n 小，而肯定比 $n-1$ 大，故有 $[x]=n-1$，$(x\to n^-)$；$x\to n^+$ 可类比地得出）

(5) 无穷大从低阶到高阶的排序： ☞ 常考！

（低） $\log_a^n\ (a>1)$，n，$n^k\ (k>1)$，$a^n\ (a>1)$，$\boxed{n!}$，n^n （高） $(n\to\infty)$

即：对数函数 → 幂函数 → 指数函数 → 阶乘 → 超越

例3

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0 \quad ; \quad \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$$

能不能一眼看出？

在本部分中，你必须清楚以下常识：

1 无穷小的运算

- 无穷小 × 无穷小 = 阶次之和 （大吞小）

如 $o(x)\cdot o(x^2) = o(x^3)$

- 无穷小 + 无穷小 = 阶数取低 ← 必须为同阶相加，同阶无法制！☆

如 $o(x)+o(x^2) = o(x)$

（☺ Kira备注：以上为Taylor展开式求极限的计算依据，以此决定"展开几项"和"Peano余项的处理"。）

例1

求极限

step 0: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3}$

step 1: $= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2)\right)\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)-x(1+x)}{x^3}$

step 2: $= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)-x(1+x)}{x^3}$

$= \dfrac{1}{3}$ ※

（☺ Kira解读：

① step 0中，分母为 x^3，甚至可以猜到 $x(1+x)$ 一定被消去了

② 因为分母为 x^3，所以 e^x 展到 $o(x^2)$，$\sin x$ 展到 $o(x^3)$，即所有能得到 step 1中）

·BMDM·

x^3的情况都必须保留

③ step 2: 只保留到 x^3 级即可，更高阶算都不必算！)

2 无穷小的性质

- 有界 × 无穷小 = 无穷小
- $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \beta = \alpha + o(\alpha)$； ⇦ 做题没思路不妨在本行试一试，万一做出来了呢～
- $\left.\begin{array}{l}\alpha \sim \alpha_1,\ \beta \sim \beta_1 \\ \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = A\end{array}\right\} \Rightarrow \lim \frac{\beta}{\alpha} = A$

3 必须会的不等式

- $\frac{2}{\pi}x < \sin x < x < \tan x \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$
- $\ln(1+x) < x \quad (x > 0)$

4 极限四则运算法则

已知 $\lim f = A$，$\lim g = B$.

① $\lim (f \pm g) = A \pm B$

② $\lim fg = AB$

③ $\lim f/g = A/B \quad (B \neq 0)$

5 极限运算技巧的根基

已知 $\lim\limits_{u \to a} f(u) = f(a)$，$\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = a$

$\Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = f[\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)]}$ ⇦ 也就是说，极限可往里走了!!!

对于连续函数，例如 $\lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{x\cos x - 1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}$ 棒呆!

★kira忠告

<1> 二、三也常採另一种解法，不分你我；

<2> 六、七万能、无敌！

<3> 五要条理分明

正片开始！必会套路联盟

一、有理函数的极限 $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$

▲二、无理函数的极限及排序（当分子、分母出现无理式）

① $\frac{0}{0}$ （$x\to x_0$时，因式分解出$(x-x_0)$，约去$(x-x_0)$，即可求出）

② $\frac{\infty}{\infty}$（$x\to\infty$时，分子分母同除以x最高次幂）

③ $\infty-\infty$（通分 or 乘因子 or 倒代换）

④ $0\cdot\infty$（化分式 → $\frac{0}{0}$ or $\frac{\infty}{\infty}$）

三、用等价无穷小代换求极限

四、单侧极限问题

▲五、含参变量极限 $f(x)=\lim_{n\to\infty} y(n,x)$ ☆脑子要清醒

及相关讨论极限函数连续性的问题

六、用洛必达法则求极限 $\frac{0}{0}$，$\frac{\infty}{\infty}$（对分子无要求）

▲七、用泰勒公式求极限（最好用！）

八、数列极限（较恶心且难度较高，可先跳过，先掌握基本type即可！）

◎ 将n连续化为x

① 含乘除、乘方
- 次数不均：变一项，放缩 $\sqrt{n^2+n}$
- 次数均作差：提因子，放缩 $(n+1)^k-n^k$
- 单调有界

② 通项为n项和
- 表达式可求
  - ① 等比、等差
  - ② 分项相消 $\frac{n}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$
- 表达式不可求（夹逼）

③ 通项为n项积（相消）
- ① 抓单个因子，拆项相消
- ② 等式两边同乘一因子
- ③ 化对数，相消 ✓ ·BMDM·
- ④ 不能简化用夹逼

（每种对应都的过例题才行！）

这就是"框架"，把出题方向穷尽，并各有对策!!!

一 有理函数的极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\begin{cases}0, & n<m\text{时}\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & n=m\text{时}\\ \infty, & n>m\text{时}\end{cases}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\begin{cases}\dfrac{P_n(x_0)}{Q_m(x_0)}, & Q_m(x_0)\neq 0\\ \infty, & Q_m(x_0)=0,\ P_n(x_0)\neq 0\\ \dfrac{0}{0}\text{型}, & Q_m(x_0)=0,\ P_n(x_0)=0\end{cases}$$

（kira备注：这两个不用死背，用2举例就理解了. 👍）

例1

求 $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$

☆此题咋一看属于$\frac{0}{0}$型，中心思想是"分子凑$(x-1)^2$，约去分母"

解：

有 $x^{n+1}-(n+1)x+n=(x^n-1)x-n(x-1)$

$=(x-1)[x(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)-n]$

$=(x-1)^2[x^{n-1}+2x^{n-2}+\cdots+(n-1)x+n]$

$\Rightarrow I=\lim_{x\to 1}x^{n-1}+2x^{n-2}+\cdots+(n-1)x+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

（kira备注：本题运算技巧较难，看懂即可。但以下两点必须掌握会用：① 分子凑$(x-x_0)$约去分母的套路；
② $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$ 背）

二 无理函数的极限

(1) $\dfrac{\infty}{\infty}$型：$\frac{\infty}{\infty}$型是极常见也极易懵比的一种极限形式。
拿到手后永远只做一件事：分子分母同除以x最高次幂

over了

例2

求 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$

解：原式

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}-1}{\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}$$

⇦ 分子分母同除以 x 最高次幂 x
因 $x\to-\infty$，原题有 $\sqrt{\ }$，所以除以 $-x$
根号内除以 $(-x)^2=x^2$

$$\left(=\frac{\sqrt{4+0-0}-0-1}{\sqrt{1+0}}\right)$$

⇦ 这种做法的好处在于，只剩下 0 和常数

$$=1$$

(2) $\dfrac{0}{0}$ 型：思路与 (1) 例1 相仿，即找分子分母的公因子并约去。
但这种无穷式极限（如 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}=\dfrac{n}{m}$）考试并不常见。
大多数 $\frac{0}{0}$ 型可用泰勒（等价无穷小）加洛必达解决！

(3) $\infty-\infty$ 型：😀 这是我在考研初期最困惑的一种题型，
每次求斜渐近线都很抵触，但其实掌握后
非！常！简！单！方法是用通分、乘因子、倒代换
等方式，将其转化为分式，再求极限

例3

求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[(x+2)e^{\frac{1}{x}}-x\right]$

解：

令 $x=\dfrac{1}{t}$ 则 ⇦ 倒代换！变出分式来！

$$I=\lim_{t\to0}\frac{e^t-1+2te^t}{t}=\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}+2\lim_{t\to0}e^t=3$$

☆

😀 妈妈再也不用担心我求不出渐近线啦！

·BMDM·

(4) $0\cdot\infty$ 型：此型与 $\infty-\infty$ 类似，也要化为分式，呈 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 后，再求极限。另外，这种形式极易出确定待定极限的题目，我们接下来举例展开。

例 4

求 $\lim\limits_{x\to1}(x-1)\tan\frac{\pi x}{2}$

解：令 $t=x-1$，则化为更直白的 $0\cdot\infty$ 型

$$I=\lim_{t\to0} t\cdot\tan\frac{\pi(t+1)}{2}$$

$$\overset{①}{=}\lim_{t\to0} t\cdot\left(-\cot\frac{\pi t}{2}\right)$$

$$=-\frac{2}{\pi}\lim_{t\to0}\frac{\frac{\pi t}{2}}{\tan\frac{\pi t}{2}}=-\frac{2}{\pi}$$

kira流：(拍黑板)

$$\boxed{-\frac{2}{\pi}}\lim_{t\to0}\boxed{\frac{\frac{\pi t}{2}}{\tan\frac{\pi t}{2}}}$$

· 每一步都把系数早早提前　　· 与调保形式一致

· 写得清楚明白

→ 是提高计算速度和准确率的关键！

→ 也是培养风手法老练的精髓

→ 这在求极限和后面求积分中非常关键！

做题快到飞起，且赏心悦目！

• 确定待定极限的方法

△ 工具：(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=A\neq0$，$g(x)$ 是 n 次多项式

⇒ $f(x)$ 也是 n 次多项式（即最高次幂到 x^n）

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A\neq 0$，若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$

$\Rightarrow$ $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶无穷小

(iii) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A=0$，若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$，则当 $x\to x_0$

$\Rightarrow$ $f(x)$ 必是 $g(x)$ 的高阶无穷小.

☆(iv) $\lim f(x)g(x)=A$，若 $\lim g(x)=\infty$，则必有 $\lim f(x)=0$.

（ Kira：(iv)非常好！用来处理 $\infty-\infty$，可以直接拿到无穷小的式子.）

例5

确定 a,b 的值，使 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$

解：

$\because$ 左端 $=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-a-\frac{b}{x}\right)=0$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-a-\frac{b}{x}=0$ ⇐ 用(iv)直接得到

$\Rightarrow$ $1-a=0$ $\Rightarrow$ $a=1$

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-x)$ ⇐ $\infty-\infty$ 转化为分式，用(3)

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-x}{\sqrt{x^2-x+1}+x}=-\frac{1}{2}$ ⇐ 分子有理化

综上 $a=1$，$b=-\frac{1}{2}$ ☆

三 用等价无穷小代换求极限

千古难题 到底什么时候什么情况下才能换等价无穷小？为什么我一换就错？根本不科学

Kira 一本正经地说：等价替换只能用于整体结构里面的因式

△ 关于因式：因式就是乘法 $A\cdot B$，$A\cdot\frac{1}{B}$ 都算
只要出现 $+$、$-$，对不起，换不了。

△ 关于整体结构：因式必须"独立而完整"，没有一点杂质
如：$A\cdot B$ 中，A 可换；
如：$(A-B\cdot C)$ 中，B 不可换，A 更不可换；

举例：

① 不穿衣服组（光杆因式）

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to0}\sin x\cdot x=\lim\limits_{x\to0}x^2 & (\checkmark)\\ \lim\limits_{x\to0}\sin x+x=\lim\limits_{x\to0}2x & (\times)\\ \lim\limits_{x\to0}x+x\sin x=\lim\limits_{x\to0}x+x^2 & (\times)\end{cases}$$

② 穿衣服组（指在复合函数外下的因式）

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to0}e^{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}e^{x^2} & (\checkmark)\\ \lim\limits_{x\to0}\sin^5 x=\lim\limits_{x\to0}x^5 & (\checkmark)\end{cases}$$

（此处可直接替换等价无穷小的原因在于，我们在前面常识中提到的，极限号可以往里走，即

$$\lim_{x\to0}e^{x\sin x}=e^{\lim\limits_{x\to0}x\sin x}=e^{\lim\limits_{x\to0}x^2}=\lim_{x\to0}e^{x^2}$$

自然，像 $\lim\limits_{x\to0}e^{x\sin x-\tan x}$ 就不能乱换，因为"整体不纯"）

啊！ 你真的分得清"求极限"和"等价无穷小"吗？
不妨看一下这个老生常谈的典型错误

· BMDM ·

例 6

求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}}$

错解: $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{e^x}=1$ (×)

错误原因，按导哥的话"不患寡而患不均"，即人为制造了 x 趋向的先后顺序。有的同学转念一想，"不对！我记得可以提前把分子或分母的因式替换掉啊！也可以把常数极限提前求好，写在前面啊！为啥跑这就错了？！

① 关于"提前替换"

如 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(\sin^2x)\ln(1+x^2)}{x\sin x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\cdot x^2}{x\cdot x^2}=0$

· 请注意，这些替换掉的分子分母采用的是"等价无穷小"，x 保留下来，$\lim\limits_{x\to0}$ 也保留下来，而 $\lim\limits_{x\to0}(1+\frac{1}{x})^x=e$，x 没了，$\lim\limits_{x\to\infty}$ 也没了，只取了常数 e.

② 关于"极限值为常数可提前"

如 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x^2-1)\sin x}{(x^2+1)x}=\lim\limits_{x\to0}-1\cdot\dfrac{\sin x}{x}=-1$

· 其中，我们提前求了 $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}=-1$，这样操作的前提是它是常数，且作为因子出现。而错例中 $(1+\frac{1}{x})^x$ 作为超越函数的底数不满足条件，还有一层 x 次方在"制约"它，否则 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$ 就可写为 $1^x=1$ 了，这显然不对。

· 若此题改为 $\lim\limits_{x\to\infty}[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})](1+\frac{1}{x})^x$ 则完全可以写为

$$= \lim_{x\to+\infty} e\cdot[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})]$$

至此，这道题的利用价值基本被榨取干净了。

正解：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{(1+\frac{1}{x})^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}}=\lim_{x\to+\infty}e^{x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})}=e^{\frac{1}{2}}$$ ☆

例题大家可以自行找来练习，原则很简单，就是争取把各种奇奇怪怪形式都替换成 x 的多项式（x^a），方便约分。

另外，凡能用等价无穷小解决的问题，都可以用泰勒解决！！！

四 用泰勒公式求极限

- 公式就背P1给的那两组就好；
- 泰勒最大的好处，在于"直白"，直接带式子就行；
- Peano余项处理起来可能不那么舒服，把握好P5中等价无穷小的运算法则，慢慢就形成对"大吞小"的感性理解了。

例7

求极限 $\lim_{x\to0}\dfrac{1-x^2-e^{-x^2}}{x\sin^3 2x}$

（ kira切适切：像今天这种情况，就是典型的泰勒情形，用其它方法真的会做吐。）

解：$I=\lim_{x\to0}\dfrac{1-x^2-(1-x^2+\frac{1}{2}x^4+o(x^4))}{x(2x)^3}=-\dfrac{1}{16}$ ☆

$x \to x_0$

如例题所示，当极限分子或分母出现若干项的代数和，可将表达式中的初等函数用 x_0 的泰勒公式替换，使原极限转化为 $x-x_0$ 的有理分式的极限，这种极限是易求的。

而对于考研求极限题目，我们最终都可以化为 $x \to 0$ 的极限式，所以用到的泰勒展式就是 f 的麦克劳林展式（即 $x_0=0$）

对于 $\ln(1+\varphi(x))$，$e^{\varphi(x)}$，$(1+\varphi(x))^{\alpha}$ 这些不舒服函数，用泰勒往往会有非常好的效果，大大提高做题速度。

例 8

求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$

解：

$$I=\lim_{x\to\infty}\left\{x-x^2\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]\right\}=\frac{1}{2}$$

至于泰勒展开到第 n 项合适，以例 7 为例（其它题同理）

① 把分子碍事的 $1-x^2$ 消掉

② 比分母 x^4 的无穷小更高阶，即 $o(x^4)$ 或 $o(x^5)\cdots$，这样 Peano 余项和分母之比自然为 0

③ 分子一定会出现 x^4 项，不然题就出错了。

⇨ 这样你自然会得到一个非常舒服的常数结果。

三 单侧极限问题

单侧极限在求渐近线，间断点的题中都有了应用，不害怕。

因为，无穷不太题，对找 P3－P4 中提到的常见单侧极限足够警觉就好。计算上与求双侧极限并不有太大区别，注意剥除清晰。

例 9

设 $f(x)=(1+x)\arctan\frac{1}{1-x^2}$，判别 $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 是否存在？

解：

$x=\pm 1$ 为无定义点 ⇨ 求间断点相关的题目，一语不说先写无定义点，再找分段函数分段点。

① 由 $\begin{cases}\lim\limits_{x\to -1^-}\arctan\frac{1}{1-x^2}=-\frac{\pi}{2}\\ \lim\limits_{x\to -1^+}\arctan\frac{1}{1-x^2}=\frac{\pi}{2}\\ \lim\limits_{x\to -1}(1+x)=0\end{cases}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to -1}f(x)=0$ ⇨ 无穷小乘常数还是无穷小，极限为 0.

② 由 $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-}\arctan\frac{1}{1-x^2}=\frac{\pi}{2}\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\arctan\frac{1}{1-x^2}=-\frac{\pi}{2}\\ \lim\limits_{x\to 1}(1+x)=2\end{cases}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 不存在。

到后期水平较高时，看一眼函数即知左右极限是否相等，当有把握左右极限相等时，不必分 $x\to x_0^-$ 和 $x\to x_0^+$，直接写 $x\to x_0$ 即可，可节省做"判间断点类型"题的时间和步骤。

· BMDM ·

六 用洛必达法则求极限

☺ 这大概是不少人最爱用的方法吧，因为太万能了！只要满足 $\frac{0}{0}$ 和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型就可以无限使用，使天下没有难求的极限！不过我个人很少用洛必达，因为求导加代值真的好烦哦…求极限题目，很多都是「口算级」的柔勒啦~

● 以下给大家几点求洛必达的建议和"行规"：

1. 每用一次洛必达法则后，都要化简，分离常数，把式子化到不能更简了，再用下一次洛必达。

2. 洛必达法则失效，若 $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} \neq A$ 或 ∞ 也不是未定式，不能断定 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 不存在，此时洛必达失效，几种常见的失效情况：

① 当 $x \to 0$ 时，函数式中有 $\sin\frac{1}{x}$ 或 $\cos\frac{1}{x}$

（因为求导不能消除 $\sin\frac{1}{x}$ 或 $\cos\frac{1}{x}$，而 $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ 不存在）

同理，$x \to \infty$ 时，函数式中有 $\sin x$ 或 $\cos x$。

② 多次使用洛必达法则，极限式出现循环

如 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$，$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

（☺ kira 得意地说：以上两式均为前面提到的 $\frac{\infty}{\infty}$ 型，所以分子分母同时除 x 的最高次方立即出结果！答案分别为 1 和 1 ）

3. 极限式中含 $\frac{1}{x^k}$，可考虑用变量代换 $t = \frac{1}{x^k}$

（☺ 毕竟，幂函数的导数比分数的导数好求多了）。

· BMDM ·

例10

求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(e^x+e^{-x})-\ln(2\cos x)}{x^2}$

解：$I\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}+\dfrac{\sin x}{\cos x}}{2x}$

$\overset{\text{化简,分离常数}}{\underset{\text{(化最简形式)}}{=\!=}}\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{e^x+e^{-x}}\lim\frac{e^x-e^{-x}}{x}+\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\cos x}\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times2+\frac{1}{2}\times1\times1=1$ ☆

另外，在涉及抽象函数及其导数的证明题中，尝试使用洛必达会有奇效~

七 含参变量极限

啊！这个我要大说特说！在备考时，我是把 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(n,x)$ 研究得极透彻的，整个套路非常清楚~考研真题果然，考了一道大题，当时的我在想，"这道题肯定要虐死一大批套路不清楚的人"，然后一步不停地写完了……我去年在考场上高数真心一步没停，飙风到底，很爽！（结果被线代的计算量搞得脑子晕了 TAT）

形式 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(n,x)$，其中 n 是正整数，为极限变量，x 是函数 $f(x)$ 真正的变量。这种函数我们称"极限函数"。

极限函数一般是分段函数！一见到极限函数，脑子里立刻要浮出两字：分段！

怎么分？

(1) 当 $y(n,x)$ 中项仅为 x^n（一般是 $x^{g(n)}$，$g(n)$ 为 n 的多项式）

应以 $|x|=1$ 为分界点，因为：

当 $n\to\infty$，若 $|x|<1$，则 $x^n\to 0$，若 $|x|>1$，则 $x^n\to\infty$

(2) 当 $y(n,x)$ 中项仅为 n^x（一般为 $n^{g(x)}$，$g(x)$ 是 x 函数时，

应以 $x=0$ 为分界点，因为：

当 $n\to\infty$ 时，若 $x<0$，则 $n^x\to 0$；若 $x>0$，则 $n^x\to+\infty$

(3) 〈升级版〉当 $y(n,x)$ 中项仅为 x^n 和 a^n（一般为 $x^{g(n)}$ 和 $a^{g(n)}$）

应以 $\left|\frac{x}{a}\right|=1$，即 $|x|=|a|$ 为分界点，因为：

当 $n\to\infty$ 时，若 $|x|<|a|$，则 $\left(\frac{x}{a}\right)^n\to 0$；若 $|x|>|a|$，则 $\left(\frac{a}{x}\right)^n\to 0$

(4) 〈升级版〉当 $y(n,x)$ 中的项仅为 $a^{g(n,x)}$ 时，其中 $g(n,x)$ 是 n,x 的函数，应以 $a^{g(n,x_0)}=1$，即以 $g(n,x_0)=0$ 的 x_0 为分界点

- 复习一下，遇到极限函数问题，要仔细寻找以下形式：
  x^n，n^x，x^n 和 a^n，$a^{g(n,x)}$
  并对证下药，立刻找到分段点，求取 $f(x)$ 的真身（不含 n）
- 到后期，对于"$\to 0$"和"$\to\infty$"会形成感性理解，看一眼就会对题目和对策有准确判断了。
- 下面，先用例题练练手，再迎战终极 Boss.

例 11

求极限函数 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^n}$ $(x\geq 0)$

解:

Q: 拿到手第一眼判断这是什么?

A: 这是分段函数!分!段!函!数!是 x 的函数

好,下面正式开始。先判形式:x^n(对应 P19. (1))

以 $x=1$ 为分界点,当 $x=1$ 时,$f(x)=1/2$

① 当 $0\leq x<1$ 时,$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^n}=\frac{0}{1+0}=0$;

② 当 $x>1$ 时,$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^{-n}+1}=1$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}0, & 0\leq x<1\\ \frac{1}{2}, & x=1\\ 1, & x>1\end{cases}$$

例 12

求极限函数 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(e^n+x^{2n})}{n}$

解:

Q: 拿到手第一眼判断这是什么?

A: 这是分段函数!分段函数!是 x 的函数。

判形式:a^n 和 x^n(对应 P19 (3))

注意到 $x^{2n}=(x^2)^n$,应以 $x^2=e$ 为分界点。

① 当 $x^2=e$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(2e^n)}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln 2+n}{n}=1$ P4

② 当 $x^2<e$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln e^n[1+(\frac{x^2}{e})^n]}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+\ln[1+(\frac{x^2}{e})^n]}{n}$

$=1$

③ 当 $x^2>e$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln x^{2n}[(\frac{e}{x^2})^n+1]}{n}=\ln x^2$

综上 $f(x)=\begin{cases}1, & x^2\le e\\ \ln x^2, & x^2>e\end{cases}$

（Kira强调：间归 $f(x)$ 的本来面目，做题最重要是清晰！）

例11 和例12 是基本功，考试不会这么直白，题目层次稍一升高，思路（套路）一定要清楚！

例13

确定极限函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^n+x^{-n-1}}$ 的间断点及类型

解：

Kira 的嘲讽：很多没经验的同学拿到此题立刻懵逼，感觉无法下手（因为好像有太多地方需要下手，但顺序理不清）

Kira 的锦囊：拿到手抢答："$f(x)$ 是分段函数！"

Step 1. 求出 $f(x)$ 本体（去掉 n，只剩 x）

Step 2. 按求 $f(x)$ 间断点的常规方法来求最终结果.

解: (判: x^n 为 P_{19} (1), 所以 $|x|=1$ 为分界点)

Step 1.

$$g_n(x)=\frac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^n+x^{-n-1}}$$ 在 $x=0$, $x=-1$ 处没有定义

("没有定义"的具体表现是, 最后写"$f(x)=\{$"时, $x=0$ 和 $x=-1$ 将不会出现 (一丝莫名的恐怖...))

所以 $x=1$ 为分界点, ① $f(1)=0$

② 当 $0<|x|<1$, $f(x)=-x$

③ 当 $|x|>1$, $f(x)=x^2$

综上, $$f(x)=\begin{cases}-x, & 0<|x|<1\\ 0, & x=1\\ x^2, & |x|>1\end{cases}$$

Step 2.

由 $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0 ;\\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=1 ;\end{cases}$

$\Rightarrow$ 0 和 -1 是 $f(x)$ 的可去间断点

由 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1$, 所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点.

Kira感叹道：我考试时就是凭借此套路，使第一道开始加难度的高数大题对我来说，毫无难度，顺利答完，一笔不停。

八 数列极限

拿到数列极限往以下三个解题方向考虑

- 将 n 连续化为 x，则根据归结原则，x 函数的极限即为数列极限。【连续化】
- 数列 $\{x_n\}$，若 x_n 已知，则求 k 项和 $U_1+U_2+\cdots+U_k$ 的极限用夹逼定理。【夹逼定理】
- 数列 $\{x_n\}$，若 x_n 未知且 x_n 由递推式 $x_n=f(x_{n-1})$ 给出，用单调有界准则，先证明极限存在，再直接求极限，即设极限为 A，代入递推式两端。【单调有界准则】

(1) 将 n 连续化为 x

例 14

求 $\lim\limits_{n\to\infty}(n\tan\frac{1}{n})^{n^2}$ （n 为自然数）

解：

原极限连续化为 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\cdot\tan\frac{1}{x})^{x^2}$ (1^∞)

$$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x^2(x\cdot\tan\frac{1}{x}-1)} \quad (\infty-\infty)$$

$$\overset{x=\frac{1}{t}}{=} e^{\lim\limits_{t\to0^+}\frac{1}{t^2}(\frac{\tan t}{t}-1)}$$

$$= e^{\lim\limits_{t\to0^+}\frac{\tan t-t}{t^3}} = e^{\frac{1}{3}}$$

于是原式 $=e^{\frac{1}{3}}$

(2) 夹逼定理

夹逼定理是比较讨厌的部分，变化多端，对此学哥提出两个方向，可解决大部分常规夹逼题。如果这俩搞不定，说明题目确实的难了。

两个方向为：

A) 求数列 $\{x_n\}$ 前 k 项和，项数有限，即可用

$$\boxed{1\cdot U_{max} \le U_1+U_2+\cdots+U_k \le k\cdot U_{max}} \quad (*)$$

（k 为有限数，$U_i \geq 0$）

即 "老大说了算" （作为口诀背下来）

例15

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^{-n}+b^{-n}+c^{-n}} \quad (a>b>c>0)$$

解：

有 $\sqrt[n]{(\frac{1}{c})^n} \le \sqrt[n]{(\frac{1}{a})^n+(\frac{1}{b})^n+(\frac{1}{c})^n} \le \sqrt[n]{3(\frac{1}{c})^n}$ $\quad 0<\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<\frac{1}{c}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \quad \| \qquad\qquad\qquad\qquad \| \quad \lim\limits_{n\to\infty}$

$\frac{1}{c} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{c} \quad \Leftarrow \quad \frac{1}{c}$

所以极限为 $\frac{1}{c}$

* 例15中，$(\frac{1}{c})^n$ 是老大，套用 $(*)$ 式，故有两端形式。

B) 求数列 $\{x_n\}$ 的无穷项之和，则用

$$\boxed{k\cdot U_{min} \le U_1+U_2+\cdots+U_k \le k\cdot U_{max}} \quad (**) \quad (k\to\infty)$$

即 "人多力量大" （在无穷大的 k 的作用下，U_{min} 和 U_{max} 的差距可忽略不计）

例16.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)$$

解：

有 $\dfrac{\frac{1}{2}n(1+n)}{n^2+n+n} \le \sum_{i=1}^{n}\dfrac{i}{n^2+n+i} \le \dfrac{\frac{1}{2}n(1+n)}{n^2+n+1}$

$$\begin{array}{ccccc} \| & & & & \| \\ \frac{1}{2} & \Rightarrow & \frac{1}{2} & \Leftarrow & \frac{1}{2} \end{array}$$

所以极限为 1/2.

这是易考的一道例题，有的同学可能比较困惑"为何没有(**)式中所写的 k 呢？"其实有的！ $k=\frac{1}{2}n(1+n)$，也就是 $1+2+\cdots+n$，也就是说，例16本质上不是 n 项和，而是 $\frac{1}{2}n(1+n)$ 项和！而 $U_{min}=\frac{1}{n^2+n+n}$，$U_{max}=\frac{1}{n^2+n+1}$.

设计悬疑 想到这里，题目就十分明确了.

夹逼定理还有很多分类和对策，如我P7框架所示。为保证框架紧凑，我们先看第(3)个方向，再来补充夹逼定理.

(3) 利用单调有界准则

▲ $\{x_n\}$ ↗ 且有上界
或 $\{x_n\}$ ↘ 且有下界 } 则 $\{x_n\}$ 一定收敛 ⇔ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

例17

设 $a>0$，$x_1>0$，$x_{n+1}=\frac{1}{3}\left(2x_n+\frac{a}{x_n^2}\right)$，$n=1,2,\cdots$

证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

8′　　2′（2分送你！）

· BMDM ·

Pf. $x_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n + x_n + \frac{a}{x_n^2})$ $(\sqrt[3]{abc} \le \frac{1}{3}(a+b+c))$

$\ge \sqrt[3]{a}$ 有下界

题出得妙！

$x_{n+1} - x_n = -\frac{1}{3}x_n + \frac{a}{3x_n^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{a-x_n^3}{x_n^2} \le 0$ （因为 $x_n \ge \sqrt[3]{a}$）

单调递减 $\Rightarrow$ 收敛

$\therefore \lim_{n\to\infty} x_n$ 存在，令为 A，则 $A = \frac{1}{3}(2A + \frac{a}{A^2}) \Rightarrow A = \sqrt[3]{a}$ ☆

☺ "找下界（上界）"和"证单调"都是必考的硬功夫，其中"找上下界"非常常用基本不等式，即

$$\boxed{\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n) \ge \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}} \quad ☆$$

去漂亮地找下界

补(4) 利用定积分定义 $\int_a^b f(x)dx \triangleq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n f(a+\frac{b-a}{n}i)\cdot\frac{b-a}{n}$

☺ 有时夹逼夹不住，可考虑用定积分定义，非常有规律，很好判断。16刚考过一道填空
（而我，下笔把 cos 写成了，4分没了…
考场一定冷静！）

▲ 学哥的套路极好，清晰，易记！

· 99%的概率下题会出成这样：$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n f(\frac{i}{n})\frac{1}{n} = \int_0^1 f(x)dx$

套路如下：step1 提出 $\frac{1}{n}$（一定能！）

step2 凑出 $\frac{i}{n}$（一定能！否则题出错了）

step3 $\frac{1}{n}$ 写成 dx，$\frac{i}{n}$ 写成 x（相当于照抄）

Over!

例18

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$$

解：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}\ \underline{\underline{\text{step1}}}\ \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\ \underline{\underline{\text{step3}}}\ \int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln 2$$

【一定熟悉记住n与n的关系】　　先写$\frac{1}{n}$，再慢慢算剩下什么

再来道老话题：

例19

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$ ⇨ "见到$\frac{1}{n}$、$\frac{2}{n}$、…、$\frac{n}{n}$会往定积分定义想"

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdots\cdot\frac{n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$$ ⇨ 遇连乘n方等不变形的套路是变$e^{\Sigma\ln}$

$$=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{i}{n}}=e^{\int_0^1\ln x\,dx}=\frac{1}{e}$$

番外篇：①数列极限及夹逼定理的补充

① 关于数列极限n项和、n项积的相关题型真心又臭又多，老大认为钻研的话，时间利用的性价比太低，所以此番外掌握最好，没时间的话，也可直接跳过不看。

② 在P7、八中我已列出3大类题目及其简单时答，下面结合具体例题展开。

1. 含乘除、乘方　（n、n^2、…、n^k、…）

(1) 次数不均　（$n+n^2+n^3+\cdots$　与$(n+1)^2-n^2$相对）

② 采用"老大说了算"法　（和P24 A）一个本质）

例20

求$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+n}$

解：

由于 $\sqrt[n]{n^2} \le \sqrt[n]{n^2+n} \le \sqrt[n]{2n^2}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \| \qquad\qquad \| \lim\limits_{n\to\infty}$

$1 \Rightarrow 1 \Leftarrow 1$

所以极限为1 ☆

1.2 次数不同 并作差

提公因子 + 放缩法 + 夹逼定理.

例 21

$$\lim_{n\to\infty} [(n+1)^k - n^k] \qquad (0<k<1)$$

解：

$$0<(n+1)^k-n^k=n^k\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^k-1\right]<n^k\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]$$

$$=n^k\frac{1}{n}=\frac{1}{n^{1-k}} \to 0$$

所以原极限为0. ☆

KITA 提示：遇到棘手的作差题干，可尝试提公因子，很好用，番外篇②还会再讲.

2. 通项为n项和

2.1 表达式可求

求前n项和表达式，再求极限.

▲ 求n项和表达式方法
- 等比数列求和公式. 等差数列求和公式.
- $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
- 分项相消

给两个提示掌握和公式： （敲黑板！）

- $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$

- $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

例22

设 $y_n = (1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\cdots\cdots(1-\frac{1}{n^2})$，求 $\lim_{n\to\infty} y_n$

〈解一〉

注意到 $1-\frac{1}{k^2} = \frac{k^2-1}{k^2} = \frac{k-1}{k}\cdot\frac{k+1}{k}$ $(k=2,3,\cdots)$ 因

$y_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\cdots\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2n} \longrightarrow \frac{1}{2}$

故 $I=\frac{1}{2}$

〈解二〉 取对数 有 $\ln y_n = \sum_{k=2}^{n} \ln(1-\frac{1}{k^2})$ 因

$\ln(1-\frac{1}{k^2}) = \ln(k^2-1) - \ln k^2$

$= \ln(k+1) + \ln(k-1) - 2\ln k$

(消到剩两头) ⇨ $= [\ln(k-1)-\ln k] - [\ln k - \ln(k+1)]$

$\therefore \ln y_n = -\ln 2 - [\ln n - \ln(n+1)]$

$I = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} e^{\ln y_n} = e^{-\ln 2} = \frac{1}{2}$.

- 以上为"$1-\frac{1}{k^2}$"的两种处理方法.

在平常做题时，也要注意多归纳一些有特色形式的处理套路，建立做题熟练度和手感 ~.

2.2 表达式不可求

"夹逼大量大"法.

3. 通项为n项积

(3.3)

3.1 把每个因子合并或拆开，并把中间的项消掉

例23

设 $y_n = 1+\frac{1}{1+2}+\cdots+\frac{1}{1+2+\cdots+n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

解：

由 $1+2+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$

且 $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ 所以

$$y_n = 1+\frac{2}{2\times3}+\frac{2}{3\times4}+\cdots+\frac{2}{n(n+1)}$$

$$= 1+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)$$

从而 $I=2$

3.2 等式两边同乘一个因子，然后"蝴蝶效应".

例24

设 $|x|<1$，$y_n=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$

解：

左写　　　　左写

$$(1-x)y_n = (1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$$

$$= (1-x^4)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$$

$$= \cdots = (1-x^{2^{n+1}})$$

当 $|x|<1$ 时 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1-x}(1-x^{2^{n+1}})=\frac{1}{1-x}$

3.3. 取对数化n项和（最直接，最好用）

（如例22）

• 不能化简则用夹逼定理.

· 放大和缩小函数的常用方法.

① 直接观察或简单推算 (如例20. 例21)

② "人多力量大"模型: $k\cdot U_{min}\le U_1+\cdots+U_k\le kU_{max}$

③ 分母放大比值缩小, 分子缩小比值放大.

④ 若干正数相乘, 略去小于1因子放大, 略去大于1因子则缩小.

⑤ 利用已知不等式.

番外篇② 其它未分类的有套路题型 (小众套路)

A) ln (一堆项相加) 的处理方法.

方法: 提取 $e^{加}$ 公因式, 立刻就好!

例25

求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(e^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x})-\sin x}{\arctan(2\sqrt[3]{1-\cos x})}$

解: $\ln(e^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x})$

$=\ln\left(e^{\sin x}\left(1+\dfrac{\sqrt[3]{1-\cos x}}{e^{\sin x}}\right)\right)$ ⇨ 把 $e^{加}$ 提出来.

$=\sin x+\ln(1+\sqrt[3]{1-\cos x}/e^{\sin x})$

所以 $I=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\sqrt[3]{1-\cos x}/e^{\sin x})}{\sqrt[3]{1-\cos x}/e^{\sin x}}\cdot\dfrac{1}{2e^{\sin x}}\cdot\dfrac{2\sqrt[3]{1-\cos x}}{\arctan(2\sqrt[3]{1-\cos x})}$

$=1\cdot\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{2}$. ※

✧ 我们常会遇到 $\ln(e^{加}+\sqrt{\ }+\times\times)$ 这种形式.
提取 $e^{加}$ 公因式的好处在于: ① "加"可以拿到 ln 外, 如例25的 $\sin x$; ② 得到 $\ln(1+\times\times)$ 标准形式~

总之，有形式垃圾的加加减减，多提公因式有好处！

B) 超越函数的极限. x^x，$\sin^x x$，……

方法：综合使用多种技巧. 先写成指数函数 $e^{\cdots \times \ln \cdots}$

例26

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^x-\sin^x x}{x-\arctan x}$$

解：

$$I=3\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^x x\left[\left(\frac{x}{\sin x}\right)^x-1\right]}{x^3}$$

kira教导的好习惯：提公因式！！！

函神教导的好习惯：P10. 把常数早早提前！！！

由 $\lim_{x\to 0^+}\sin^x x=e^{\lim_{x\to 0^+}x\ln\sin x}=e^{\lim_{x\to 0^+}\sin x\ln\sin x\cdot\frac{x}{\sin x}}=e^{0\cdot 1}=1$

[PS: 关于 $x\ln\sin x$ 的简单思路说一下，因为P3中说过 $\lim_{x\to 0}x^a\ln x=0$，所以当看到 $\ln\sin x$，便自然去凑"$\sin x\ln\sin x$"这样多出的因子自然为 $\frac{x}{\sin x}$ 极限可求]

$$I=3\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x\ln\frac{x}{\sin x}}-1}{x^3}=3\lim_{x\to 0^+}\frac{x\ln\frac{x}{\sin x}}{x^3}=3\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x}{\sin x}-1}{x^2}$$

$$=3\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\sin x}{x^3}=3\times\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

[PS: 在 $\lim_{x\to 0^+}\ln\frac{x}{\sin x}$ 这一步中，我们自然用到前面P3所给的 $\lim_{u\to 1^+}\ln u=u-1$. 这个极限式无比好用无比快速！！！]

kira：要想计算玩得转，大小公式先背烂～
再通过做题，将理论用于实践. 我不太喜欢"背"这个

字眼，我喜欢"内化"，将公式内化，使它成为如你手足般自然的工具，运用公式，如你平日里呼吸吃饭睡觉那样，无知无觉。

B) 关于"能不能拆"的两个案例 (取材于kira以前的答疑)

案例1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x\cos x}{x^3}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^3} - \dfrac{\cos x}{x^2}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{\cos x}{x^2}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

✗

案例2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x+3^x-2}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{x} + \dfrac{3^x-1}{x}$

$= \ln 2 + \ln 3$

✓

(而正确答案采用洛必达法则，得出结果 $\frac{1}{3}$.)

(kira：要完成"拆"这个动作把握2个原则
① 拆开的两部分必须各自存在极限.
(案例一拆后是 $\infty - \infty$ 了)
② 拆开了就不要再合上！一拆到底.)

「大王小王篇」之

求导计算.

· 本Part的解锁条件：求极限小case.
· 本Part的特别关注：P37 最后2行　P41 方框（看到即赚到）　▲P45 kira大锦囊　P47 五.

· 本Part的队长：老生常谈的概念可略过.

在本部分中，你必须熟练记忆并运用以下公式和结论

1 导数定义

$$
\begin{cases}
\text{大纲：} & f'(a) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} & ① \\
\text{补充：} & f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a} & ② \\
\text{左导数：} & \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \triangleq f_-'(a) & ③ \\
\text{右导数：} & \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \triangleq f_+'(a) & ④
\end{cases}
$$

Kira 强调：以上4个定义式必须"看到左边自动弹出右边，看到右边自动弹出左边"，熟练到此！！！

Kira 解析：考试没思路时，先把定义式写出来，玩弄一下，思路就有了。看例题↓

—— 例1 ——

设 $f(0)=0$，$\lim\limits_{k \to 0} \dfrac{f(k-\sin k)}{k^2}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在否？

脑补 → $f'(0) = \dfrac{f(0+\square) - f(0)}{\square}$ ← 看着①写，□里把条件代入

解：

$$\lim_{k \to 0} \frac{f(k-\sin k)}{k^2} = \lim_{k-\sin k \to 0} \frac{f(0 + k-\sin k) - f(0)}{k-\sin k} \cdot \frac{k-\sin k}{k^2}$$

⇧ 摆已知条件　　⇧ 凑 $f'(0)$　　⇧ 剩余部队

· BMDM ·

即 $\exists = f'(0)\cdot 0$（无穷小）

移项得 $f'(0) = \exists \cdot \infty$，所以不存在 $f'(0)$

*补充：若有 $\exists = f'(0)\cdot \frac{1}{6} \Rightarrow f'(0) = 6\cdot\exists = \exists$

若有 $\exists = f'(0)\cdot \infty \Rightarrow f'(0) = \exists\cdot 0 = 0$

$\boxed{2}$ 求导工具

（一）公式：

必背基本初等函数求导

高中部（我都懒得写）

- $(x^a)' = ax^{a-1}$ · $(c)'=0$
- $(\sin x)' = \cos x$ · $(\cos x)' = -\sin x$
- $(a^x)' = a^x \ln a$ · $(e^x)' = e^x$
- $\log_a^x = \frac{1}{x\ln a}$ · $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

考研部（必背组）

- $(\tan x)' = \sec^2 x$ · $(\cot x)' = -\csc^2 x$
- $(\sec x)' = \sec x\tan x$ · $(\csc x)' = -\csc x\cot x$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ · $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ · $(\text{arccot}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

考研部（选背神器）

- $[\ln(x+\sqrt{x^2-1})]' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ （要敏感而警觉!!!）
- $(\sin^2 x)' = \sin 2x$
- $(\cos^2 x)' = -\sin 2x$
- $(\sin x\cos x)' = \cos 2x$

(二) 四则运算.

高中部: $\left\{ \begin{array}{l} \cdot\ (u\pm v)' = u'\pm v' \\ \cdot\ (uv)' = u'v + uv' \\ \cdot\ \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2} \end{array} \right.$

高阶 $(uv)^{(n)} = C_n^0 u^{(n)} v + C_n^1 u^{(n-1)} v' + \cdots + C_n^n u v^{(n)}$

(三) 链式法则

若 $y = f(u)$ 可导, $u = \varphi(x)$ 可导, $\varphi'(x) = 0$

则 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$

★(四) 反函数的导数 "很多学生不适应"

1. $y = f(x)$ 可导, $f'(x) \neq 0$, 则 $\varphi'(x) = \dfrac{1}{f'(x)}$

2. $y = f(x)$ 二阶可导, $f'(x) \neq 0$, $x = \varphi(y)$ 为反函数.

$\varphi'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$, $\varphi''(y) = \dfrac{d\left[\frac{1}{f'(x)}\right]}{dy} = \dfrac{-f''(x)}{[f'(x)]^3}$

(☺ Kira 中肯地说: 1 必须背熟, 2 实在背不下就算了)

● 求导运算出现在考研中属于送分题, 之所以出现在《大王小王篇》这个重要的篇章, 也纯粹是为了后面部分打基础, 做热身的.

● 在求导运算部分, 你最重要的任务是"背公式"!!!
背到什么地步? 答: 看到左边就想到右边, 看到右边想到左边!

正片开始！必会题型如下.

一. 显函数求导

二. 隐函数求导
- ① 常规 ($y=f(x)$ 不必回代)
- ② 对数求导法 (幂指函数, 连乘积)
- ③ 参方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ or $\begin{matrix} F(x,t)=0 \\ G(y,t)=0 \end{matrix}$

▲ 三. 变积分限函数求导 (必考) (好玩儿!)

四. 分段函数求导问题

五. 高阶导数
- ① 归纳法
- ② 分解法
- ③ 莱布尼茨公式
- ④ 幂级数展开 (Taylor法).

一 显函数求导

(😊 没有难度, 但务必注意, 复合层次多了容易懵.)

例 1

$y=2^{\sin^2\frac{1}{x}}$, 求 y'

解: $=2^{\sin^2\frac{1}{x}}\cdot\ln 2\cdot(\sin^2\frac{1}{x})'$ (用 $(a^x)'=a^x\ln a$)

$=2^{\sin^2\frac{1}{x}}\cdot\ln 2\cdot 2\sin\frac{1}{x}(\sin\frac{1}{x})'$ (用 $(x^2)'=2x$)

$=2^{\sin^2\frac{1}{x}}\cdot\ln 2\cdot 2\sin\frac{1}{x}\cdot\cos\frac{1}{x}(\frac{1}{x})'$ (用 $(\sin x)'=\cos x$)

$=2^{\sin^2\frac{1}{x}}\cdot\ln 2\cdot 2\sin\frac{1}{x}\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot(-\frac{1}{x^2})$ (用 $(\frac{1}{x})'=-\frac{1}{x^2}$)

Kira备注：考试时卷面直接写最后一行结果即可。

二 隐函数求导

隐函数求导我一直觉得做起来很舒服直白，不难。
关键把握好谁是自变量，谁是谁的函数。

(1) 常规隐函数求导程序

step 1. 首先，将方程两端同时对 x 求导数，得到关于 y' 的方程
step 2. 再由该方程解出 y' 即可

例2

设 $e^{xy}+\tan xy=4x+y$，求 $y'(0)$？

解：

方程两端同时关于 x 求导 有

$$e^{xy}\cdot(xy'+y)+\sec^2 xy\,(xy'+y)=4+y' \quad (*)$$

将 $x=0$ 代入原式，有 $e^{0\cdot y}+\tan 0\cdot y=4\cdot 0+y$

$\Rightarrow x=0$ 时，$y=1$，代入 $(*)$ 时，

$\Rightarrow y'(0)=2$

Kira备注：

1. 例2是隐函数求导最典型的应用，多以利用好原式的直接代入，得到特殊点处 y 值（如上调 $y(0)=1$）
2. y 是 $y(x)$ 的简写，本质是关于 x 的函数，求导时

要用"后之剥开"原则来对待，如 tan y 关于 x 求导，其结果为 $(\tan y)'\cdot y'$，显然，tan y 不包含 x，但求导时要体现 x 的存在）

(2) 对数求导法.

（😀 Kira回顾：遇到指数和连乘取对数已是我在极限部分就总提过的老生常谈啦！一定要会!!!）

方法操作：将 $y=f(x)$ 两端取对数，用按(1)操作.

适用于 ① 形如 $y=f(x)^{g(x)}$ 和幂指函数，取对数得 $\ln y=g(x)\ln f(x)$
② 若干因子幂的连乘积，取对数可化为和、差运算.
如 $y=\dfrac{\sqrt{x-2}}{(x+1)^3(4-x)^2}$ 可看成 $y=(x-2)^{\frac{1}{2}}(x+1)^{-3}(4-x)^{-2}$

取对数化为 $\ln y=\frac{1}{2}\ln(x-2)-3\ln(x+1)-2\ln(4-x)$
再求导可简化很多

(3) 参数方程求导.

形如 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$ 或 $\begin{cases}F(x,t)=0\\ G(y,t)=0\end{cases}$

（😀 求法不需要死记硬背，几步就可以推出来，理解即可）

· $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ ； · $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]/dt}{dx/dt}$

例3

曲线 L: $r=\theta$，求 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时在 L 上点处的切线。

解:

$$L:\begin{cases} x=\theta\cos\theta \\ y=\theta\sin\theta \end{cases}$$

当 $\theta=\frac{\pi}{4}\Rightarrow M_0\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\pi,\ \frac{\pi}{?}\right)\in L$

斜率 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}=\frac{\sin\theta+\theta\cos\theta}{\cos\theta-\theta\sin\theta}$

已得斜率 $\frac{dy}{dx}$ 和 M_0 则切线方程可求

(三) 变限积分函数求导

（kira 感叹道: 这是考研必考的求导类型!!! 长得不好看（看起来复杂），但其实很好做，也很好玩。在中值定理部分有大量应用，属于在该"可看脸都要会"算结果"的题型）

以 $\frac{d}{dx}\int_0^x x\sin(x-t)^2dt$ 为例

公式为 $\frac{d}{dx}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)}f(t)dt=f[\varphi(x)]\varphi'(x)-f(\psi(x))\psi'(x)$

★注意 ① 整个公式本质上是关于 x 的导数，最后结果也只含 x

② 积分上下限均只含 x 的函数

③ 被积函数只含 t（不允许含有一丁点 x 的成分）

解:

$$\frac{d}{dx}\int_0^x x\sin(x-t)^2\,dt$$

▶ step 1. 找t. 并调整 dt

（t 存在于 $\sin(x-t)^2$ 中，x并不能直接搬到积分号外，而为了求导，积分号内必须不能有x，所以要把 dt 变一下，使 x 被"偷梁换柱"）

$$I=\int_0^x -x\sin(x-t)^2\,d(x-t)$$

（这种玩法我们在下一部分：不定积分中会不断强调运用，直到你信手拈来~）

▶ step 2. 把x移出去

$$I=-x\int_0^x \sin(x-t)^2\,d(x-t)$$

▶ step 3. 换元，使被积函数仅有t.

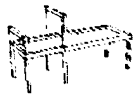
$$I=-x\int_x^0 \sin t^2\,dt = x\int_0^x \sin t^2\,dt$$

（将 t 从 0 积到 x，即相当于把 x-t 从 x 积到 0。

即：$\int_x^0 \to \int_{x-0}^{x-x}$ 即 $\int_x^0$

我做定积分最喜欢玩上下限了，觉得是见证奇迹的时刻！）

千万不要忘记换上下限哦!!!!!!



▶ Step 4. 套公式求导

$$\frac{dI}{dx} = x\sin x^2 + \int_0^x \sin t^2\,dt$$

※

(p.s. ① $\int_0^x \sin t^2 dt$ 视为关于 x 的函数，所以上式套用的是 $(x\varphi(x))' = \varphi(x) + x\varphi'(x)$

② $\frac{d}{dx}\int_0^x \sin t^2 dt$ 套用公式详细点写就是

$$\sin x^2 \cdot x' - \sin 0^2 \cdot 0' = \sin x^2$$

再举例如 $\frac{d}{dx}\int_x^{x^2} \sin t^2\,dt$

$$= \sin (x^2)^2 \cdot (x^2)' - \sin x^2 \cdot x'$$

$$= \sin x^4 \cdot 2x - \sin x^2$$)

(Kira：如果这块还玩不转，请微博私我 @Kira言而信 或旺旺私我，我会提供视频讲解)

例4

$f(x) \in C[0,1]$，$F(x) = \int_0^1 |x-t|\, f(t)\,dt \quad (0<x<1)$

求 $F''(x)$？

解：

$$F(x) = \int_0^x (x-t) f(t)\,dt + \int_x^1 (t-x)\, f(t)\,dt$$

$$= x\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x t f(t)\,dt$$

$$+ x\int_1^x f(t)\,dt - \int_1^x t f(t)\,dt$$

$= \cdots$

※

(p.s. 用上例主要想说明两点：

① 绝对值符号并不可怕，一定不要被吓到，分好正负，把 $\int_0^1$ 变 $\int_0^x + \int_x^1$，去掉绝对值号即可。

② 这里 $(x-t)$ 的处理不是将 $dt \to d(x-t)$，是因为 x 完全可以搬到积分号外。做题目一定要抓住本质，明确自己每一步要达到的效果到底是什么。)

四 高阶导数

· 掌握以下三道例题即可。

★公式要背的！考前背一背，睡前摇一摇，平时不必多用脑容量

· $(a^x)^{(n)} = a^x (\ln a)^n$

▲ · $\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n a^n n!}{(ax+b)^{n+1}}$

· $(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$

· $\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$

· $[\sin(ax+b)]^{(n)} = a^n \sin(ax+b+\frac{\pi}{2}n)$

▲ · $(\sin kx)^{(n)} = k^n \sin(kx + n\frac{\pi}{2})$

▲ · $(\cos kx)^{(n)} = k^n \cos(kx + n\frac{\pi}{2})$

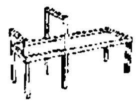
· $[(x+x_0)^m]^{(n)} = m(m-1)\cdots(m-n+1)(x+x_0)^{m-n}$

· $\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

(1) 归纳法

求出函数的一阶，二阶，三阶导数后，归纳规律，直接写出 n阶导表达式，再用归纳法证明。

(上面的公式都可用归纳法求出)



(2) 分解法或间接法

例5

$y=\frac{5x-1}{x^2-x-2}$，求 $y^{(n)}(0)$

解：

$$y=\frac{5x-1}{(x+1)(x-2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}$$

$$A(x-2)+B(x+1)=5x-1 \Rightarrow A=2,\ B=3$$

$$y=2\cdot\frac{1}{x+1}+3\cdot\frac{1}{x-2}$$

$$y^{(n)}=2\cdot\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}+3\cdot\frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}$$

☺ Kira大锦囊： ★★★★★

关于求A、B的方法一定不能笨！3秒内搞定!!!

例如：

$$A(x-2)+B(x+1)=5x-1$$

step 1. 将 $x=2$ 代入 $\Rightarrow 3B=9 \Rightarrow B=3$

step 2. 将 $x=-1$ 代入 $\Rightarrow -3A=-6 \Rightarrow A=2$

Over! 有情没？就是代特值，而使一项为0。不需再傻拆括号了~

(3) 莱布尼茨公式法

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$$

当函数由两函数乘积构成时可以考虑。特别是，有一因子为次数较低的多项式时，用莱布尼茨公式，其更高阶导

令为0，则求导结果将有多项为0。

例 6

$y = x^3 \sin x$ ，求 $y^{(8)}(0) = ?$

解： $y^{(8)} = C_8^0 x^3 \sin(x + \frac{8\pi}{2}) + C_8^1 \cdot 3x^2 \sin(x + \frac{7\pi}{2}) + C_8^2 6x \sin(x + \frac{6\pi}{2})$

$+ C_8^3 \cdot 6 \sin(x + \frac{5\pi}{2}) + 0 + 0 + \cdots + 0$

$= 6 \cdot \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} \cdot 1 = 336$

※

(4) 幂级数展开（Taylor法）

例 7

$y = x \ln(1+x^2)$ ， $y^{(25)}(0)$

解：

$y = x(x^2 - \frac{x^4}{2} + \cdots - \frac{x^{24}}{12} + o(x^{24}))$

$= x^3 - \frac{x^5}{2} + \cdots - \frac{x^{25}}{12} + o(x^{25})$

所以 $\frac{y^{(25)}(0)}{25!} = -\frac{1}{12}$ ， $y^{(25)}(0) = -\frac{25!}{12}$

※

（关于多项式求导可以看出前面的项都没有了）

五 分段函数求导问题

step 1. 在各部分区间用公式求导（即在"导数肯定存在"的区间）

step 2. 分段点处用以下两种方式（二选一）

- 定义法　（直接写 $f'(x_0)$ 定义式 or 分别求 $f'_-(x_0)$ 和 $f'_+(x_0)$ 判 $f'(x_0)$ 的存在性）　[见例8]
- 用导数在 x_0 处左右极限确定左(右)导数，即
  $f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f'(x)$，$f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)$　[见例9]

step 3. 写 $f'(x)$ 的表达式　（通常是分段的）

（注意：在使用 step 2 第二种方法时，必须明确两点

① 先判断 $f(x)$ 在 x_0 处的连续性，必须连续！

② 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$ 不存在，不能断定 $f'(x_0)$ 不存在

比如振荡函数。）

例8

已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}, & x>0\\ 2, & x=0\\ 2\cos x, & x<0\end{cases}$，求 $f'(x)$。

解：<step 0>

$f(0+0)=2$，$f(0)=2$，$f(0-0)=2$.

$\Rightarrow f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

<step 1> $x>0$, $f'(x)=\dfrac{\frac{2x}{1+2x}-\ln(1+2x)}{x^2}$; "(先加角)"

$x<0$, $f'(x)=-2\sin x$

<step 2> $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\ln(1+2x)}{x}-2}{x}$

$=4\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+2x)-2x}{(2x)^2}$ "注意2x $\boxed{\text{统}}$ 手动!!!"

$=4\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\ln(1+t)-t}{t^2}=-2$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos x-2}{x}=0$

$\Rightarrow f'_+(0)=-2$, $f'_-(0)=0$

$\therefore f'(0)$ 不存在.

<step 3> $\therefore f'(x)=\begin{cases}\dfrac{\frac{2x}{1+2x}-\ln(1+2x)}{x^2}, & x>0\\ -2\sin x, & x<0.\end{cases}$

(step 0 是规定动作，只要遇到分段函数求导题，一上来先判分段点处连续性. 不连续的话，后面一大堆都不必求了.)

例 9

设函数 $f(x)$ 可导且导函数连续，$F(x)=f(x|x|)$，求 $F'(x)$

解:

将 $F(x)$ 写成分段函数 $F(x)=\begin{cases}f(-x^2), & x<0\\ f(x^2), & x\geq 0\end{cases}$

当 $x\neq 0$ 时，$F'(x)=\begin{cases}-2x\,f'(-x^2), & x<0\\ 2x\,f'(x^2), & x>0\end{cases}$

当 $x=0$ 时，注意到 $f(x)$，$f'(x)$ 均连续，因

$$\begin{cases}F_-'(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}F'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}[-2xf'(-x^2)]=0\cdot f'(0)=0.\\ F_+'(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}F'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}[2xf'(x^2)]=0\cdot f'(0)=0\end{cases}$$

故 $F'(0)=0$

于是 $F'(x)=\begin{cases}-2xf'(-x^2), & x<0\\ 2xf'(x^2), & x\geq 0.\end{cases}$ ☆

（ KITA 评析：这道题的思想方法非常好，点睛之笔是 $f(x)$ 可导且导函数连续，请用心体会！ ）

「大王小王篇」之

不定积分

- 本Part的解锁条件：背熟求导公式.
- 本Part的特别关注：▲P54 — P58 结论
（看到即赚到）　P59 "表格积分法"
　P70 ⑯ 〈法二〉
- 本Part的难点：全程无难点！如果你能济消P54 — 的精髓和渗透在每一道例题中的手法，也不枉我苦口婆心这一大堆了.

Kira 前言：

不定积分是我在整个高数复习中最侍重的部分。

这块练不好其它都免谈。不要以为这块"看似"属于基础就快速略过，也不要以为别人会觉得不定积分轻松。一点都不轻松！不定积分是最值得你拿出一大段时间什么都不做来专门搞定的！一定要非常重视！

几乎所有你感到不舒服的章节，比如级数，比如多重积分，比如反常积分，你感到不舒服的原因都可用以下两点解释：第一，你极限差点意思；第二，你积分差点意思。

这就是我单开一篇专门让你们计算的原因。

在不定积分部分中，我将奉带非常多私货，倾囊相授。并参考了张宇，汤家凤，张化课，解题技巧书，我的本科教授的笔记等……力求透彻，并达到足够强的洗脑效果。

Let's Party!

在本部分中，你必须熟练运用以下公式

烂熟组

$$\int k\,dx = kx + C \qquad \int x^{\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C \qquad \int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C \quad (a>0 \text{ 且 } a \neq 1)$$

烂熟组（三角函数）

① $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$

② $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + c$

③ $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + c$

④ $\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + c$

⑤ $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$

⑥ $\int \cos x\,dx = \sin x + c$.

考前背一背组
（[illegible]）

① $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c$

② $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + c$

③ $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c$

④ $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$

⑤ $\int \sqrt{a^2-x^2} = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + c$

考前背一背组
（三角函数）

① $\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + c$ → （$\tan = \frac{\sin}{\cos}$ 自己推

② $\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + c$ → （不背现推也ok!

③ $\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$

④ $\int \csc x\,dx = \ln|\csc x - \cot x| + c$

kira 备注：

- "烂熟组"要像吃饭喝水一样熟悉，亲切，自然；
- "考前背一背组"使用频率非常高，但不必每时每刻都记住公式，只需记得左边的形式可以给某种结果找左边形式，凑左边形式，才是应关注的焦点。

所谓"考前背一背祖"，即背下最好，背不下不必有负罪感。自己候考前，最后上考场前，想背一波，即可。

● 运算法则

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int (kf(x))\,dx = k\int (f(x))\,dx \quad (k\neq 0)$$

● 不定积分性质

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$$

$$\int F'(x)\,dx = F(x)+C$$

正片开始！不定积分总纲

一、第一类换元法（解积分题的精髓！决定性力量！）

二、第二类换元法
① 无理 → 有理
② 三角函数替换
③ 倒替换、指数替换

三、分部积分法
① $\int x^n \cdot \begin{cases} e^x \\ \ln x \\ 三角 \\ 反三角 \end{cases} dx$
② $\int e^{ax} \begin{cases} \cos bx \\ \sin bx \end{cases} dx$
③ $\int \sec^n x\,(\csc^n x)\,dx$ （n为奇数）

四、有理函数积分 — 分项积分（没有办法的办法）

☆ 三 第一类换元法

> 😊 不定积分计算的做题速度、方法老道、火眼金睛等各项功力，皆体现于此！
>
> 简言之，就是一个词：找 $d\varphi(x)$！

• 洗脑开始：

1. dx 不是 dx，它可以是 $d(x+2)$，可以是 $d(x-3)$；
题如果是 $\int (x+2)^2 dx$，它就是 $d(x+2)$；
题如果是 $\int \sin(x-3)dx$，它就是 $d(x-3)$；
有感觉吗？这是习惯！

2. 看到 $\int \frac{\sin 2x}{2+\sin^2 x} dx$ 立刻变 $\int \frac{d(\sin^2 x+2)}{2+\sin^2 x}$

看到 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$ 立刻变 $2\int \frac{d\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2}$

有感觉吗？这是习惯！

▲ 我们的追求只有3个字：统一！统一！统一！
你要积什么，就要努力把 d 后变成它的样子，
努力想象前面长得像谁的导数，再把 d 后变成它。

▲ 找到了 $d\varphi(x)$，等于这道题已解，找 $d\varphi(x)$ 是第一要务！

▲ 这种"统一之美"是做数学的神器，也是我从汤神那学来的最精华的套路！！！ 导哥也说了："对于 $\int f(x)dx$，$f(x)$ 越复杂，我们越高兴。" 因为导数好找！

(二) 第一类换元法往往出题灵活，需多积累经验套路。下面我们跟着例题来走一下各种奇形怪状问题和惯用解题伎俩。

· 先来几道不需换元的热身题，进入积分状态。

例1.

1) 求 $\int \tan^2 x\,dx$

解：$I = \int (\sec^2 x - 1)\,dx = \tan x - x + C$

2) 求 $\int \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x}\,dx$

解：$I = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x}\,dx = \int (\cos x - \sin x)\,dx = \sin x + \cos x + C$

3) 求 $\int \frac{1}{x^2(x^2+1)}\,dx$

解：$I = \int (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1})\,dx = -\frac{1}{x} - \arctan x + C$

(ü kira 备注：以上例题取自我本科数分课课堂笔记，老师给了24道例题，循序渐进非常好用。刷完这24道后，大部分积分题都不在话下。我也会在宝典中和大家分享。

以上三道题目都是入门级的，但又绕了些小弯，处理原则是"裂项"，即争取增加项数，使原式化为易求积分的经典形式）

• 开始闭到第一类换元法 $\begin{cases} A. 玩根号 \\ B. 玩三角函数 \\ C. 玩 e^x 家族 \end{cases}$

A. 玩根号"$\sqrt{\ }$" （x 不是 x，是 $(x^{\frac{1}{2}})^2$ ）

例2

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}$

解:

〈法一〉 $I = 2\int \frac{d\sqrt{x}}{\sqrt{2^2-(\sqrt{x})^2}} = 2\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2} + C$ ☆ （最快！）

〈法二〉 $I = \int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}} = \int \frac{d(x-2)}{\sqrt{2^2-(x-2)^2}} = \arcsin\frac{x-2}{2} + C$ ☆

（kira 备注：导哥关于根号有个非常形象的说法，即区分真根号和"假根号"，能配方的就是假根号，配方后可套 P_{52} 的平方和差公式或用三角函数换元法，而真根号不能配方，整体换 $\sqrt{\ }$ 为 t ）

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$

解:

$I = 2\int \frac{d\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2} = 2\arctan\sqrt{x} + C$ ☆

（kira 再强调：拿到手就写 2 倍，计算习惯尽早养成！P_{10} 我强调过了 ）

B. 玩三角函数 "$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$"

分两种情况求积分：

① 当 m，n 均为偶数，用三角公式降幂，化为易求积分的函数，即用：

$$\begin{cases} \sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2} \\ \cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2} \\ \sin x \cdot \cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$$

② 当 m，n 中至少有一个为奇数，则问题就更简单了～

如 $m=2k+1$（$k=0,1,2,\cdots,L$），则

$$\int \sin^{2k+1}x \cdot \cos^n x\,dx = -\int (1-\cos^2 x)^k \cos^n x\,d(\cos x)$$

被积函数化为关于 $\cos x$ 的多项式，可求出结果．

例 3

1）求不定积分 $\int \cos^2 x\,dx$

解：

$$I = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\int 1\,dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,d(2x)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C$$ ※

（ ◡ Kira 再次洗脑：写 $\int \cos 2x\,dx$ 时，我情不自禁就写成了 $\frac{1}{2}\int \cos 2x\,d(2x)$，养好习惯，天下没有难解的积分！

▲ p.s. 书写时，$\frac{1}{2}$ 最后补在前面，有机会视频演示～

整本数林宝典教会你这一个习惯都值了!!! ）

2）求不定积分 $\int \cos^2 x \sin^3 x\,dx$

解： $I = \int \cos^2 x (\cos^2 x - 1) d\cos x$

$= \frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C$ ☆

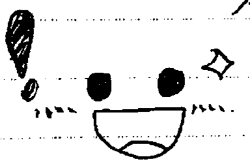
C. 坑 e^x 家族 （要会在 e^x, e^{-x}, e^{2x} 间自如切换）

题型：
① $\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}+1}}dx$，分子分母乘 e^{-x}

② $\int \frac{\sqrt{e^x-1}}{\sqrt{e^x+1}}dx$，$\int \sqrt{1+e^x}dx$，分子有理化

☆一个 kira 原创的，自己一瞬间来灵感总结的重要结论：

我们做题遇到根号常常一会儿分子有理化，一会分母有理化，那么怎么判断自己到底该用分子有理化还是分母有理化呢？？？



kira 告诉你（当 √ 单独出现作为因式）：

- 积分世界，√ 全放分母（分子有理化）（如例4 2) 3)）
- 求导世界，√ 全放分子（分母有理化）

（原因，自己结合公式和你做题的被坑史就知道了。若求导分母有根式则计算将变得非常麻烦。而积分计算中，分母有公式的情形显然更多）
（但是"√+√"或"√ +x"这种加式，无论在分子分母都很讨厌，需根据实际有理化，（如例15）
在分子就有理化分子，
在分母就有理化分母，直至算出结果；通常用第二类换元来[illegible]（一开之差公式 or）

例4

1) $\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}+1}} dx$

解：

分子分母分别乘 e^{-x}

$$I = -\int \frac{1}{\sqrt{e^{-2x}+1}} de^{-x} = -\ln(e^{-x}+\sqrt{e^{-2x}+1}) + C$$

$$= x - \ln(1+\sqrt{1+e^{2x}}) + C$$ ☆

2) $\int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}$

解：

先分子有理化 再分项

$$I = \int \frac{e^x-1}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx = \int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx - \int \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}} dx$$

$$= \ln(e^x+\sqrt{e^{2x}-1}) + \arcsin e^{-x} + C$$

3) $\int \sqrt{1+e^x} dx$

解：

(假设分母为1) 分子有理化

$$I = \int \frac{1+e^x}{\sqrt{1+e^x}} dx = \int \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{e^{-x}+1}} dx + \int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}} dx$$

$$= -2\ln(e^{-\frac{x}{2}}+\sqrt{e^{-x}+1}) + 2\sqrt{1+e^x} + C$$ ☆

(kira 备注：例4 的3)是典型"没分母创造分母也要分子有理化)

例5

1) 求 $\int \frac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}} dx$

解：分母有理化后得式为常数

$$I = \frac{1}{2}\int(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1})\,dx = \frac{1}{6}[(2x+1)^{\frac{3}{2}}-(2x-1)^{\frac{3}{2}}]+C$$

2) $\int \frac{x}{x+\sqrt{x^2-1}}\,dx$

解：

$$I = \int(x^2-x\sqrt{x^2-1})\,dx = \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}\int\sqrt{x^2-1}\,d(x^2-1)$$
$$= \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}(x^2-1)^{\frac{3}{2}}+C$$

二 第二类换元法

A. 根式替换（无理 → 有理）

"真根号"

① 被积函数含 $\sqrt[n]{ax+b}$，则令 $t=\sqrt[n]{ax+b} \Rightarrow x=\frac{1}{a}(t^n-b)$

② 被积函数含 $\sqrt[n]{ax+b}$ 和 $\sqrt[m]{ax+b}$，则当 k 为 m 和 n 的最小公倍数，令 $t=\sqrt[k]{ax+b} \Rightarrow x=\frac{1}{a}(t^k-b)$

例 6

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$$

解：

$$I \xlongequal{x=t^2} \int\frac{2t}{1+t}\,dt = 2\int(1-\frac{1}{1+t})\,dt = 2(t-\ln|1+t|)+C$$
$$= 2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})+C$$

例 7

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{x+3}}\,dx$$

解：

取2和3的最小公倍数. 令 $t=\sqrt[6]{x+3} \Rightarrow x=t^6-3$

则 $dx = 6t^5 dt$

所以 $I = 6\int \frac{t^3}{t-1}\,dt = 6\int \left(t^2+t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt$

$= 2t^3+3t^2+6t+6\ln|t-1|+C$ ※

B. 三角函数替换

烂熟！

$a^2-x^2 \xlongequal{x=a\sin t} a^2\cos^2 t$

$x^2+a^2 \xlongequal{x=a\tan t} a^2\sec^2 t$

$x^2-a^2 \xlongequal{x=a\sec t} a^2\tan^2 t$

$Ax^2+Bx+C \xlongequal{配方} (a^2-x^2)$ or (x^2-a^2) 再用上述替换.

例18

1) $\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$

好例题✓

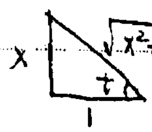
解: $=\int\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \xlongequal{x=\sin t} \int\frac{1+\sin t}{\cos t}\cos t\,dt$

$=t-\cos t+C=\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+C$ ※

(kira说举一反三: 此题与例4(2) P59 一起看, 都是找P58讲的/分子有理化, 再分项计算. 以后再遇 $\int\sqrt{\frac{1+?}{1-?}}\,dx$ 之流都会做了. 这就是举一反三.)

2) $\int\frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}}$

解: $\xlongequal{x=\tan t} \int\frac{1}{\sec^3 t}\sec^2 t\,dt=\int\cos t\,dt=\sin t+C$



$=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C$ ※

3) $$\int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

$$\overset{x=\tan t}{=\!=} \int e^t\cos t\,dt = I = \int e^t\,d\sin t$$

$$= e^t\sin t - \int e^t\,d\cos t = e^t\sin t - e^t\cos t - \underbrace{\int \cos t\cdot e^t\,dt}_{=I}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}e^t(\sin t+\cos t)+C$$

$$= \frac{1}{2}e^{\arctan x}\cdot\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}+C$$

kira贴士：三角替换多利用三角形换清 x 与 t 的关系（如P61 左下角），另外同反三角函数也要转换再如，彻底掌握以上三道例题足够应付考试因为，道不变。）

C. 倒替换 $x=\frac{1}{t}$（分母次数高）

例9

$$\int \frac{dx}{x^4(1+x^2)}$$ （倒代换效果好于三角代换）

解： $$\overset{x=\frac{1}{t}}{=\!=} \int \frac{t^4}{1+\frac{1}{t^2}}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = -\int\frac{(t^4-1)+1}{t^2+1}dt = -\int\left(t^2-1+\frac{1}{1+t^2}\right)dt$$

$$= -\frac{1}{3}t^3+t-\arctan t+C$$

$$= -\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{x}-\arctan\frac{1}{x}+C.$$

（kira备注：只需干干净净的 $x=\frac{1}{t}$ 就可以了，不需要带着系数一起换）

三 分部积分法　　$\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

● 以下三种情形必用分部积分

▶ Case 1　　$\int x^{a} \cdot \begin{cases} e^{x} \\ \ln x \\ \text{三角} \\ \text{反三角} \end{cases} dx$

此情形将 e^x、三角放在 d 后，而 $\ln x$，反三角不要放 d 后。还有非常好用的表格法，稍后介绍

▶ Case 2　　$\int e^{ax} \cdot \begin{cases} \cos bx \\ \sin bx \end{cases} dx$

谁往后放都行，始终如一即可。比如 de^{ax} 就一直 de^{ax}

▶ Case 3　　$\int \sec^{n} x\ (\csc^{n} x)\ dx$　（n 为奇数）

● 以下两种进阶技巧（也都是我喜欢的类型，因为美！）

▶ Case 1　循环，即 $I = \frac{1}{2}(\quad)$

〈如 P_{62} 例 8 3)〉

▶ Case 2　抵消，即不好求就不用求了，别怕！

例 10

1) $\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{x+1}{x}}\right) dx$

解：

$t=\sqrt{\frac{x+1}{x}} \Rightarrow x = \frac{1}{t^2-1}$

$I = \int \ln(1+t)\, d\frac{1}{t^2-1} = \frac{\ln(1+t)}{t^2-1} - \int \frac{1}{(t-1)(t+1)^2}\,dt$

$\frac{1}{(t-1)(t+1)^2} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{(t+1)^2}$　（解法在四中介绍，此到为止）

2) $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx$

解：

$= \int \frac{(x+1)-1}{(x+1)^2} e^x\,dx$ ← 惯用套路，拆项

$= \int \frac{e^x}{x+1}\,dx + \int e^x\,d\frac{1}{x+1}$ ← 有的"抵消"和附目!!!

$= \int \frac{e^x}{x+1}\,dx + \frac{e^x}{x+1} - \int \frac{e^x}{x+1}\,dx$

$= \frac{e^x}{x+1} + C$

☆

3) $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x} e^x\,dx$

解：

$= \int \frac{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} e^x\,dx$

$= \int \left(\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2} + \tan\frac{x}{2}\right) e^x\,dx$

$= e^x\tan\frac{x}{2} + C$

☆

（kira 备注：最后一步用到的是一个积分常识

$\int (f'+f)\,e^x\,dx = e^x f(x) + C$

这一套东西我们将在中值定理部分

非常非常非常详细地展开说，保证会！）

4) $\int \frac{x\sin x}{\cos^5 x}\,dx$

解：

$= \frac{1}{4}\int x\,d\frac{1}{\cos^4 x} = \frac{1}{4}\left(\frac{x}{\cos^4 x} - \int \frac{1}{\cos^4 x}\,dx\right)$

$= \frac{x}{4\cos^4 x} - \frac{1}{4}\int \underline{(1+\tan^2 x)\,d\tan x}$ ← $\boxed{\int \frac{1}{\cos^4 x}\,dx \text{ 的处理方法}}$

$$= \frac{x}{4\cos^4 x} - \frac{1}{4}(\tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x) + C$$

☆ kira 隆重推出"表格积分法"（非常好用！自编款）

- 适用于：$\int e^x \cdot x^2 dx$，$\int \sin x \cdot x^2 dx$，… 等其中一函数高阶导数为0，而另一个函数无穷阶可导（如 e^x，$\sin x$，$\cos x$，…）

例如 求 $\int e^{2x} \cdot x^2 dx$

解：

画表格（用于选择填空和大题检验）

step1：
高阶导为0那一方不断求导
无穷阶可导的一方不断求原函数

写到0为止

x^2	$2x$	2	0
e^{2x}	$\frac{1}{2}e^{2x}$	$\frac{1}{4}e^{2x}$	$\frac{1}{8}e^{2x}$

- step2. 斜着配对，并正负相间配对（第一对为正）

$$\begin{array}{cccc} x^2 & 2x & 2 & 0 \\ e^{2x} & \frac{1}{2}e^{2x} & \frac{1}{4}e^{2x} & \frac{1}{8}e^{2x} \end{array}$$

- step3 直接写结果

$$\int e^{2x} \cdot x^2 dx$$
$$= \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x^2 - \frac{1}{4}e^{2x} \cdot 2x + \frac{1}{8}e^{2x} \cdot 2 + C$$
$$= e^{2x}\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) + C$$

Over!

四 有理函数的积分

1、 已分真分式和假分式

对于 $\int R(x)\,dx$，$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

{ 假分式　　$\deg P \geq \deg Q$
{ 真分式　　$\deg P < \deg Q$

* 其中 deg 为多项式阶数

A. 若 $R(x)$ 为假分式

则 $R(x)$ 分解为"多项式 + 真分式"

$\deg P = \deg Q$ 为假!!!

如：▲ $\int \frac{x}{x+2} dx = \int (1 - \frac{2}{x+2}) dx$

· $\int (x^2 - x + 1) dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + C$

B. 若 $R(x)$ 为真分式，则 $R(x)$ 因式分解

· 真分式可以化为下述四种类型（取决于分母）

① $T_1 = \frac{A_1}{x-a}$ → 分母含因子 $(x-a)$

② $T_2 = \frac{A_2}{(x-a)^n}$ → 分母含因子 $(x-a)^n$

（注意：实际操作中只要出现了 $\frac{A_2}{(x-a)^n}$ 则必须同时出现 $\frac{A_{21}}{x-a} + \frac{A_{22}}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_{2n}}{(x-a)^n}$，即从一次写到 n 次，如"演示2"）

③ $T_3 = \frac{B_1x + C_1}{x^2 + px + q}$ → 分母 x^2+px+q 无法配方，分子写 x 的一次式!!! 带 x!!!

④ $T_4 = \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + px + q)^n}$ → 同②中的"注意"，从一次写到 n 次

2. 因式分解方法.

提示：

$$\begin{cases} ① \dfrac{x-2}{(x+1)(2x-3)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{2x-3} \\ ② \dfrac{x^2+2}{(x+1)(2x-3)^2} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{2x-3} + \dfrac{C}{(2x-3)^2} \\ ③ \dfrac{3x-2}{(x+1)(x^2+1)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1} \end{cases}$$

【kira：关于 A, B, C 的求，我接下来会讲，其实在 P45 的 kira 王星大锦囊中已经讲过了……

如果你的求解时间超过 30 秒，你就该感到羞耻！如果你方法不对，求解时间一定超了！】

以②为例，复习 P45 的内容 —— ★★★★★

通分 $(2x-3)^2A + (x+1)(2x-3)B + (x+1)C = x^2+2$

step 1. 盯着括号看，使部分括号为 0，代特值

▶ 将 $x=\frac{3}{2}$ 代入左右两端 ⇒ $\frac{5}{2}C = \frac{17}{4}$ ⇒ $C = \frac{17}{10}$

▶ 将 $x=-1$ 代入左右两端 ⇒ $25A = 3$ ⇒ $A = \frac{3}{25}$

step 2 没有 0 可以用了，那么代简单的数，比如令 $x=1$.

▶ 将 $x=1$ 代入 ⇒ $A-2B+2C=3$

∴ $\frac{3}{25} - 2B + \frac{17}{5} = 3$ ⇒ $B = \frac{13}{50}$

(接下页)

所以 原式 $= \frac{3}{25}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{13}{50}\cdot\frac{1}{2x-3} + \frac{17}{10}\cdot\frac{1}{(2x-3)^2}$

（p.s. 这道题的数给得比较烦，不太好算，也不好看。考试时的数肯定又好看又好算!!!

总之不要傻傻把A.B.C代入展开就好啦，那样费力不讨好！）

（Kira建议：理论上来讲，任何有理函数都可求其原函数，但计算过程比较麻烦，应先分析被积函数特点，选择更为简便的方法。）

例11

1) $\int \frac{5x-1}{x^2-x-2}\,dx$

解：

$$\frac{5x-1}{x^2-x-2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

$$A(x-2) + B(x+1) = 5x-1 \Rightarrow A=2,\ B=3$$

$$I = 2\ln|x+1| + 3\ln|x-2| + C$$

2) $\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx$

凑导数

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)-3}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{3}{2}\int \frac{d(x+\frac{1}{2})}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (x+\frac{1}{2})^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

（Kira："计算一定技巧"！分解是最后的方法，此外，本题

大量涉及第一类换元，没感觉请再回到P54再温一下我刚刚的说服！）

3. 三角函数化有理函数积分

形如 $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$

$\tan\frac{x}{2}=u \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{2u}{1+u^2} \\ \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \\ dx = \frac{2}{1+u^2}du. \end{cases}$

（Kira的嘲讽：眼熟吗？是不是高中经常用？因为"万能"？但真的麻烦死了！个人认为能不用就不用，三角函数倒来倒去最好玩最快了，不要错过机会~）

常见套路如下（取材自汤神强化）

① $\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx = \int \sec^2\frac{x}{2}\,d(\frac{x}{2}) = \tan\frac{x}{2}+C$

（解题方向：两项合一项，变为彻底因式）

② $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(x+\frac{\pi}{4})}{\sin(x+\frac{\pi}{4})} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \csc(x+\frac{\pi}{4})\,d(x+\frac{\pi}{4})$
$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln|\csc(x+\frac{\pi}{4})-\cot(x+\frac{\pi}{4})|+C$

（解题方向：$\sin x+\cos x$，二话不说 → $\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$，内化!!!）

③ $\int \frac{1}{1+\sin^2 x}dx = \int \frac{\sec^2 x}{\sec^2 x+\tan^2 x}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(\sqrt{2}\tan x)}{1+(\sqrt{2}\tan x)^2}$

（因为 $\sec^2 x = 1+\tan^2 x$，牢记！）

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \sqrt{2} \tan x + C$

（解题方向：$\frac{1}{1+\sin^2 x}$ 所拥有的最好的解法）

④ $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$ "组合拳"

$= \int \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$

$= \int \frac{\sec^2\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}} \, d(\frac{x}{2})$

$= \int \frac{d(1+\tan\frac{x}{2})}{1+\tan\frac{x}{2}} = \ln|1+\tan\frac{x}{2}| + C$

⑤ $\int \frac{\sin 2x}{4+\sin^4 x} dx$

$= \int \frac{d\sin^2 x}{2^2+(\sin^2 x)^2} = \frac{1}{2}\arctan\frac{\sin^2 x}{2} + C$

⑥ $\int \frac{dx}{1+2\tan x}$

<法一> $\tan x = t$，$I = \int \frac{1}{(2t+1)(1+t^2)} dt$

令 $\frac{1}{(2t+1)(1+t^2)} = \frac{A}{2t+1} + \frac{Bt+C}{1+t^2}$

▲（精彩法二）

$I = \int \frac{\cos x}{2\sin x+\cos x} dx$

令 $\cos x = a(2\sin x+\cos x) + b(2\sin x+\cos x)'$ ★

$\begin{cases} 2a-b=0 \\ a+2b=1 \end{cases} \Rightarrow a=\frac{1}{5}，b=\frac{2}{5}$

$I = \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}\ln|2\sin x+\cos x| + C.$

（Kira 强调：这是种非常典型的题型，即分子分母都含有 $\sin x$ 或 $\cos x$ 时，将分子化为"分母 + 分母导数"

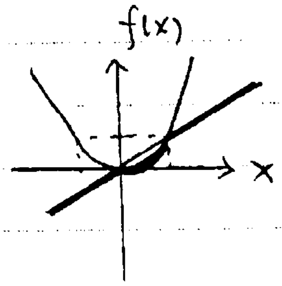
百分百好用，快速又美观！

番外 分段函数不定积分

（本部分不是计算的硬货，但是比较重要的常识，我怕以后忘了，所以写在「大王小王篇」先）

例12

$$\int \min\{x^2, x\}\,dx = ?$$



解：

$$\min\{x^2, x\} = \begin{cases} x, & x<0 \\ x^2, & 0\le x\le 1 \\ x, & x>1 \end{cases}$$

$$I = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + c_1, & x<0 \\ \frac{1}{3}x^3 + c_2, & 0\le x\le 1 \\ \frac{1}{2}x^2 + c_3, & x>1 \end{cases}$$

"被积函数可导，函数连成片，三合一"

令 $c_2 = c$，由 $\begin{cases} c_1 = c_2 = c \\ \frac{1}{3} + c = \frac{1}{2} + c_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = c \\ c_3 = c - \frac{1}{6} \end{cases}$

$$\therefore I = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + c, & x<0 \\ \frac{1}{3}x^3 + c, & 0\le x\le 1 \\ \frac{1}{2}x^2 + c - \frac{1}{6}, & x>1 \end{cases}$$

「大王小王篇」之

定积分

· 本Part的解锁条件：不定积分熟练；
做好玩开心的心理准备；

· 本Part的特别关注：P73 ② ③ P76 (一)
▲P77 Bonus：广函数
P79-P81 例题

· 本Part的难点：无难点，每句话认真读，
每道题认真做。

☆ kira前言：

定积分是「大王小王篇」最后一部分，也是计算看似最麻烦，实则最轻巧最有趣的部分。且闻你解题妙妙手化难为易，化繁为简。给每道定积分计算题找最快的捷径解决，为后面马上展开的「4A篇」Boss打打下坚实基础（本部分以计算为主，证明请看「拾遗篇」）

Let's Party！（P73-P81 筑基 P82-85 实战）

筑基

四大铺垫

1. 定积分定义
2. 如何正确理解变限定积分 ★（你绝对不会
3. 特殊定积分和重要计算性质 ★（滚瓜烂熟
4. 广义积分及其判敛 ★（的最舒服方式）

① 定积分定义

def：$\int_a^b f(x)\,dx \triangleq \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

注：
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left[a+\frac{i}{n}(b-a)\right]=\int_a^b f(x)\,dx$$

（至于奇偶性、可积不可积、原函数存不存在等乱七八糟的概念，请参见「拾遗篇」）

② 如何正确理解变限定积分（你绝对不会）

Th. $f(x)\in C[a,b]$，$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$，则 $\Phi'(x)=f(x)$

Q 提问：① $\int_a^x f(x)dx$ 中"$\int_a^x$"的 x 和"$f(x)$"的 x 是否同步变化？

② $\int_a^x f(x,t)dt$ 中"$\int_a^x$"的 x 和 $f(x,t)$ 的 x 是否同步变化？

（思考30秒）

A 回答：① 同步，因为是关于 x 积分，积分过程视 x 为变量；

② 不同步，因为是关于 t 从 a 到 x 的积分，在积分过程视 x 为常数，而 $\int_a^x f(x,t)dt$ 本质是关于 x 的函数。

(3) 特殊定积分的重要计算性质

（kira强调：非常重要！非常有趣！请务必滚瓜烂熟！）

① $f(x)\in C[-a,a]$，$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_0^a [f(x)+f(-x)]dx$

★ ② $\int_0^\pi f(|\sin x|)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$ （因为 $\sin x>0$ 在 $(0,\pi)$ 上）

$\int_0^\pi f(|\cos x|)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$ （因为 $\cos x$ 不 >0 在 $(0,\pi)$）

③ $\int_0^{2\pi} f(|\sin x|)dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$

$\int_0^{2\pi} f(|\cos x|)dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$

★★ ④ $\int_0^\pi x f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx$

$\int_0^\pi x f(|\cos x|)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(|\cos x|)dx$

要非常敏锐地寻找左边形式，非常好用，考N次了！！！

看到左边自然换右边！！！本能！！！

★★★ ⑤ 华里士公式（强烈推荐宇哥的记忆法）
(必考)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$$

$$= \begin{cases} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n\text{为正偶数} \\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}, & n\text{为大于1的奇数} \end{cases}$$

- 比如① $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 x\,dx = \frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$

从8开始写　　"发射成功"写上$\frac{\pi}{2}$

边写边念："8.7.6.5.4.3.2.1. 发射成功（写$\frac{\pi}{2}$）"

② $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x\,dx = \frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}$.

边写边念："7.6.5.4.3.2. … 发射失败（不写$\frac{\pi}{2}$）"

OK!

⑥ $f(x)$以T为周期

- $\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt$ （平移性质）
- $\int_0^{nT} f(t)\,dt = n\int_0^T f(t)\,dt$

$\boxed{4}$ 广义积分及其判敛（宇哥最舒服方式）

- 正常积分 $\begin{cases} ① \text{积分区间有限}. \\ ② f(x)\text{连续或只有有限个第一类间断点}. \end{cases}$

如：$\int_{-1}^{2} \frac{\sin x}{x}\,dx$

因$x=0$可去间断点，所以为正常积分。

● ①和②有一个不满足即为反常积分.

(一) 区间无限的反常积分.

1. $f(x) \in [a, +\infty)$

① def - $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ "先算个正常的"

$\lim_{b \to +\infty} [F(b) - F(a)]$ $\begin{cases} = A, & \int_a^{+\infty} f(x)dx = A, \forall A \in R \\ 无, & 发散. \end{cases}$

② 判别法

$\lim_{x \to +\infty} x^k f(x) = C_0$ $\begin{cases} 敛, & k > 1 \\ 发散, & k \le 1 \end{cases}$

(kira备注: 发现没? 这个判敛法和书上那些妖艳贱货不一样的地方在于直接左乘 x^k 看起来舒服得多也好算得多.)

(kira微微一笑: 对于k怎么取, 応一眼就看出. 不熟的话, 重新回头翻极限部分. 极限计算不过关!)

例如

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$$

分析:

$\lim_{x \to +\infty} x \cdot \frac{x}{1+x^2} dx = 1$

$k = 1$ $\therefore \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$ 发散

(: 判敛简直世上最轻松的事了有木有!)

· BMDM ·

▶ 2. $f(x) \in (-\infty, a]$

① def- $\int_a^b f(x)dx = F(a)-F(b)$

$\lim_{b\to-\infty}[F(a)-F(b)] \begin{cases} =A, & \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = A, \forall A\in R \\ 无, & 发散. \end{cases}$

（kira提醒：判断敛散时，我们不关心k和1的关系，A和1的关系无所谓，别糊涂了）

② 判别法

$\lim_{x\to-\infty} x^k f(x) = C \begin{cases} 敛, & k>1 \\ 散, & k\le 1 \end{cases}$

▶ 3. $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 皆收敛.

[Question: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}dx = 0$，对吗？ ×

因为 $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}dx$ 发散.

所以 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}dx$ 发散]

（kira强调：反常积分不可用奇偶性直接写结果为0。除非先判敛）

▶ Bonus: Γ函数（非常好用！必须会！尤其在概统中）

def- Γ函数 $\triangleq \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx = \Gamma(\alpha)$

有 $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$，$\Gamma(n+1)=n!$，$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$

（烂熟！必考！）

例1

1) $\int_0^{+\infty}\sqrt{x}\,e^{-x}dx = \Gamma(\frac{1}{2}+1) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

2) $\int_0^{+\infty}x^2e^{-2x}dx = \frac{1}{8}\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx$ （手法！）

$= \frac{1}{8}\Gamma(3) = \frac{1}{4}$

（kira解释：第一个"="用了统一手法 把 e^{-2x} 换 e^{-x}
详细是 $\frac{1}{8}\int_0^{+\infty}(2x)^2e^{-2x}d(2x)$
而将 $2x$ 换为 x 下积分限仍是 $0\sim+\infty$
所以呈现出 $\frac{1}{8}\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx$ ）

（kira再次强调：统一手法非常重要！一定养成习惯！
汤神在讲此例题时感叹了一句：
"为什么有的人不把小时就做完了。"）

3) $\int_0^{+\infty}x^2e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\sqrt{x^2}\,e^{-x^2}dx^2 = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}+1) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$

（二）区间有限，函数有无穷间断点的反常积分（瑕积分）

1. $f(x)\in(a,b]$，$f(a+0)=\infty$ （瑕点 a）

① def. $\forall\varepsilon>0$，$\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)dx = F(b)-F(a+\varepsilon)$

$\lim_{\varepsilon\to0}[F(b)-F(a+\varepsilon)]\begin{cases}=A, & \int_a^b f(x)dx=A\\ \text{无}, & \text{发散}\end{cases}$

② 判断法

$\lim_{x\to a^+}(x-a)^k f(x) = C_0\neq0$ $\begin{cases}\text{敛}, & k<1\\ \text{散}, & k\geq1\end{cases}$

2. $f(x) \in C[a,b) \quad (f(b-0)=\infty)$

① def $\forall \varepsilon>0$, $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = F(b-\varepsilon)-F(a)$

$\lim_{\varepsilon\to 0} F(b-\varepsilon)-F(a) = \begin{cases} A, & \int_a^b f(x)dx = A \\ 无, & 发散 \end{cases}$

② 判别法

$\lim_{x\to b^-} (b-x)^k f(x) = c \neq 0$

$\begin{cases} 敛, & k<1 \\ 散, & k\geq 1 \end{cases}$

3. $f(x) \in C[a,c) \cup (c,b]$

$\int_a^b f(x)dx$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\int_a^c f(x)dx$, $\int_c^b f(x)dx$ 皆敛.

★这部分的计算，汤神有非常独道的方法，即不拆成 $\int_{a+\varepsilon}^{c} + \int_{c}^{b-\varepsilon}$，而是先判敛（两端即可），然后发现果然收敛（因为"无巧不成题"），直接计算就可以了。考试直接这个肯定没问题。

❤我曾在微博放过这个知识点的讲解视频，后因嫌弃自己脸大而删除。如你想看可旺旺联系我，我分享一下。

例1 $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ "我根本就不拆！"

解：

1° $\lim_{x\to 0^+} (x-0)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 且 $\frac{1}{2}<1$

看着下边配好次数 先写

$\lim_{x\to 2^-}(x-2)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 且 $\frac{1}{2}<1$

$\Rightarrow \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ 收敛

（😊 检查结束，接下来像正常积分一样求即可）

2° $I=\int_0^2 \frac{d(x-1)}{\sqrt{1-(x-1)^2}}=2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=2\arcsin x\Big|_0^1=\pi$ ☆

- 进阶：含绝对值符号的定积分计算

非常简单，根据绝对值正负将积分区间分段即可

例2

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}}$$

解：1° $I=\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}+\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-x}}$ 令 I_1+I_2

2° $\lim_{x\to 1^-}(1-x)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}=1$ 且 $\frac{1}{2}<1$ $\therefore I_1$ 收敛

$\lim_{x\to 1^+}(x-1)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{x^2-x}}=1$ 且 $\frac{1}{2}<1$ $\therefore I_2$ 收敛

3° $I_1=\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$

$I_1=2\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{d\sqrt{x}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}=2\arcsin\sqrt{x}\Big|_{\frac{1}{2}}^1$ ☆

例3

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{(x-1)^4\sqrt{x^2-2x}}$$

解：1° $\lim\limits_{x\to2^+}(x-2)^{\frac12}\frac{1}{(x-1)^4\sqrt{x^2-2x}}=\frac{1}{\sqrt2}$ 且 $\frac12<1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^5\frac{1}{(x-1)^4\sqrt{x^2-2x}}=1$ 且 $5>1$

收敛

2° $I=\int_2^{+\infty}\frac{d(x-1)}{(x-1)^4\sqrt{(x-1)^2-1}}$

$=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$

$\overset{x=\sec t}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec t\tan t}{\sec^4 t\tan t}dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 t\,dt=I_3=\frac23\times1=\frac23$ ※

（☺ 老汤语录：该拆再拆，不要乱听教材。）

实践

{ 变积分限积分计算
{ 定积分计算 { 利用计算性质
{ 利用对称法

① 变积分限积分计算

（汤："是要有经验的" "二话不说，分部积分"。
"拿到手别慌了，分部积分" ←← ）

例4

$f(x)=\int_1^x e^{-x^2}dx$ ，求 $\int_0^1 x^2 f(x)dx$

解:

$$
\begin{aligned}
I&=\frac{1}{3}\int_0^1 f(x)\,dx^3\\
&=\frac{1}{3}x^3 f(x)\Big|_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1 x^3 e^{-x^2}dx\\
&=-\frac{1}{6}\int_0^1 x^2 e^{-x^2}d(x^2)\\
&=-\frac{1}{6}\int_0^1 x e^{-x}dx\\
&=-\frac{1}{6}(1-2e^{-1})
\end{aligned}
$$

(kira回顾: 此题中的 $f(x)$ 为P74页提到的①"同")

例5

$f(x)=\int_0^x \arctan(x-1)^2dx$ ，求 $\int_0^1 f(x)dx$

解:

$$
\begin{aligned}
I&=xf(x)\Big|_0^1-\int_0^1 x\arctan(x-1)^2dx\\
&=f(1)-\int_0^1[(x-1)+1]\arctan(x-1)^2dx\\
&=f(1)-\int_0^1\arctan(x-1)^2dx-\int_0^1(x-1)\arctan(x-1)^2d(x-1)\\
&=\frac{1}{2}\int_0^1\arctan x^2\,dx^2\\
&=\frac{1}{2}\int_0^1\arctan x\,dx\\
&=\frac{1}{2}\left(x\arctan x\Big|_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx^2\right)\\
&=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\ln 2.
\end{aligned}
$$

★ 例6

$f(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{\pi-t}dt$ 求 $\int_0^\pi f(x)dx$

解:

$$
\begin{aligned}
I&=xf(x)\Big|_0^\pi-\int_0^\pi x\cdot\frac{\sin x}{\pi-x}dx\\
&=\int_0^\pi\frac{\pi\sin x}{\pi-x}dx-\int_0^\pi\frac{x\sin x}{\pi-x}dx
\end{aligned}
$$

呜呜 你得太凄凉!

$= \int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2$ "发射失败"（P_{75} 华里士公式）

（😊 kira 赞叹：f(x) 在分部积分和第二步代入中都发挥了各有特色的作用，分子分母的 $\pi - x$ 又恰可约去！无巧不成题！ ）

（❤ 我觉得这就是好题，在计算不太难为你的前提下，出得巧而美~ （模拟题推荐李永乐 6+2，特别是！我特别喜欢！）（合肥 8+4 也要做的…） ）

$\boxed{2}$ 利用定积分的简便计算性质计算定积分

例7

① $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^4 x}{1+e^{-x}} dx$

解：

$= \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin^4 x}{1+e^{-x}} + \frac{\sin^4 x}{1+e^{x}} \right) dx$ → （P_{74} 性质①）

$= \int_0^{\pi} \left(\frac{e^x}{e^x+1} + \frac{1}{e^x+1} \right) \sin^4 x \, dx$ （"漂亮"！）

$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \, dx = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{8}\pi$ （发射成功！）

② $f(x) = \frac{x}{1+\cos^2 x} + \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x \, dx$，求 $f(x)$

解：

令 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x \, dx = A$

$f(x) = \frac{x}{1+\cos^2 x} + A$

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x} dx + \underbrace{\cancel{\int_{-\pi}^{\pi} A\sin x \, dx}}_{奇=0}$

$$A = 2\int_0^{\pi} x\cdot\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = -\pi\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\cos^2 x}\,d\cos x$$
$$= -\pi\arctan(\cos x)\Big|_0^{\pi}$$
$$= \frac{\pi^2}{2}+\frac{\pi^2}{2} = \pi^2$$

③ $\int_0^{\pi^2}\sin^4\sqrt{x}\,dx$

解：$\sqrt{x}=t$ $\int_0^{\pi}\sin^4 t\cdot 2t\,dt = 2\pi\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3}{8}\pi^2$

④ $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^{2x}-1}\,dx$

解：$\sqrt{e^{2x}-1} = t \Rightarrow x=\frac{1}{2}\ln(t^2+1)$ 心算！

$$I = \int_0^{\sqrt{3}} t\cdot\frac{t}{t^2+1}\,dt$$
$$= \int_0^{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt = \sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$$ "心算！"

⑤ $\int_0^2 x^2\sqrt{2x-x^2}\,dx$

解： "有技术！"

$$= \int_0^2[(x-1)+1]^2\sqrt{1-(x-1)^2}\,d(x-1)$$
$$= \int_{-1}^{1}(x+1)^2\sqrt{1-x^2}\,dx$$
$$= 2\int_0^1(1+x^2)\sqrt{1-x^2}\,dx$$
$$\overset{x=\sin t}{=} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin^2 t)\sqrt{\cos^2 x}\cdot\cos x\,dx$$
$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^4 t)\,dt$$
$$= 2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\right)$$

有趣有木有！

超好玩有木有！

3 利用对称法计算定积分

例8

① $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx$

解：

〈法一〉 $I = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin[(x+\frac{\pi}{4})-\frac{\pi}{4}]}{\sin(x+\frac{\pi}{4})} dx$

〈法二〉 $I \xlongequal{x+t=\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\cos t}{\cos t+\sin t}(-dt)$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x+\cos x} dx$$

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x+\sin x}{\sin x+\cos x} dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$$ （P75 第二行）

② $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\tan^{\sqrt{2}} x}$

$$\xlongequal{x+t=\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{-dt}{1+\cot^{\sqrt{2}} t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cot^{\sqrt{2}} x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^{\sqrt{2}} x}{1+\tan^{\sqrt{2}} x} dx$$

$$\Rightarrow 2I = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$$

（Kira评价：像以上例6这两道，考研真题，属于难度很大的计算，若掌握有困难，不必硬记，作为开阔眼界即可。）

「4A 篇」之

二重积分

- 本Part的解锁条件：不定积分、定积分、反常积分可以随便玩；会画函数图象，能看懂函数图象；
- 本Part的特别关注：P90. 2. P94. 3 (P97 第二种) P104."招" P108. ②
- 本Part原点：P89 的概念可以随意看看。本部分掌握好"口诀"和"招"即功德圆满，我功成身退~

Kira前言：

之所以用二重积分打头阵，是因为这部分用到的知识点和方法都十分清爽，稍加梳理便可轻松拿到！

章节推荐跨哥的"无敌口诀"和汤神的"轮换大法"，前者是做题根基，后者是提速神器。

Let's Party!

筑基

- 一、定义
- 二、性质
  - 1. 一个中值定理
  - 2. 对称性（必考）
    - 关于x轴
    - 关于y轴
    - 关于原点
    - 关于y=x直线
    - 轮换对称性
  - 3. 换序
- 三、积分法
  - 1. 直角坐标系
  - 2. 极坐标系（两种）

一 定义

def. D为有限闭区域，$f(x,y)$在D上有界，

若 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 存在，称此极限为

$f(x,y)$ 在D上的二重积分，记 $\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma$

即 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i = \iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma$

注：$D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{i}{m},\frac{j}{n}\right)=\iint_D f(x,y)\,d\sigma$$

例1

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \frac{in}{(m^2+i^2)(n^2+j^2)}$$

$$=\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{mn}\cdot\frac{\frac{i}{m}}{1+\left(\frac{i}{m}\right)^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{j}{n}\right)^2}$$

$$=\iint_D \frac{x}{1+x^2}\cdot\frac{1}{1+y^2}\,dxdy$$

$$=\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx\int_0^1\frac{1}{1+y^2}dy$$

（Kira备注：由P26一阶时傅哥套路类比即可知套路

step1. 提出 $\frac{1}{mn}$ （读作 $d\sigma$）

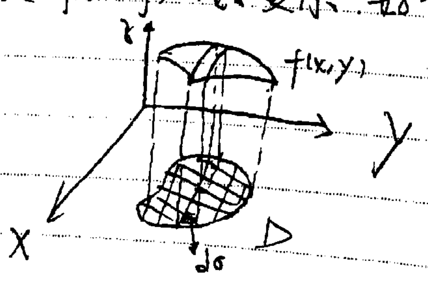
step2. 凑出 $\frac{i}{m}$ 和 $\frac{j}{n}$ （分别读 x，y）

step3. 将 $\frac{1}{mn}$ 写成 $d\sigma$ 或 $dxdy$

over！）

Kira剖析：

有的同学可能一看二重积分会懵比，觉得又是D，又是$f(x,y)$，好复杂，好混乱，我们看图说话：



二重积分本质是个三维问题，$f(x,y)$是在D上有定义的二维曲面，求柱体"大面包"的体积。

★ D 不可缺：D限制了$f(x,y)$有定义的范围，即"这块面包放在桌上到底占用了多大区域"，其它区域我们不关心。

★ $f(x,y)$ 不可缺：$f(x,y)$是一个"空中"的二维曲面，想求面包体积，一定要知道顶部面包皮的各种高度，才能推测。

★ $\iint_D f(x,y)\,d\sigma$ 中 $\underset{\sim\sim\sim}{d\sigma>0}$（考点），因为$d\sigma$代表D上的"一小块"区域，必为正

★ $f(x,y)\cdot d\sigma$ 表示 $d\sigma$ 上这条小柱体的体积（类比柱体体积公式）
$\iint_D$ 是"求和"，即无穷多小柱体体积加起来，就是大面包体积

三 性质 （高频考点）

1. D为有界区域，$f(x,y)$在D上连续，$\exists(\xi,\eta)\in D$，
使 $\iint_D f(x,y)\,d\sigma = f(\xi,\eta)\,A$ （面积）

例2
D: $x^2+4y^2\le t^2 \quad (t>0)$
求 $\lim$ $\dfrac{\iint_D e^{-x^2}\cos(x-y)\,d\sigma}{t^2}$

解：$\iint\limits_D e^{-x^2}\cos(x-y)\,d\sigma = \overbrace{\pi\cdot t\cdot\frac{t}{2}}^{椭圆面积}\cdot e^{-\xi^2}\cos(\xi-\eta)$，
$(\xi,\eta)\in D$.

$I=\frac{\pi}{2}\lim\limits_{t\to0} e^{-\xi^2}\cos(\xi-\eta)=\frac{\pi}{2}$ ☆

（kira 吐槽：性质1及这个例题属于拔高，实在没感觉可以放自己一马，知道这个思路就好。）

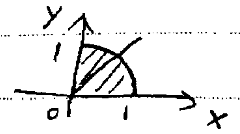
☆ 2. 对称性（每年必考!!!）

① D关于 $y=x$ 对称

$$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma=\iint\limits_D f(y,x)\,d\sigma$$

例3

$$\iint\limits_D \sin x^2\cos y^2\,d\sigma = I$$

D: 

$$=\iint\limits_D \cos x^2\sin y^2\,d\sigma$$

$$2I=\iint\limits_D \sin(x^2+y^2)\,d\sigma$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r\sin r^2\,dr=-\frac{\pi}{4}\cos r^2\Big|_0^1$$
$$=-\frac{\pi}{4}(\cos1-1)$$

☆

（kira 备注：① 直角坐标→极坐标之后会展开说

② 公式不用背，看到D的形状后展开想象即可：x,y 互换位置，函数还是那个函数，区域还是那个区域，所以体积还是那个体积。）

② 若D关于y轴对称（也是看图想，不用背）

$$\begin{cases} 若 f(-x,y)=-f(x,y) \Rightarrow \iint_D f d\sigma = 0 & 奇 \\ 若 f(-x,y)=f(x,y) \Rightarrow \iint_D f d\sigma = 2\iint_{D_1} f d\sigma & 偶 \end{cases}$$

[D_1是右半边]

♥ KiTa 再点破一层，其实是：

$$\begin{cases} 对于 f(-x,y)=-f(x,y) 的那部分，有 \iint_D f d\sigma = 0 \\ 对于 f(-x,y)=f(x,y) 的那部分，有 \iint_D f d\sigma = 2\iint_D f d\sigma \end{cases}$$

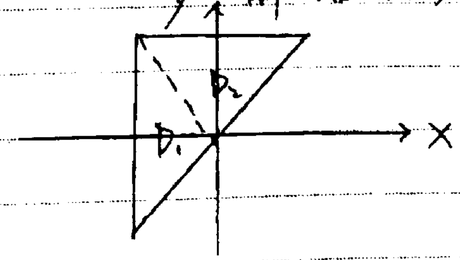
D关于x轴对称同理

$$\begin{cases} 若 f(x,-y)=-f(x,y) \Rightarrow \iint_D f d\sigma = 0 \\ 若 f(x,-y)=f(x,y) \Rightarrow \iint_D f d\sigma = 2\iint_{D_1} f d\sigma \end{cases}$$

[D_1是上半边]

KiTa 坦言：其实大多时候都是用奇函数部分为0。0是个好东西，翻译成现代汉语叫"扔"！（对称性是"扔扔大法"的理论基础）

• 命题：隐性对称（既不关于x轴对称，又不关于y轴对称，那怎么办？！）（如下图实心中）

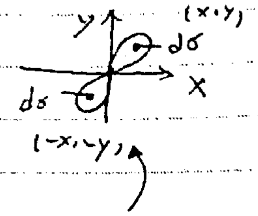


（即上面"KiTa 再点破一层"所指）

答：分两块，D_1用y的奇偶性，D_2用x的奇偶性。

· BMDM ·

③ 关于原点对称



$\begin{cases} 若有\ f(x,y)=f(-x,-y)，则\ I=2\iint_{D_1} f\,d\sigma \\ 若有\ f(x,y)=-f(-x,-y)，则\ I=0 \end{cases}$

如 $\iint_D (x\sin\sqrt{x^2+y^2}+\cos x\sin y)\,d\sigma \underline{=0}$

拆为 $0+0=0$

④ 轮换对称性

A. 关键点：把二重积分式中所有 x,y 互换，

则原二重积分结果不变。

如：$\iint_{D_1:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}\le 1} (2x^2+3y^2)\,dx\,dy = \iint_{D_2:\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}\le 1} (2y^2+3x^2)\,dy\,dx$

互换　　互换　　互换

:) 太废话了 因为积分值本来就和字母无关：

$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(u)\,du=\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b f(y)\,dy$.

面包还是那个面包，只是换一个方向

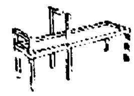
例4

设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的正值连续函数，证明

$\int_a^b f(x)\,dx\int_a^b \frac{1}{f(x)}\,dx \ge (b-a)^2$

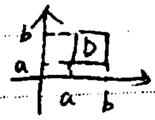
解：

<法一> 令 $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt\int_a^x \frac{1}{f(t)}\,dt-(x-a)^2$，目标 $F(b)\ge 0$.



<法二> $I=\int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{1}{f(y)}dy = \iint\limits_D \frac{f(x)}{f(y)}d\sigma$.

x,y互换
"D不变" $=\iint\limits_D \frac{f(y)}{f(x)}d\sigma$



$\Rightarrow 2I = \iint\limits_D \left(\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\right)d\sigma$

$\geq \iint\limits_D 2d\sigma = 2\iint\limits_D d\sigma = 2(b-a)^2$

$\Rightarrow I \geq (b-a)^2$

☆

B. 进阶：若将D中的x和y对调后发现D不变。
则 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_D f(y,x)d\sigma$

（"x,y 非常对称"，非常适合用2I解题 ←_←）

例5

设a,b为常数，f(x)正值连续 $I=\iint\limits_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}d\sigma$

$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$

解：由D对调x,y后区域不变

$I=\iint\limits_D \frac{a\sqrt{f(y)}+b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)}+\sqrt{f(x)}}$

$\Rightarrow 2I = \iint\limits_D \frac{(a+b)(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)})}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}} d\sigma$

$=(a+b)\iint\limits_D d\sigma = (a+b)\cdot\pi\cdot\frac{1}{4} \Rightarrow I=\frac{1}{8}(a+b)\pi$

☆

下一题教你跳出思维定势！

例6.
求 $I=\iint_D \sin(x^3+y^3)\,d\sigma$，$D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\le 1\}$

[分析] "跳出 $x\to y$，$y\to x$ 的定势"：发现 x,y 互换后，对求 I 并无帮助。

解：令 $x\to -x$，$y\to -y$，D 不变，$d(-x)\,d(-y)=dx\,dy$
("保证 D 不变就行")

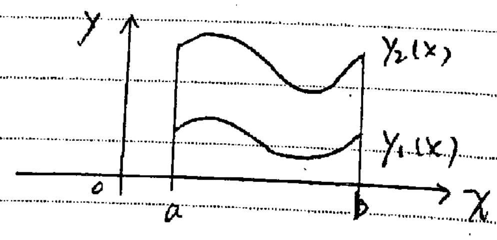
$$I=-\iint_D \sin(x^3+y^3)\,d\sigma \Rightarrow 2I=0 \Rightarrow I=0$$ #

(还可 $x\to -y$，$y\to -x$，随便玩)

[三] 积分法

<法一> 直角坐标法　　$d\sigma = dx\,dy$

1° x 型（区域 D 左右两边直线，上下为曲线）



$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$$

请发自灵魂的读一读：

四问法：

后积先定限，限内画条线
先交写下限，后交写上限

[解读]（我将以视频讲解，如果你需要）

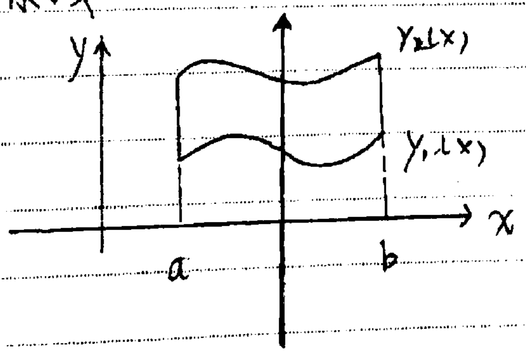
①"后积先定限"

X型的模板为 $\int_{\square}^{\square}dx\int_{\square}^{\square}f(x,y)dy$

即"后积x先积y"，也可以形象地看作"后积容易的，先积复杂的"，通常，后积的上下限都是常数，非常清楚，也不会写错顺序。

看P96的图便知，x的上下限分别为b和a.
所以模板变为 $\int_{\square}^{\square}dx\int_{\square}^{\square}f(x,y)dy$

②"限内画条线"



画线方向与坐标轴正方向相同（非常重要）
(因为dx,dy与x,y轴正方向同向，若箭头画反，

则 dx，dy 将对应变为 -dx，-dy）（见例8）

这条线将霸占穿过两条曲线！

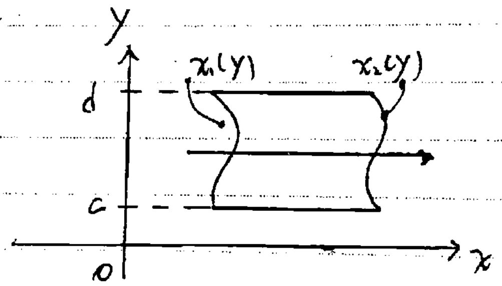
③ 先交写下限，后交写上限。

"先交"和"后交"看箭头方向便一目了然，自然写出上下限。
模板最终变为

$$\int_{\boxed{a}}^{\boxed{b}} dx \int_{\boxed{y_1(x)}}^{\boxed{y_2(x)}} f(x,y)\, dx$$

[完成]
[解读完毕]

2° y型



仿照口诀，立即写出

$$\iint_D f(x,y)\, d\sigma = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\, dx$$

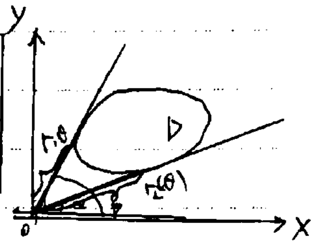
（不再赘述）

〈法二〉极坐标法. $d\sigma = r\,d\theta\,dr$

适用于 $\begin{cases} ① \text{ D区域边界含 } x^2+y^2 \quad （含上圆了） \\ ② \ f(x,y) \text{ 中含 } x^2+y^2 \quad （锦上添花） \end{cases}$

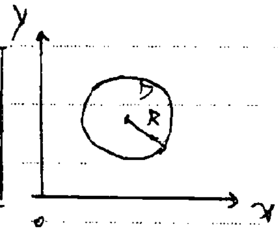
▶ 直角坐标 → 极坐标有两种写法 （都要会❗灵活切换❗）

• 第一种: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $(\alpha \le \theta \le \beta)$



（😊：多用于不规则"圆"或圆心在原点的情形.
通用，万能. 但对于圆心不在原点的圆域D.
用第一种易使计算复杂. 故引出第二种写法）

• 第二种: $\begin{cases} x-a = r\cos\theta \\ y-b = r\sin\theta \end{cases}$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$ $(0 \le r \le R)$

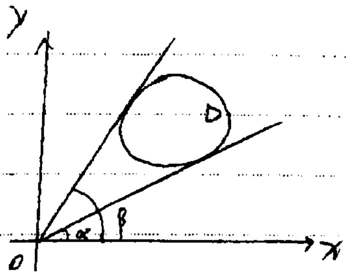


（😊 Kira说：第二种的好处在于将第一种的函数 $r(\theta)$ 变为常数 r 从而大大简化计算（当D为圆））

例7

1. 写出区域D上的二重积分形式

答: $I = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr$



[解读] "无论D状"依然适用

① "后积先定限"

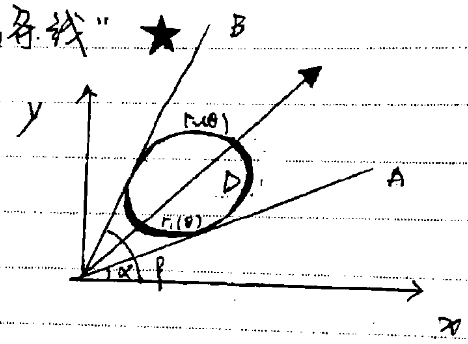
对于变量 θ 和 r，注意到 θ是确定的，可用常数表示上下限。因此后积，先定限。

填极为 $\int_{\square}^{\square} d\theta \int_{\square}^{\square} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr$

由P97页图知，θ的上下限分别为 α 和 β。所以填极为

$$\int_{\boxed{\alpha}}^{\boxed{\beta}} d\theta \int_{\square}^{\square} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr$$

② "限内画条线" ★



这一步是重点，也是难点。极坐标二重积分这条线到底从哪画，到哪？

Kira 破题：当后积 θ 时，有两条确定 θ 的切线 A 和 B，画的这条线，与 A、B 同起点，方向与 x, y 轴正向相同，位置画在 A 和 B 之间即可。

②"先交写下限，后交写上限"

切线A、B将区域D分为$r_2(\theta)$和$r_1(\theta)$两部分

我们所画的线依次穿过$r_1(\theta)$和$r_2(\theta)$

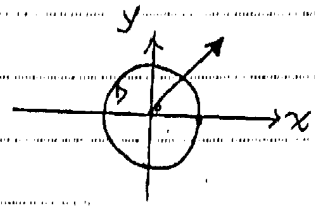
(看箭头方向!)

模板最终变为

$$\int_{\boxed{\alpha}}^{\boxed{\beta}} d\theta \int_{\boxed{r_1(\theta)}}^{\boxed{r_2(\theta)}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr$$

[完成]

[解读完毕]



2. 写出区域D上的二重积分形式

答: $I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr$

(😊 kira补充：此处的"先交写下限"之"先交"为原点O).

实战
1. 技术/综合题
2. 常规计算题("狂扔大法").

1. 技术/综合题

① 换序

▶ 原则: $dxdy > 0$ (否则不是二重积分)

即"限内画条线"沿坐标轴正向.

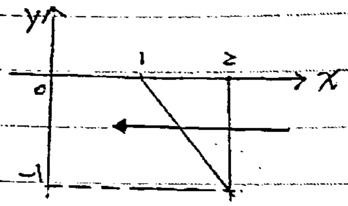
例8

1. $\int_{-1}^{0} dy \int_{2}^{1-y} f(x,y)\, dx \ \underline{\underline{换序}}$ ____.

答: $I=\int_{1}^{2} dx \int_{1-x}^{0} f(x,y)\, dy$ ✗ 0

"基本概念问题"

更正: step1. 先根据原积分画图:



· 定限: $y\in[-1,0]$
· 先交2, 再交$1-y$

发现关键点了! $dx<0$!

step2. 把dx dy变为正

$I=-\int_{-1}^{0} dy \int_{1-y}^{2} f(x,y)\, dx$ (p.s. 积分交换上下限, 前面添负号)

(>0) (>0)

(kira插播: 你考试一定有题会玩到"交换积分上下限"的, 因为真的太好用太好玩了!)

正解: $I=-\int_{1}^{2} dx \int_{1-x}^{0} f(x,y)\, dy$.

(kira重申: 必须先是二重积分, 才能换序! 必须概念过关, 才能玩100份题!)

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{1+\cos\theta}^{2} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr$ 换序 ______

答: $\int_1^2 r\, dr \int_{\arccos(r-1)}^{\frac{\pi}{2}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, d\theta$.

[解读] $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta$ 说明D在第一象限.

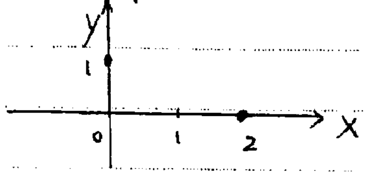
▶ Step1. 画 $r=2$ 和 $r=1+\cos\theta$ 在第一象限的图象.

(Kira简笔画教程之如何画 $r=1+\cos\theta$ 图象:

① $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$. 当 $\theta=0$ 时, $r=2$

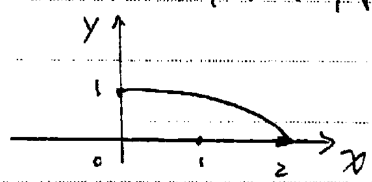
当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时, $r=1$

画两个点,



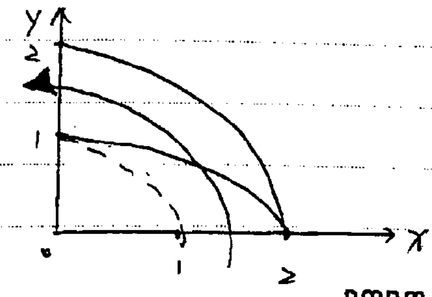
② $r'(\theta)<0$, $r''(\theta)<0$ 所以为减函数&凸函数

画一条凸递减曲线



[♥ 关于如何平滑地、无疏漏地画函数图象,
及关于如何记住二阶导和凹凸性之间的关系
并永远不忘, 且听「拾遗篇」分解!])

▶ Step2. 念口诀



"后积先定限", 此限为常数.
最小为1; 最大为2, 所以 $\int_1^2 r\, dr$

在积r时的"线"是连点和唯点吗 请床注图中这条箭头.

(kira注释之为什么箭头画圆圈?
答:
因为"限内画线"的"线"在此代表 θ,
与代表 r 的"线"互相垂直,故为圆圈.)

"先交写下限,后交写上限"

$$\begin{cases} \text{上限} \quad r=2 \quad \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2} \\ \text{下限} \quad r=1+\cos\theta \Rightarrow \quad \theta=\arccos(r-1) \end{cases}$$

所以模板最终变为 $\int_1^2 r\,dr \int_{\arccos(r-1)}^{\frac{\pi}{2}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,d\theta$

[解读完毕]

② 参悟一道非常漂亮的综合题(导哥例题)

例9

设 $L_1: x^2+y^2=1$, $L_2: x^2+y^2=2$, $L_3: x^2+2y^2=2$

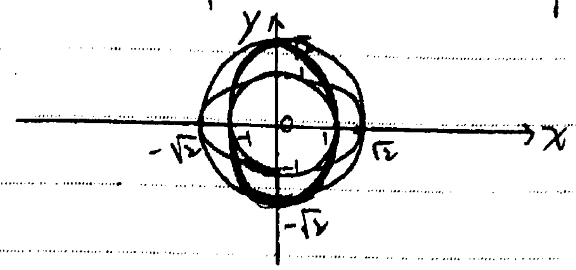
$L_4: 2x^2+y^2=2$. 围成平面区域 D_i,$i=1,2,3,4$.

记 $I_i=\iint_{D_i}(1-x^2-\frac{y^2}{2})d\sigma$,则 $\max\{I_1, I_2, I_3, I_4\}=$ ____

解:

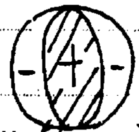
画图.

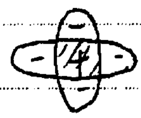
核心 $f(x,y)=1-x^2-\frac{y^2}{2}$，为图中那个竖着的椭圆形。
在该椭圆形内部有 $1-x^2-\frac{y^2}{2}>0$，外部有 $1-x^2-\frac{y^2}{2}<0$]



也就是说，"$f(x,y)$ 的积分越大，说明 $f(x,y)$ 在竖椭圆内的部分越多，在竖椭圆外的部分越少（消化3秒）

L_1：中心的小圆，包含于  竖椭圆中。

L_2：外圈的大圆 ，竖椭圆内部分为正，椭圆外部分为负，有所抵消。

L_3：横着的椭圆  正负有所抵消

L_4： $f(x,y)$ 完全为正，积分达到最大值。

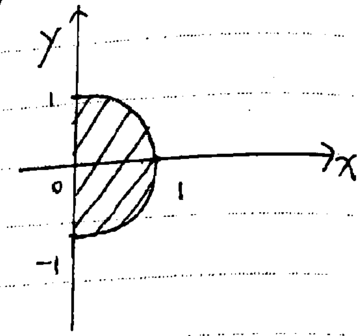
答：填 I_4.

（ KIRA说明：
此题是非常好的理解概念、锻炼数学思维的题，考试中会有意无意用到这种思维方式。如果以上文字解释不够清楚，欢迎来 @KIRA 言的信(weibo)找我或 询问 @KIRA考研周边小铺。我将根据人数决定是否制作视频～ ）

2. 常规计算题 （"狂扔大法"）——感谢汤神！

例10

（真题）求 $\iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}d\sigma$，$D: x^2+y^2\le 1$，$x>0$



解：

（第一步：找对称 区域D 关于x轴上下对称 把xy扔了。）

$$I=\iint_D \frac{d\sigma}{1+x^2+y^2}$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\frac{r}{1+r^2}dr$$

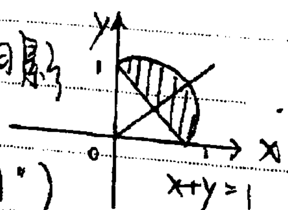
$\frac{\pi}{2}$ 直接口算！速度！

$$=\frac{\pi}{2}\ln(1+r^2)\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}\ln 2$$

（kira提醒：去掉xy是因为 $\frac{xy}{1+x^2+y^2}$ 是y的奇函数，别想错！该去掉什么是一眼看穿的，画图之后2秒内结束战斗！）

例11

求 $\iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2}}$，区域D如图中阴影。



解：

（"对称性对本题不起任何作用"）

令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$，$\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}\le r\le 1$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{1}dr=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}\right)d\theta$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\csc\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)d\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\csc\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-\cot\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{2}$$

（Kira补充：迅速判断 $\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}\le r$ 是必备常识

推法为 $x+y\ge1$ ∴ $r(\sin\theta+\cos\theta)\ge1$

∴ $r\ge\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$ ）

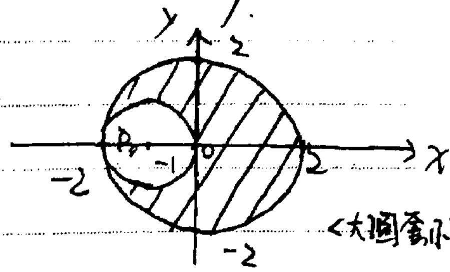
（Kira泪教：如何快速判断阴影部分是 $x+y\ge1$ 还是 $x+y\le1$ 呢？So easy！"极限思维"

阴影是 $x+y=1$ 直线的右边，那随便取一右边点，比如 (10000,10000)，也就是"很右边"的点，显然比1大，所以 $x+y\ge1$。）

例12

求 $I=\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$，区域D如图中阴影

解：



<大圆套小圆>

（先看有对称性，上下对称，

y的奇函数项立刻扔掉，$f(x,y)$没有

就先不扔了）

$$I=\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$$

$$=\iint\limits_{D+D_0}\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma-\iint\limits_{D_0}\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma=I_1-I_2$$

$$I_1=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2r^2dr=\frac{16}{3}\pi\quad(\text{口算})$$

令 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ D_0: $\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{3}{2}\pi$, $0\le r\le -2\cos\theta$

$I_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\theta \int_0^{-2\cos\theta} r^2 dr = -\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^3\theta\, d\theta$

$\overset{\theta-\pi=t}{=\!=\!=} \frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t\, dt = \frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t\, d\theta = \frac{16}{3}\times\frac{2}{3} = \frac{32}{9}$

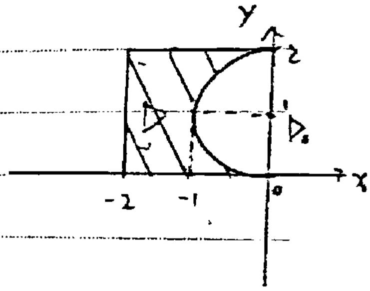
(换成熟悉的区间~) (“发射光线”)

综上，$I = I_1 - I_2 = \frac{16}{3}\pi - \frac{32}{9}$

(kira: “挖圆”和“补圆”是二重积分计算中非常常见的题型和非常惯用的手法。)

例13

求 $\iint\limits_D y^2 d\sigma$，D如图中阴影区域所示



解:

$I = \iint\limits_{D+D_0} - \iint\limits_{D_0} = I_1 - I_2$

$I_1 = \int_{-2}^{0} dx \int_0^2 y^2 dy = \frac{16}{3}$

I_2 <法一> 令 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ ($\frac{\pi}{2}\le\theta\le\pi$, $0\le r\le 2\sin\theta$)

$I_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^{2\sin\theta} r^3\sin^2\theta\, dr$

$= 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^6\theta\, d\theta = 4\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{5}{8}\pi$

<法二> 令 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y-1 = r\sin\theta \end{cases}$ ($\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{3}{2}\pi$, $0\le r\le 1$)

$$I_2=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r(1+r\sin\theta)^2dr$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{2\sin\theta}{3}+\frac{1}{4}\sin^2\theta\right)d\theta$$

$$=\frac{\pi}{2}+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cancel{\frac{2\sin\theta}{3}}+\frac{1}{4}\sin^2\theta\right)d\theta$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{5}{8}\pi$$

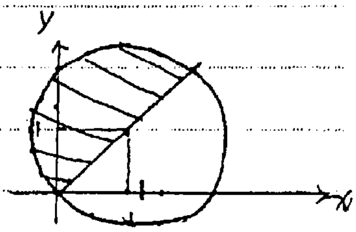
综上，

$$I=I_1-I_2=\frac{16}{3}-\frac{5}{8}\pi$$ #

（☺ Kira: P97 第二种积分法我在实践中非常爱用，不仅因为 r 和 θ 好找许多，还可能得到巧合的 f(x,y) 简化～.）

例 14

求 $\iint_D(x-y)\,d\sigma$，D 如图中阴影所示



解：

$$\begin{cases}x-1=r\cos\theta\\ y-1=r\sin\theta\end{cases}\quad\left(\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{5}{4}\pi,\ 0\le r\le\sqrt{2}\right)$$

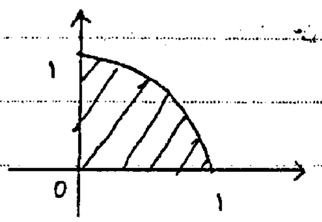
$$I=\iint_D[(x-1)-(y-1)]\,d\sigma=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}r^2(\cos\theta-\sin\theta)\,dr$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)d\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos t\,dt=-\frac{8}{3}$$ #

利用轮换对称性一例（"无巧不成题"）

例 15

$$\iint_D\frac{x\sin(x^2+y^2)}{x+y}\,d\sigma=I$$



$$I=\iint_D\frac{y\sin(x^2+y^2)}{x+y}\,d\sigma$$

$$2I=\iint_D\sin(x^2+y^2)\,d\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r\sin r^2\,dr=-\frac{\pi}{4}\cos r^2\Big|_0^1$$

$$=-\frac{\pi}{4}(\cos 1-1)$$ #

·BMDM·

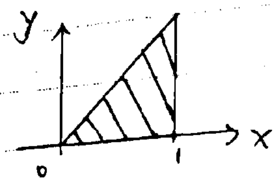
番外篇：积分换序的使用场景

① "积不出" $\begin{cases} x^{2n} e^{\pm x^2} & dx \\ e^{\frac{1}{x}} & dx \\ \cos\frac{1}{x} & dx \\ \sin\frac{1}{x} \end{cases}$

通过换序解决

例1.16.

求 $\int_0^2 dy \int_y^2 x^2 e^{x^2} dx$



解：

$I = \int_0^2 dx \int_0^x x^2 e^{x^2} dy$ （关于y积分视 $x^2 e^{x^2}$ 为常数）

$= \int_0^2 x^3 e^{x^2} dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^4 x e^x \, dx$

$= \frac{1}{2}(3e^4+1)$

☆② "变限积分求导问题" （非常重要!）

▶ 二重积分中 $\frac{d}{dx}\int_a^x \varphi(x,u)\,du$ 此种情况不可避免.
（即 x 混入 $\varphi(x,u)$ 中且无法提出）

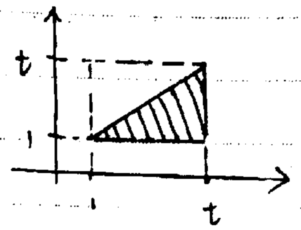
▶ 处理方法：改变积分次序.

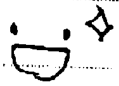
例1.17

求 $\frac{d}{dt}\int_1^t dy \int_y^t f(x)\,dx$ $\left(=\int_1^t \varphi(t,y)\,dy\right)$

解：

$$
\begin{aligned}
\varphi(t) &= \int_1^t dx \int_1^x f(x)\,dy \\
&= \frac{d}{dt}\int_1^t f(x)(x-1)\,dx \\
&= f(t)(t-1)
\end{aligned}
$$



爽吗？ 

「4A篇」之

多元函数微分学

· 本Part解锁条件：极限玩得非常666！
导数定义烂熟

· 本Part特别关注：P117 Def J. P118 $\boxed{三}$
P112 方框 P129. $\boxed{四}$
P130. 尤其关注参数方程法

· 本Part难点：基础好的同学只关注P130之后就好

kira前言：

多元函数微分学不le普遍较难，很多同学直至考试前2天也依然糊成一团。本部分知识细碎，编排或许不如前面有序，你只需将每一页每句话每道题吃透，便足以应对考试要求。

Let's Fight!

一. 定义（极限，可偏导，可微，连续可偏导）
二. 重要关系图
三. 计算求偏导
- 显函数
- 复合函数求偏导 ☆
- 隐函数求偏导 ☆
- 变换求偏导

四. 代数应用
- 无条件极值
- 条件极值（有一个非常好的方法！）

一 定义

Def 1 极限的存在性（$P_{111}-P_{113}$）

极限 $z=f(x,y)$ $((x,y)\in D)$

$M_0(x_0,y_0)$ 若 $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，

当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$.

称 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$

（☺ kira说：这是一个在二维空间，无穷多方向上趋近的问题，非常立体。我们选x、y两个方向只为讨论方便）

① 求极限

可照搬一元函数求极限的方法，但以下方法不可用：

“[illegible]法”×、“洛必达”×、“单调有界准则”×

例1

求 $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ y\to\frac{1}{2}}} \dfrac{\tan(x^2+2xy+y^2-1)}{x+y-1}$　　“等价无穷小替换”

解：

$$\tan(x^2+2xy+y^2-1) \sim x^2+2xy+y^2-1$$

$$\text{原式} = \lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ y\to\frac{1}{2}}} \frac{(x+y)^2-1}{x+y-1}$$

$$= \lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ y\to\frac{1}{2}}} \frac{(x+y)^2-1^2}{x+y-1}$$ 忘了!

$$= \lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ y\to\frac{1}{2}}} (x+y+1) = 2$$

#

例2

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}} \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-\sin\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

解：

$$= \lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}} \frac{\frac{1}{6}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{6}$$

#

例3

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}} \dfrac{\sin(x^2y+y^4)}{x^2+y^2}$　　“夹逼准则”

解：

$$0 < \left|\frac{\sin(x^2y+y^4)}{x^2+y^2}\right| \le \left|\frac{x^2y+y^4}{x^2+y^2}\right|$$

$$\le \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| + \left|\frac{y^4}{x^2+y^2}\right| < |y| + y^2 \to 0$$

$\Rightarrow$ 极限为0。

#

注意 1. 区分 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$

二重极限（同时趋向）　　累次极限（有先后）.

如：

- $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}) = \underline{不∃}$　"第一次已不∃,
- $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}) = \underline{不∃}$　再怎么算也不∃"
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}) = \underline{0}$.

2. 反证不是极限存在，应充分利用唯一性.

若 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\(方向一)}} f(x,y)=A_1$, $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\(方向二)}} f(x,y)=A_2$

若 $A_1\neq A_2 \Rightarrow$ 原极限不存在.

如：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}$　取 $y=x \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$

取 $y=-x \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\y=-x}} = \frac{-x^2}{2x^2}=-\frac{1}{2}$　$\Rightarrow$ 不∃!

（kira一句话判定：次数分子低分母高 或 分子分母齐次 往往没极限！）

Def 2 连续性

连续 — $z=f(x,y)$ $((x,y)\in D)$，$M_0(x_0,y_0)\in D$

若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$，称 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

注：① 若上式不成立，不必讨论间断点类型（无要求）

⑥ 设D为有限闭区域，$f(x,y)$在D上连续，则

a) 存在最小值m和最大值M （最值）

b) $\exists k>0$，$\forall (x,y)\in D$，$|f(x,y)|\le k$ （有界）

c) 若$m<0$，$M>0$，$\exists(\xi,\eta)\in D$，s.t. $f(\xi,\eta)=0$ （零点定理）

d) $\forall \delta\in[m,M]$，$\exists(\xi,\eta)\in D$，s.t. $f(\xi,\eta)=\delta$ （介值定理）

Def 3 偏导数（可偏导性） （☆必考）

偏导数 —— $z=f(x,y)$ $((x,y)\in D)$，$M_0(x_0,y_0)\in D$

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = f_x'(x_0,y_0) \triangleq \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0} \\ \left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = f_y'(x_0,y_0) \triangleq \lim\limits_{y\to y_0}\dfrac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0} \end{cases}$$

（Kira戳穿：本质上求偏导就是一元问题，一元玩不转别这还玩你！求x偏导时，y_0是摆设，是常数，式子只是长得像二元，本质是求一元）

（Kira再戳穿：归根结底，是求极限基本功的问题，所以我把求极限放在第一章的位置！不信看例题！）

例4

已知 $f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^6}}$，求 $f_x'(0,0)$，$f_y'(0,0)$

解：

$$f_x'(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sqrt{x^2}}-1}{x}$$

⇨ "信手拈来"

⇨ "求极限"

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ 不∃.

$f_y'(0,0) = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{e^{\sqrt{y^6}}-1}{y} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sqrt{y^6}}{y} = 0$

综上 $f_x'(0,0)$ 不存在, $f_y'(0,0)=0$. ☆

Def 4 可(全)微性.

可(全)微 — $\Delta z \doteq A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$ $\quad (\rho = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})$

称 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可(全)微.

▲以下概念要明确,要会写填空:

① 全增量: $\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)$

② 线性增量: $dz|_{M_0} \triangleq A\Delta x + B\Delta y$

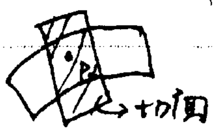
其中 $\begin{cases} A = f_x'(x_0,y_0) \\ B = f_y'(x_0,y_0) \end{cases}$ 是常数.

[$dz|_{M_0}$ 读作"z在M_0处的全微分"]

③ 可代替性: $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\Delta z-(A\Delta x+B\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = 0 \Rightarrow$ 可微!

④ 线性主部: $\Delta z = \underbrace{(A\Delta x + B\Delta y)}_{\text{线性主部}} + o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})$

▲本质: 类比一元情形, 可微本质上是在P_0处用平面代替曲面.



▲背诵并会写以下式子（做题原形）

① (背) $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+o\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

（能写出这一行 ⟺ 在 (x_0,y_0) 一点可微。）

② (背) $f(x,y)-f(x_0,y_0)=A(x-x_0)+B(y-y_0)+o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)$

且 (背) $dz\big|_{(x_0,y_0)}=A\,dx+B\,dy$

（求法：$dz=\underset{(求)}{\underline{\frac{dz}{dx}}}dx+\underset{(求)}{\underline{\frac{dz}{dy}}}dy$ ）

▲注：① 因为 $A=f_x'(x_0,y_0)$，$B=f_y'(x_0,y_0)$，所以必有：
可微 ⟹ 可偏导。

（kira 揭露：可微是从无穷多的方向逼近，
而偏导仅从 x 和 y 两个方向逼近。
"二元函数可偏导是拉坝得不得了的事"）

例15

☆ 一道非常好的例题 (背)

设连续函数 $z=f(x,y)$ 满足

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$$ 求 ① $f_x'(0,1)$

② $f_y'(0,1)$

③ $dz\big|_{(0,1)}$

[分析] $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}[f(x,y)-2x+y-2]=0$ ⟹（依据 $P_{10}-P_{11}$ 工具▲）

⟹ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}f(x,y)=1=f(0,1)$ ⟹ 连续

又 $f(x,y)-2x+y-2=o\left(\sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2}\right)$ → 点睛之笔!!!

由 $f(x,y)-f(x_0,y_0)=A(x-x_0)+B(y-y_0)+o\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$

$f(x,y)-f(0,1)=2(x-0)+(-1)(y-1)+o\sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2}$

$A=f_x'(0,1)=2$, $B=f_y'(0,1)=-1$

$dz|_{(0,1)}=2dx-dy$

(如果不是解答题:

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}[f(x,y)-2x+y-2]=0$

特值法 取 $f(x,y)=2x-y+2$

$f_x'=2$, $f_y'=-1$, $dz=2dx-dy$.)

Pot 5 连续可偏导

△ "连续可偏导"就是"偏导数连续",两种说法完全等价.

判断 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 是否连续可偏导(非常有用!!!)

- step 1. 用定义法求 $f_x'(x_0,y_0)$, $f_y'(x_0,y_0)$ (特点)
- step 2. 用公式法求 $f_x'(x,y)$, $f_y'(x,y)$ (论点)
- step 3. 验证 ① $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f_x'(x,y) \overset{?}{=} f_x'(x_0,y_0)$

  ② $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f_y'(x,y) \overset{?}{=} f_y'(x_0,y_0)$

若 ①.② 均成立 ⇒ $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处偏导数连续

即在 (x_0,y_0) 处连续可偏导.

三 重要关系图

Kira 教你看一眼就记住!!!

弱 ↓ 强

Layer 3　　连续 $\not\rightleftarrows$ 可偏导

$\nwarrow\!\not\searrow$　　$\not\swarrow\!\nearrow$

Layer 2　　可微

$\uparrow\!\not\downarrow$

Layer 1　　连续可偏导

"下面可以推出上面，上面推不出下面；
同层(Layer 3)不可互推；上面不满足，下面必不满足"

记住"连续可偏导最强，可微次之，连续和可偏导最弱"
即可（考试现场自己画）.

☆ 弄透此三题，不怕考大题

例6

$f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^4}}$ 在 $(0,0)$ 处连续，研究：① 有无x偏导 ② 有无y偏导.

[分析]

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{e^{|x|}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{|x|}{x}\text{ 不存在.}$$

$\Rightarrow f_x'(0,0)$ 不存在.

$$\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to0}\frac{e^{x^2}-1}{x}=\lim_{x\to0}x=0$$

$\Rightarrow f_y'(0,0)=0.$

例7

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

研究：① 可偏导？ ② 连续性？

[分析]

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{0}{x^5}=0 \Rightarrow f_x'(0,0)=0$$

同理 $f_y'(0,0)=0$.

由 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0\\y=x^2}} f(x,y)=\frac{1}{2}$，$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0\\y=-x^2}}=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)$ 不存在 $\Rightarrow f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续

☆

例8

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

研究：① 连续？ ② 可偏导？ ③ 可微？

解：

① $0\leq|f(x,y)|=|x|\cdot\dfrac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq|x|$

$\because \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}|x|=0$ $\therefore \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0=f(0,0)$

$\therefore f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续.

② $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{0}{x|x|}=0\Rightarrow f_x'(0,0)=0$

同理 $f_y'(0,0)=0$

$\therefore f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可偏导.

③ $\Delta z=f(x,y)-f(0,0)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$

$$\lim_{\rho\to0}\frac{\Delta z-A(x-0)-B(y-0)}{\rho}$$

$=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在 $\Rightarrow f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不可微 ☆

三 计算求偏导（此处有套路！）

Case 1 显函数（太easy，几乎不考）

例9

① $z = x^y + y^x$

$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = y x^{y-1} + y^x \ln y$ （x为变量，则视y为常数）

② $z = \arctan \frac{x+y}{x-y}$

$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2} \cdot \frac{x-y-(x+y)}{(x-y)^2}$

Case 2 复合函数及隐函数求偏导

一个扫盲：复合函数和抽象函数到底什么意思？

Easy：$f(x,y)$是关于x和y的二元函数的抽象写法

如：$f(x,y) \triangleq x^2 + \frac{1}{2}y + e^y$ （$*$）

Medium：面对许许多多复杂的实际问题，$f(x,y)$已不能满足我们的需求，于是有了$f(u,v)$，

$u = u(x,y)$，$v = v(x,y)$

如：$f(u,v)$，$u = e^x\cos y$，$v = x^2+y^2$

或直接写为 $f(e^x\cos y, x^2+y^2)$ [推荐]

套用在（$*$）式中，$f(e^x\cos y, x^2+y^2)$ 实际为

$(e^x\cos y)^2 + \frac{1}{2}(x^2+y^2) + e^{x^2+y^2}$

即 $e^x\cos y$ 代替了x的位置，x^2+y^2 代替了y的

位置

Hard：更有甚者，$z=f(x+y,\ f(x,y))$，抽象函数套抽象函数，套在(*)式中，z实际为：

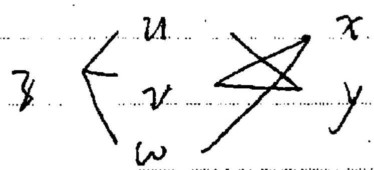
$$(x+y)^2+\frac{1}{2}f(x,y)+e^{f(x,y)}，其中 f(x,y)=x^2+\frac{1}{2}y+e^y.$$

（Kira总结：$f(_,_)$的以上本质必须明白才能做好，考试直接玩抽象函数，不必写成具体表达式（通常题中也没给），有事有必加笔油！）

二个常识：

① 链式求导规则 （画树连线，依次抄写）

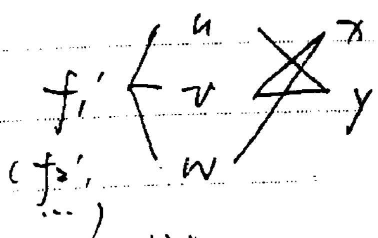
如：$z=f(u,v,w)$，$u=u(y)$，$v=v(x,y)$，$w=w(x)$

step1.
逐层写变量，再连线 ⇒ 

step2.
看z通过谁能连到x，就写谁，不可多不可漏 ⇒ $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}$ （u不通x）

② z无论对谁求导，求n阶导，求导后的新函数与原来函数z有相同复合结构 （★★★★★重要结论）

也就是说，对于①中例式，f_1'，f_2'，f_{11}''…的复合结构永远是



③ 识别"几元几个方程"

- $F(x,y,z)$ ⇨ 一个二元方程
- $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ ⇨ 二个一元方程（只有一个变量自由）（所以写 $\frac{dz}{dx}$，而非 $\frac{\partial z}{\partial x}$）
- $\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$ ⇨ 二个二元方程（2个自由变量，2个约束变量）.

▶ 书写规范

（按此规范走，永远写不错，也永远算不错！非常好用！）

$$\boxed{z=f(\underset{1}{-},\underset{2}{-}) \quad \text{"第1个位置"，"第2个位置"}，f_1'，f_2'}$$

所以，不管三七二十一，直接写 $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot\_\_+f_2'\cdot\_\_$

一个个位置看就好，非常方便~

下面结合例题实战具体来感受一下（≧▽≦）

例10

设 $z=f(e^x\cos y,\ x^2+y^2)$，f 有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

[分析]"$z=f(\underset{1}{-},\underset{2}{-})$（两个位置）"

$$z=f\left<\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right. \bowtie \begin{matrix}x\\y\end{matrix}$$

·BMDM·

解：$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1' \cdot e^x\cos y + f_2' \cdot 2x$ ⇨（每个位置对 x 求偏导）

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial x})}{\partial y} = \underbrace{\frac{\partial(f_1' \cdot e^x\cos y)}{\partial y}}_{I_1} + \underbrace{\frac{\partial(f_2' \cdot 2x)}{\partial y}}_{I_2}$$

$$I_1 = \frac{\partial f_1'}{\partial y} \cdot e^x\cos y + f_1' e^x(-\sin y)$$

$$= (f_{11}'' \cdot e^x(-\sin y) + f_{12}'' \cdot 2y)\, e^x\cos y + f_1' e^x(-\sin y)$$

$$I_2 = 2x \cdot \frac{\partial f_2'}{\partial y} = 2x\,(f_{21}'' \cdot e^x(-\sin y) + f_{22}'' \cdot 2y)$$

#

😊 Kira 备注：就按乘法求导法则层层剥开写，永远不会错！）

☆ 此处用到一个重要结论：若 $z = f(x,y)$ 二阶连续可偏导

则 $f_{xy}'' = f_{yx}''$.

所以，不必纠结 x 和 y 谁先求谁后求，根据具体函数随机应变即可~❤

例 11 "考生对本题的混乱程度不可想象"

设 $f(u,v)$ 二阶连续偏导数，$f(1,1)=2$，$f_1'(1,1)=0$

$f_2'(1,1)=0$，$z = f(x+y, f(x,y))$，求 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}$

[分析] [错] $\frac{\partial z}{\partial x} = f_1' \cdot 1 + f_2' \cdot f_x'$ ✗ ∵ $z = f\langle {}^1_2 \rangle \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$

∴ 解释：对于 $f(x,y)$ 依然要分位置 1，2，不能笼统对 x 求导了事

[又错]: $f < \begin{matrix} ① < \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \\ ② \text{"}f(x,y)\text{"} < \begin{matrix} ① - x \\ ② - y \end{matrix} \end{matrix}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1' \cdot 1 + f_2' \cdot f_1' \cdot 1 \quad \times \ !$$

解释: 两个 f_1' 混了! 看着糟心! 打多不能省!

(☺ 必须按。规。矩。写得一清二楚才可以! 不怕麻烦, 别省笔油!)

[正确答案]

$$z = f(\underset{1}{x+y}, \underset{2}{f(x,y)}) \quad < \begin{matrix} \overset{x+y}{1} \\ \underset{f(\underset{1}{x}, \underset{2}{y})}{2} \end{matrix} \ \rightrightarrows \ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$$

("都写1,2. 因为 $f(-,-)$ 同") ⇨

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1'(x+y, f(x,y)) + f_2'(x+y, f(x,y)) \cdot f_1'(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \triangleq \frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial x})}{\partial y} = [f_{11}''(x+y, f(x,y)) + \overset{0}{\cancel{f_{12}''(x+y, f(x,y)) \cdot f_1'(x,y)}}]$$
$$\cancel{+ [f_1'(x,y)(f_{21}''(x+y, f(x,y)) \cdot 1 + f_{22}''(x+y, f(x,y)) \cdot f_2'(x,y))}^{0}$$
$$+ f_2'(x+y, f(x,y)) \cdot f_{12}''(x,y) \cdot 1 \ ]$$

$$\boxed{故 \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(1,1)} = f_{11}''(2,2) + f_2'(2,2) \cdot f_{12}''(1,1)}$$

(☺ Kira tips: ① 这种题只管大胆展开. 反正都能消去. 一堆0, 题中的 $f(1,1)=2$ 也是早有预谋. 无巧不成题! ② 结果大胆保留即可. 不必纠结.)

例12

① φ, Φ 二阶可导, $u=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\Phi(t)\,dt$

求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

解:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(x+y)+\varphi'(x-y)+\Phi(x+y)-\Phi(x-y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(x+y)-\varphi'(x-y)+\Phi(x+y)+\Phi(x+y)$$

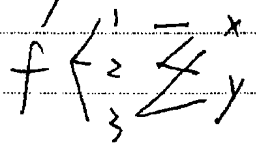
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+\Phi'(x+y)-\Phi'(x-y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\varphi''(x+y)+\varphi''(x+y)+\Phi'(x+y)-\Phi'(x-y)$$

② $z=f(x^2, xy, \frac{y}{x})$ 二阶连续可偏导, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

解:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot 2x+f_2'y+f_3'\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$



$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x\left(f_{12}''\cdot x+f_{13}''\cdot\frac{1}{x}\right)+f_2'+y\left(f_{22}''x+f_{23}''\cdot\frac{1}{x}\right)+\left(-\frac{1}{x^2}\right)f_3'+\left(-\frac{y}{x^2}\right)\left(f_{32}''x+f_{33}''\frac{1}{x}\right)=\cdots \quad (\text{整理})$$

隐函数相关例题

例13.

已知 $F(x+\frac{z}{y}, y+\frac{z}{x})=0$ 求证 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$

解: (一个约束, 2个自由变量)

对x, y求偏导, 有

$$\begin{cases} F_1'\left(1+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right)+F_2'\dfrac{\frac{\partial z}{\partial x}\cdot x-z\cdot 1}{x^2}=0 & ① \\ F_1'\left(\dfrac{y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}-1\cdot z}{y^2}\right)+F_2'\left(1+\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0 & ② \end{cases} \Rightarrow$$

分别解①和②即得 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, 此处不再赘述, 关注方法即可

例14 已知 $u=f(x,y,z)$，$z=\varphi(x,y)$ 由 $xe^x-ye^y=ze^z$ 确定，求 du.

解：

〈法一〉 step1. $\begin{cases} u=f(x,y,z) \\ xe^x-ye^y=ze^z \end{cases}$ ⇐ (两个二元方程，视 u,z 为 x,y 的函数)

step2. $du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$

step3. $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}=f_x'+f_z'\frac{\partial z}{\partial x} \\ (1+x)e^x=\frac{\partial z}{\partial x}e^z+ze^z\frac{\partial z}{\partial x} \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1+x}{1+z}e^{x-z} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=f_x'+\frac{1+x}{1+z}e^{x-z}\cdot f_z'$

再对 y 求偏导得最终结果.

〈法二〉 $du=f_x'dx+f_y'dy+f_z'dz$ (*)

(微分运算性质) 由 $xe^x-ye^y=ze^z \Rightarrow d(xe^x)-d(ye^y)=d(ze^z)$

$\Rightarrow (1+x)e^x dx-(1+y)e^y dy=(1+z)e^z dz$

将 dz 用 dx 和 dy 表示出后，代入 (*) 式即可.

Case 3. 变换求偏导 (重头戏，套路深，不基础)

将 $z=f(x,y)$ 变为 $z=g(u,v)$

· 型1. $\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \end{cases}$ 即 $\begin{cases} \partial x \\ \partial y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \partial u \\ \partial v \end{cases}$

$z<^{u}_{v}\times^{x}_{y}$

型2. $w=w(z,x,y)$, $\begin{cases}u=u(x,y)\\v=v(x,y)\end{cases}$

$z=f(x,y) \Rightarrow w=g(u,v)$

$\boxed{\text{即 } \partial z \Rightarrow \partial w \text{ 同时 } \begin{cases}\partial x\\ \partial y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\partial u\\ \partial v\end{cases}}$

☆ 做题套路:

step 1. 将 $dz \Rightarrow dw$ (即"$\frac{\partial z}{\partial x}=f(\frac{\partial w}{\partial x})$")

step 2. $\begin{cases}\partial x\\ \partial y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\partial u\\ \partial v\end{cases}$ (即"$\frac{\partial w}{\partial x}=g(\frac{\partial w}{\partial u},\frac{\partial w}{\partial v})$")

(看例题就明白了. 实在有序 !!!)

例 15. (型2)

给定 $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=(y-x)z$, 其中 $w=\ln z-(x+y)$,

$u=x^2+y^2$, $v=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, 试将原等式化为 w,u,v 的等式

解:

step 1. ("$\partial z \to \partial w$")

由 $w=\ln z-(x+y)$

$$\Rightarrow \begin{cases}\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{1}{z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-1\\ \frac{\partial w}{\partial y}=\frac{1}{z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=z(1+\frac{\partial w}{\partial x})\\ \frac{\partial z}{\partial y}=z(1+\frac{\partial w}{\partial y})\end{cases}$$ ok!

step 2. ("$\begin{cases}\partial x\\ \partial y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\partial u\\ \partial v\end{cases}$")

$$\begin{cases}\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}\cdot 2x-\frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}\\ \frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial u}\cdot 2y-\frac{1}{y^2}\cdot\frac{\partial w}{\partial v}\end{cases}$$

$w<\begin{matrix}u\\v\end{matrix}\times\begin{matrix}x\\y\end{matrix}$

"无巧不成题!"

将step1结果代入原式，有 $y\frac{\partial w}{\partial x}-x\frac{\partial w}{\partial y}=0$

将step2结果代入上式，有

$$y\left(\frac{\partial w}{\partial u}\cdot 2x-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\partial w}{\partial v}\right)-x\left(\frac{\partial w}{\partial u}\cdot 2y-\frac{1}{y^2}\cdot\frac{\partial w}{\partial v}\right)=0$$

整理得 $\frac{\partial w}{\partial v}=0$ ※

例16 (型1)

设 $z=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数且满足等式

$$4\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+12\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

试确定 a,b 的值，使等式在变换 $u=x+ay,\ v=x+by$ 下简化为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$.

[分析] $z<{x \atop y} \to z<{u \atop v} \times {x \atop y}$

解：

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot 1+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot 1\\ \frac{\partial z}{\partial y}=a\cdot\frac{\partial z}{\partial u}+b\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot 1+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot 1+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=a\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}(a+b)+b\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=a\left(a\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+b\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\right)+b\left(a\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}+b\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)\\ \qquad=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2ab\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+b^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\end{cases}$$

有 $(4+12a+5a^2)\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(8+12a+12b+10ab)\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}+(4+12b+5b^2)\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0$.

$$\begin{cases} 4+12a+5a^2=0 \\ 4+12b+5b^2=0 \\ 8+12(a+b)+10ab\neq 0 \end{cases}$$ 解得 $\begin{cases} a=-2 \\ b=-\frac{2}{5} \end{cases}$，$\begin{cases} a=-\frac{2}{5} \\ b=-2 \end{cases}$

（舍去 $\begin{cases} a=-2 \\ b=-2 \end{cases}$，$\begin{cases} a=-\frac{2}{5} \\ b=-\frac{2}{5} \end{cases}$）

☆

四 多元函数微分学的代数应用 （有重大干货！）

(一) 无条件极值 （极值点定义在开域，边界无资格讨论极值）

①（必要条件）设 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 有偏导数，且在点 (x_0,y_0) 取极值，则有 $f_x'(x_0,y_0)=0$，$f_y'(x_0,y_0)=0$

[注] 该必要条件同样适用于三元及以上函数.（老的~）

②（充分条件） $f_{xx}''(P_0)=A$，$f_{xy}''(P_0)=B$，$f_{yy}''(P_0)=C$.

令 $\Delta=B^2-AC$，

若 $\begin{cases} \Delta<0 \Rightarrow \text{必为极值点}, \begin{cases} A<0 & \text{极大值} \\ A>0 & \text{极小值} \end{cases} \\ \Delta>0 \Rightarrow \text{必不为极值点} \\ \Delta=0 \Rightarrow \text{该法失效} \end{cases}$ （"$\Delta=0$" 不出题!!!）

[注] 不适用三元及以上（求极值最多到二元）

（☺ kira经验：无条件极值通常作为条件极值题的一种情况讨论（详见例题））

(二) 条件极值

《型》 $z=f(x,y)$，s.t $\varphi(x,y)=0$ （等式）

（☺ kira提醒：当且仅当约束条件为严格等于"="时，才为条件极值.）

解题套路（终极版） [针对求最值的题目]

▶ step1. 将题干中的约束条件拆为"条件极值"和"无条件极值"两部分.

▶ step2. 对"无条件极值"，由 $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial z}{\partial y}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=? \\ y=0 \end{cases}$，

求出全部驻点 (x_0, y_0)

- Case A. 若为"求极值"问题，验 $\Delta=B^2-AC$，判断极值点类型，求出极值.
- Case B. 若为"求最值"问题，不必验 Δ，最后一起比较大小即可.

▶ step3. 对"条件极值"，有两种方法和三种计算思路

方法一 拉格朗日乘数法 (经典方法)

1. 令 $F=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$
2. 解 $\begin{cases} F_x' = f_x' + \lambda\varphi_x' = 0 & ① \\ F_y' = f_y' + \lambda\varphi_y' = 0 & ② \\ F_\lambda' = \varphi(x,y) = 0 & ③ \end{cases}$

- 思路一：①②消去λ（移项 ①/②）⇒ $y=y(x)$ 代入③
  【见例17】
- 思路二：①②求出λ，代回①（或②）⇒ $y=y(x)$，代入③
  【见例18】 [辅助线代]
- 思路三：①或②求出λ或 $y=y(x)$，代入③.

方法二 参数方程法 (好困到想哭！T^T)

·BMDM·

由 $\varphi(x,y)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ （其中 $\alpha\le t\le\beta$）　（如 $x^2+y^2=4$ 有 $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}$）

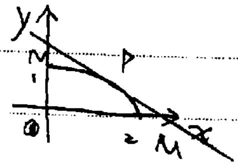
则 $z=f[x(t),y(t)]$ $(\alpha\le t\le\beta)$ [可用配方、求导…(高中难度)]

【见例19、20】

例17 ——（对应P130 思路1）

椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 切图，作切线，切点位于第一象限，分别交x轴、y轴于M、N，求$\triangle MON$的最小面积

解：



由 $\frac{x^2}{4}+y^2=1 \Rightarrow \frac{x}{2}+2y\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{4y}$

1° $P(x,y)\in L$，切线方程 $Y-y=-\frac{x}{4y}(X-x)$

$\begin{cases} \text{令 } Y=0 \Rightarrow X=x+\frac{4y^2}{x}=\frac{4}{x}\left(\frac{x^2}{4}+y^2\right)=\frac{4}{x} \Rightarrow M=\left(\frac{4}{x},0\right) \\ \text{令 } X=0 \Rightarrow Y=y+\frac{x^2}{4y}=\frac{1}{y}\left(\frac{x^2}{4}+y^2\right)=\frac{1}{y} \Rightarrow N=\left(0,\frac{1}{y}\right) \end{cases}$

2° 原题可写为求 $S=\frac{2}{xy}$ 最小值. s.t. $\frac{x^2}{4}+y^2-1=0$

3° 用拉格朗日乘数法

$$F=\frac{2}{xy}+\lambda\left(\frac{x^2}{4}+y^2-1\right)$$

$$\begin{cases} F'_x=-\frac{2}{x^2y}+\frac{\lambda}{2}x=0 & ① \\ F'_y=-\frac{2}{xy^2}+2\lambda y=0 & ② \\ F'_\lambda=\frac{x^2}{4}+y^2-1=0 & ③ \end{cases}$$

（草稿纸：$\dfrac{-\frac{2}{x^2y}}{-\frac{2}{xy^2}}=\dfrac{-\frac{\lambda}{2}x}{-2\lambda y} \Rightarrow y=\frac{x}{2}$ 代入③ $\Rightarrow$）　解得：$\begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

实际问题一定有最优解　$S_{min}=2$

(Kira补充：本题亮点多多，除了 $\frac{①}{②}$ 代入③ 的"思路一"之外，
①中求 u 和 λ 也用到重要技巧，即将
$(\frac{x^2}{4}+y^2)$ 整体提出，充分利用题干 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$
这种直接凑题干，代题干的技巧在多元
极值问题中非常常用，必须掌握~！)

♥ "为什么有的人做题飞快，且不出错呢？
为什么呢？" ——

例18 （对应 P130 思路二）

求 $u=xy+2yz$ 在 $x^2+y^2+z^2=10$ 下的最大值与最小值.

解：

用拉格朗日乘数法

$$F(x,y,z,\lambda)=xy+2yz+\lambda(x^2+y^2+z^2-10)$$

求偏导

$$\begin{cases} F_x'=y+2\lambda x=0 & ① \\ F_y'=x+2z+2\lambda y=0 & ② \\ F_z'=2y+2\lambda z=0 & ③ \\ F_\lambda'=x^2+y^2+z^2-10=0 & ④ \end{cases}$$

再次用到题干!!!

(草稿纸： ①·x ②·y ③·z

$$\left.\begin{aligned} xy+2\lambda x^2&=0 \\ xy+2yz+2\lambda y^2&=0 \\ 2yz+2\lambda z^2&=0 \end{aligned}\right\} \underbrace{2(xy+2yz)}_{u}+2\lambda\underbrace{(x^2+y^2+z^2)}_{10}=0$$

$\Rightarrow u=-10\lambda$

又

$$\begin{cases} 2\lambda\cdot x+1\cdot y+0\cdot z=0 \\ 1\cdot x+2\lambda\cdot y+2\cdot z=0 \\ 0\cdot x+2\cdot y+2\lambda\cdot z=0 \\ x,y,z\text{不全为}0 \end{cases}$$

$AX=0$ 有非0解 $\Leftrightarrow |A|=0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 2\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \lambda_3 = -\frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = -5\sqrt{5} \\ u_3 = 5\sqrt{5} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 最大值 $5\sqrt{5}$，最小值 $-5\sqrt{5}$

注意：

① 解方程的过程不必写在卷面，直接给最终结果即可.

② 但是，结果占分数大头. 列式不难，解才难. 实在解不出就编两个结果. 宁多说，"防着 -6，编2个结果 -4". 宁可信其有……

例19 （毕丽丽的参数方程法！）

求 $z = x^2 - 2x - 2y^2 + 3$，在 $D: x^2+y^2 \le 1$ 上的 m, M.

解：

当 $x^2+y^2<1$ 时

由 $\begin{cases} 2x-2=0 \\ -4y=0 \end{cases} \Rightarrow$ 无解

当 $x^2+y^2=1$ 时 令 $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$

$$z = \cos^2 t - 2\cos t - 2\sin^2 t + 3$$
$$= 3\cos^2 t - 2\cos t + 1 = 3\left[\left(\cos t - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}\right] + 1$$
$$= 3\left[\cos t - \frac{1}{3}\right]^2 + \frac{2}{3}$$

当 $\cos t = \frac{1}{3}$ 时，$z_{min} = \frac{2}{3}$；

当 $\cos t = -1$ 时，$z_{max} = 6$；

所以 $m = \frac{2}{3}$，$M = 6$

Kira 突击重点：

① 约束 "≤" or "≥" 通常被拆为无条件极值和条件极值两部分

即 "=" 和 "<"/">"，用各自闭合自方法求解。

② 能用参数方程解决的问题决不用拉格朗日！

例 20

$2xdx-2ydy$ 是一个二元函数的全微分，而且 $u(0,0)=3$

求二元函数在椭圆上的最大、小值 $x^2+4y^2\le 4$.

解：

step 1. 求 $u(x,y)$　　【你肯定不熟！】

法一：$du=2xdx-2ydy=d(x^2)-d(y^2)=d(x^2-y^2)$

$\Rightarrow u=x^2-y^2+c$

$\because u(0,0)=3 \quad \therefore c=3.$

$u=x^2-y^2+3$

法二：$\frac{\partial u}{\partial x}=2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-2y$

$\frac{\partial u}{\partial x}=2x \Rightarrow u=x^2+\varphi(y)$,

$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(y)=-2y \Rightarrow \varphi(y)=-y^2+c$

$\therefore u=x^2-y^2+c$

$\because u(0,0)=3 \quad \therefore c=3 \Rightarrow u=x^2-y^2+3$.

step 2. 当 $x^2+4y^2<4$ 时.

由 $\begin{cases} 2x=0 \\ -2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$, $u(0,0)=3$.

当 $x^2+4y^2=4$ 时. 令 $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$

（非常熟练!!!）

$z = 4\cos^2 t - \sin^2 t + 3 \quad = 5\cos^2 t + 2$

当 $\cos t = 0$，$z_{min} = 2$.

当 $\cos t = \pm 1$，$z_{max} = 7$.　　即 $m = 2$. $M = 7$.

「4A篇」之

微分方程

- 本Part的解锁条件：不定积分比较666
- 本Part的特别关注：P142 kira 支招 等
- 本Part的缺点：内容不多，都看看，全套路

Kira 前言：

微分方程是考研必考的部分，知识点清晰，摸套路走即可。去年12月我去大家答疑时，发现很多同学这里学得一塌糊涂。我觉得一方面是这块套路不清晰，另一个主要原因是积分底子没打好。

「大王小王篇」是根基！务必经常返工！

Let's Fight！

一. 概念（微分方程，阶数，通解，解的结构）

二. 一阶微分方程求解：
- 变量可分离型（最快）
- 齐次型
- 一阶线性型（最高频）
- 可降阶二阶微分方程

三. 高阶微分方程求解：
- 齐次
- 非齐次

（套模板即可）

一 概念

Def 1. n阶微分方程

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$$ "全家福"

$y^{(n)}$ ↑ 最高阶不能缺

Def 2. 阶数

y的导数的最高次数 $\begin{cases} n=1 & \text{一阶} \\ n\geq 2 & \text{高阶} \end{cases}$

Def 3 通解 "通解" ≠ "全部"

[注] 做题仅求出通解即可，允许丢奇解（特殊解）

Def 4 解的结构及相关

① $y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$ (*)
(n阶齐次线性微分方程)

② $y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=f(x)$ (**)
(n阶非齐次DE)

若 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$

$y^{(n)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=f_1(x)$ (**)'

$y^{(n)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=f_2(x)$ (**)''

即 (**) 可拆成两个子方程。

③ 结构：

(i) 若 $\varphi_1(x),\cdots,\varphi_s(x)$ 为 (*) 之解
$\Rightarrow k_1\varphi_1(x)+\cdots+k_s\varphi_s(x)$ 为 (*) 之解

★★★★★(ii) 若 $\varphi_1(x),\cdots,\varphi_s$ 为 (**) 解
$\Rightarrow k_1\varphi_1(x)+\cdots+k_s\varphi_s(x)$ $\begin{cases}\text{为(*)解} \Leftrightarrow k_1+k_2+\cdots+k_s=0 \text{ (齐)}\\ \text{为(**)解} \Leftrightarrow k_1+\cdots+k_s=1 \text{ (非齐)}\end{cases}$

(iii) (*)解 + (**)解 = (**)解
即"齐次解 + 非齐次解 = 非齐次解"

(iv) (**)解 − (**)解 = (*)解

(v) $(**)'$解 + $(**)''$解 = $(**)$解

(◡ kira强调：解的结构中每一条都非常重要，
其中 (i)(iii)(iv) 是常识，
(ii) 汤神给的，非常好用，可以秒很多题。)

三 一阶微分方程求解

1. 变量可分离型

若 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)=g(x)\cdot h(y)$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{h(y)}=\int g(x)\,dx$$

(◡ kira备注：这是最简单的一种型，如果考试遇到真是要开心死了。我本科学ODE，最先学会的就是此法。)

例1

求 $y'+y^2\tan x=\tan x$ 的通解

解：

$$\frac{dy}{dx}=\tan x\,(1-y^2)$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{1-y^2}=\int \tan x\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right|=-\ln|\cos x|+\ln c_1$$

$$\Rightarrow \left|\frac{1+y}{1-y}\right|^{\frac{1}{2}}=\frac{c_1}{|\cos x|} \Rightarrow \left|\frac{1+y}{1-y}\right|=\frac{c_1^2}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow \frac{1+y}{1-y}=\frac{c}{\cos^2 x} \Rightarrow y=\frac{c-\cos^2 x}{c+\cos^2 x},\ c\neq 0 \quad ※$$

讨论分

[注] ① 当过程中出现 $\ln x$ 时，也不用加正负 ⇒ 加"| |"；
② 拆掉"| |"的方式有"+平方"和"用 C 替换 C_1"
在例1中都有体现。

2. 齐次型

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right) \qquad y=y(x)$$

则令 $y/x=u$，则 $y=u\cdot x$ ⇒

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}\cdot x+u\cdot 1 \Rightarrow \frac{du}{dx}x+u=f(u)$$

$$\Rightarrow \frac{du}{f(u)-u}=\frac{dx}{x} \qquad \text{(即化为可分离变量型)}$$

（Kira 备注：不用背，考试时发现 $\frac{dy}{dx}=f(\frac{y}{x})$ 这种型
直接令 $u=\frac{y}{x}$，剩余再慢慢推，很简单）

例2 （易错！）

求 $ydx-(x+\sqrt{x^2+y^2})dy=0$ 的通解 $(y>0)$

[分析]

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\frac{y}{x}}{1+\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}} \quad \times$$

（此法不好，因为要分 $\begin{cases}x>0\\x<0\end{cases}$ 讨论，在根号前填正负号）

解：
$$\frac{dx}{dy}=\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{y} \qquad (x=x(y))$$

$$=\frac{x}{y}+\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}$$

令 $\frac{x}{y}=u$，则 $x=u\cdot y$ ⇒ $\frac{dx}{dy}=\frac{du}{dy}\cdot y+u\cdot 1=u+\sqrt{u^2+1}$

$$\Rightarrow \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right) = \ln y + \ln c_1$$

$$\Rightarrow u+\sqrt{1+u^2} = cy \overset{\text{回代}}{\Rightarrow} \frac{x}{y} + \sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} = cy \quad (c>0) \text{※}$$

(😊 Kira备注:

① 回代后可保留除式解

② $x=x(y)$ 是非常好用的救命之法，在作业中常见常考)

☐、☐ 汤神说："微分方程要多做，很多书的解答算得要死啊！"

—— 例3 —— （聪明地计算~）

$$x\,dy = \left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx \qquad (x>0)$$

解：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

$$\overset{\frac{y}{x}=u}{\Longrightarrow} \quad u + x\frac{du}{dx} = u + \sqrt{1+u^2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int \frac{dx}{x} + \ln c$$

$$\ln\left(u+\sqrt{u^2+1}\right) = \ln x + \ln c$$

$$\Rightarrow u + \sqrt{u^2+1} = cx \qquad (\text{“可以不解”})$$

▲ 取倒数 $\sqrt{u^2+1} - u = \frac{1}{cx}$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{2}\left(cx - \frac{1}{cx}\right) \Rightarrow y = \frac{x}{2}\left(cx - \frac{1}{cx}\right) \quad (c>0) \text{※}$$

(TT^TT 非常漂亮的妙解！根本反应不过来！)

六、一阶线性微分方程

① 齐次 ▶ def - $\frac{dy}{dx}+p(x)y=0$

死背 ⇨ ▶ 通解公式：$y=ce^{-\int p(x)dx}$

☆☆☆☆② 非齐次 ▶ def - $\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(y)$

▶ 通解公式：

死背 ⇨ $y=[\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx+c]e^{-\int p(x)dx}$

例4 （计算大有决窍！）

求 $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x}=4$ 解

解：

$y=(\int 4e^{\int -\frac{2}{x}dx}dx+c)e^{-\int -\frac{2}{x}dx}$

$=(-\frac{4}{x}+c)x^2$

$\therefore y=cx^2-4x\quad ,\forall c$

※

（kira 支招：注意到 $e^{\int p(x)dx}$ 和 $e^{-\int p(x)dx}$ 互为倒数，算一个就够了，另一个直接放心大胆写倒数。）

例5

求 $y'=\frac{y}{2x}+\frac{x^2}{2y}$ 的通解

解：

$y'+(-\frac{1}{2x})y=\frac{x^2}{2}\cdot y^{-1}$ $\xRightarrow{\text{（两边乘}y\text{）}}$

$y\cdot y'+(-\frac{1}{2x})y^2=\frac{x^2}{2}$ $\xRightarrow{\text{（令}y^2=t\text{）}}$

$\frac{1}{2}t'+(-\frac{1}{2x})t=\frac{x^2}{2}$ $\Rightarrow$

$t'+(-\frac{1}{x})t=x^2$ $\Rightarrow t=\frac{1}{2}x^3+cx\Rightarrow y=\frac{1}{2}x^3+cx,\ \forall c.$

※

（Kira 提醒：永远记得写 C 的范围哦~）

4. 可降阶的高阶微分方程.

- Case 1. $y''=f(x,y')$，缺 y

方法："缺 y 就对 y 赶尽杀绝，干掉 y'，y''"

▶ 令 $y'=p$，则 $y''=\frac{dp}{dx}$ $\Rightarrow$

$\frac{dp}{dx}=f(x,p)$

如 $y''=x\cdot y' \overset{y'=p}{\Rightarrow} \frac{dp}{dx}=x\cdot p$ 分离变量

- Case 2. $y''=f(y,y')$ 型. 缺 x

方法："缺 x 就决不允许 x 再出现，斩草除根 x"

▶ 令 $y'=p$，则 $y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot p$

三 高阶微分方程求解

【Kira 六个字：背公式，套模板！】

（要拿满分哦~）

1. 齐次 $\quad y''+py'+qy=0$

$$\lambda^2+p\lambda+q=0 \quad , \Delta=p^2-4q$$

背

① 当 $\Delta>0 \Rightarrow \lambda_1\neq\lambda_2$，$y_{齐通}=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$

② 当 $\Delta=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda$，$y_{齐通}=(C_1+C_2x)e^{\lambda x}$

③ 当 $\Delta<0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i$，$y_{齐通}=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

（全考研数学唯一涉及复数之处，直接死记硬背~）

例 6 ______ （化"超纲"为正常）

设 $\cos x$ 与 xe^x 为某四阶常系数线性齐次微分方程的两个解，则首项系数为1的该方程为______

解：

$$\cos x = e^{0\cdot x}(1\cdot\cos x + 0\cdot\sin x)$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = 0 \pm i \Rightarrow \lambda^2+1=0$$

$$xe^x = (0+x\cdot 1)e^{1\cdot x}$$

$$\Rightarrow \lambda_3=\lambda_4=1 \Rightarrow (\lambda-1)^2=0$$

$$\Rightarrow (\lambda^2+1)(\lambda-1)^2=0$$ "别忘了写成表达式"

$$\Rightarrow \lambda^4-2\lambda^3+2\lambda^2-2\lambda+1=0$$

$$\Rightarrow y^{(4)}-2y^{(3)}+2y''-2y'+y=0$$

（Kira 贱贱地说：
微分方程计算你唯一要做的，就是把已知条件套入固定形式（模板），如例6那样。再就是把积分练好，不怕计算～没了!!!）

2. 非齐次

△ 非齐次通解 = 齐次通解 + 特解 （P138 解的结构）

齐次通解的求法刚刚已经会了，此部分任务是学如何求特解。以下左栏是模板，右栏是实例，两栏对照着看！所有题目都可参考这两栏照搬～。你问我什么叫"举一反三"？That is "举一反三"！

泛做10道习题，不如精做一道例题；
例题有凭有证，例题有头有尾；
可以一抵十，以一抵百，且信心大涨。
——kira

〈模板〉

① $y''+py'+qy=e^{\alpha x}\cdot P_m(x)$

设 $y^*=e^{\alpha x}\cdot Q_m(x)\cdot x^k$

一看：自由项中的 α

二算：$\lambda^2+p\lambda+q \Rightarrow \lambda_1=,\ \lambda_2=$

三比较：$\begin{cases} k=0，当\alpha\neq\lambda_1，\alpha\neq\lambda_2 \\ k=1，当\alpha=\lambda_1 或 \alpha=\lambda_2 \\ k=2，当\alpha=\lambda_1=\lambda_2 \end{cases}$

〈实例〉

$y''-4y=e^x(2x+3)$

设 $y^*=e^x\cdot(Ax+B)\cdot x^k$

一看：$\alpha=1$

二算：$\lambda^2-4=0 \Rightarrow \lambda_1=2,\ \lambda_2=-2$

三比较：$\alpha\neq\lambda_1,\ \alpha\neq\lambda_2 \Rightarrow k=0$

（接实例） $\Rightarrow y^*=e^x(Ax+B)$ 代入方程

$\Rightarrow e^x(-3Ax+2A-3B)=e^x(2x+3)$

$\Rightarrow \begin{cases} -3A=2 \\ 2A-3B=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\frac{2}{3} \\ B=-\frac{13}{9} \end{cases}$

$\Rightarrow y^*=e^x(-\frac{2}{3}x-\frac{13}{9})$

$y_{齐通}=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$

于是 $y_{非齐通}=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+e^x(-\frac{2}{3}x-\frac{13}{9})$

[注解] ① $P_m(x)$ 是 m 阶多项式，$Q_m(x)$ 同理。

举例：当 $P_m(x)$ 为 $2x$ $\Rightarrow$ $Q_m(x)$ 设为 $Ax+B$。

当 $P_m(x)$ 为 x^2+1 $\Rightarrow$ 对应 $Q_m(x)$ 为 Ax^2+Bx+C。

② 例题即模板，会一道例题即会所有题。

<模板>

② $y''+py'+qy = e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + P_n(x)\sin\beta x]$

设：$y^* = e^{\alpha x}[Q_l^{(1)}(x)\cos\beta x + Q_l^{(2)}(x)\sin\beta x]x^k$

其中 $l=\max\{m,n\}$

一看：自由项中的 $\alpha,\beta \xrightarrow{\text{拼成}} \alpha\pm\beta i$

二算：$\lambda^2+p\lambda+q=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}$

三比较：$\begin{cases} k=0, & \lambda_{1,2}\neq\alpha\pm\beta i \\ k=1, & \lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i \end{cases}$

<实例>

$y''+4y=\cos 2x$

设：$y^* = e^{0\cdot x}[A\cos 2x + B\sin 2x]x^k$

两个都要！

一看：$0\pm 2i$

二算：$\lambda^2+4=0 \Rightarrow \lambda = 0\pm 2i$

三比较 $0\pm 2i = 0\pm 2i$

$\Rightarrow k=1$

…

（kira 备注：i) 即右边只有 $e^{\alpha x}$ 和多项式（纯种）时用 ①

而当右边会现三角函数 cos，sin 用 ②

（举例） ii) ② 中若右边项为 $(2x\cos 2x + x^2\sin 2x)e^{\alpha x}$

则设 $y^* = e^{\alpha x}((A_1x^2+B_1x+C_1)\cos 2x + (A_2x^2+B_2x+C_2)\sin 2x)$

即取 $\max\{m,n\}$ 最高次数之对应的多项式）

一个快速计算法

将 y^* 代回原方程求 A.B.C 时，计算较麻烦，易出错。为此，汤神提供了快速算法。

解题背公式，觉得难背可以忽视此法，但掌握后计算会快很多～

“考前背一背，临前搞一搞”

对于 $y''+py'+qy=P_n(x)e^{kx}$

设 $y^*(x)=Q(x)e^{kx}$

-start-

记 $Q''+(2k+p)Q'+(k^2+pk+q)Q=P_n(x)$ (*)

① $k=\lambda_1\neq\lambda_2$

则 $Q''+(2k+p)Q'=P_n(x)$

② $k=\lambda_1=\lambda_2$

$Q''=P_n(x)$

-over-

(kira补充：关键是背下(*)式，找到 k, p, q 套入即可)

实战·例7

求解 $y''-y'-2y=(2x+1)e^{-x}$

解：

$\lambda^2-\lambda-2=0 \Rightarrow \lambda_1=2,\ \lambda_2=-1$

通解 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$

特解设 $y_0(x)=e^{-x}(Ax+B)x$

(用快速解法)

$Q=Ax^2+Bx \Rightarrow Q''=2A,\ Q'=2Ax+B$

因为 $k=\lambda_1\neq\lambda_2$，套用①

$2k+p=-2-1=-3$

所以有 $Q''+(2k+p)Q'=P_n(x)$ 写为

$2A+(-3)\cdot(2Ax+B)=2x+1$

立刻解得 $A=-\frac{1}{3}$，$B=-\frac{5}{9}$

得通解为 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}-(\frac{1}{3}x^2+\frac{5}{9}x)e^{-x}$

「4A 噼」之

中值定理.

· 本 Part 的解锁条件：数形结合的感觉要好.

· 本 Part 的特别关注：P155 中值定理大法
(尤其 P159 图)
P169 辅助函数构造.

· 本 Part 难点：Taylor 那块例题较多较难.
没时间可先跳过

KIT 前言：

这应该是最庞大的一个部分了，道理非常单纯。

只是题型较为多变，因此梳理框架至关重要。

每种套路配合一道例题服用后效果更佳哦~♡

这次宇哥讲得简略（我听的版本），我作为引入；

汤神讲得全面、实用（首推"还原法"），我作为进阶；

此外我会给出非常详尽的构造辅助函数的方法，

保证你每道题都有套路可下手去做。

Let's Party !

引入 （熟事）

{ 十一个基本定理论述（①–⑪只用不证，⑤会证）

综合例题分析。

一、基本定理论述

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续

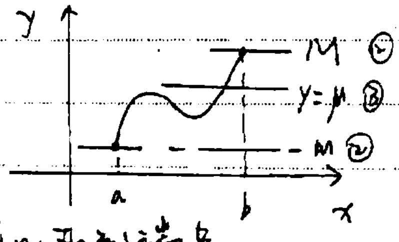
① 有界定理：　$|f(x)| \le M$　$(M>0)$

② 最值定理：　$m \le f(x) \le M$，其中 m、M 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值。

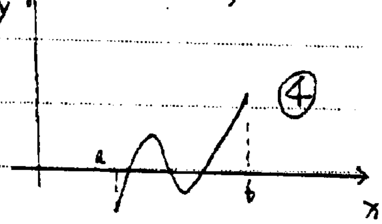
③ 介值定理：　当 $m \le \mu \le M$ 时，$\exists\, \xi \in [a,b]$，使 $f(\xi)=\mu$

④ 零点定理：　当 $f(a)\cdot f(b)<0$ 时，$\exists\, \xi \in (a,b)$，使 $f(\xi)=0$

（图示）



（闭区间连续函数）



②③可以取到端点

· BMDM ·

⑤ 费马定理：若 $f(x)$ 在一点可导且在该点取极值，
则必有 $f'(x)=0$

⑥ 罗尔定理：设 $f(x)$ 满足以下三条

1) $[a,b]$ 上连续
2) (a,b) 内可导 $\Rightarrow$ (a,b) 内至少有一点 $\xi\in(a,b)$
3) $f(a)=f(b)$ 使得 $f'(\xi)=0$

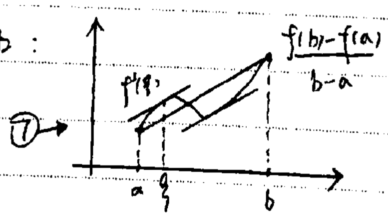
（Kira p.s. 其中 1) 2) 是套话，出题人保证，
读作"闭区间上连续，开区间可导"
我们的任务是搞出 3)）

⑦ 拉格朗日中值定理：设 $f(x)$ 满足以下两条

1) $[a,b]$ 上连续
2) (a,b) 内可导 （"简直无条件成立…"）

$\Rightarrow$ $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$，(a,b) 内至少有一点 ξ

（画图便知：



⑥是⑦的"雷同平版"）

⑧ Cauchy 柯西中值定理：设 $f(x)$，$g(x)$ 满足

1) $[a,b]$ 上连续
2) (a,b) 内可导 $\Rightarrow \exists\, \xi\in(a,b)$, s.t. $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$
3) $g'(x)\neq 0$ ▲

[注意：$f(\xi)$ 和 $g(\xi)$ 共用同一个 ξ]

⑨ Taylor公式

(1) 带拉格朗日余项的n阶泰勒公式

设$f(x)$在点x_0的某个邻域内有$n+1$阶导数存在，则对该邻域内的任意点x均有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

其中ξ介于x、x_0之间。

(2) 带Peano余项的n阶泰勒公式

设$f(x)$在点x_0处n阶可导，则存在x_0的一个邻域，对于该邻域内任一点成立

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2$$
$$+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

[注]① Lagrange余项多用于证明（ξ去了一张"证明脸"）

② Peano余项多用于计算（$o(x-x_0)^n$去了一张"极限脸"）

Kira 深情地说：

很多同学不喜欢Taylor公式，觉得干嘛好端端把"简单"的函数"复杂化"，写那么长。Actually恰好相反，Taylor是在把奇奇怪怪的函数用最简单的幂函数来代替，是非常令人震撼的结论！

"无限分割" "以直代曲" "无限逼近"都是微积分学最最经典的核心的思想，泰勒公式是这些思想美不胜收的凝结。

对于考研来说，以上话并无卵用，背公式，直接套，结束~

⑩ 定积分中值定理（考试时不证即可用）

如果 $f(x)$ 在积分区间 $[a,b]$ 连续，则在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使下式成立：$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

⑪ 加强形式的积分中值定理（考试时，先证再用）

如果 $f(x)$ 在积分区间 $[a,b]$ 连续，则在 (a,b) 上至少存在一点 ξ，使下式成立：$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

pf：令 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 连续

由 Lagrange 中值定理，$\exists \xi \in (a,b)$ s.t.

$$\int_a^b f(x)dx - 0 = f(\xi)(b-a)$$

三 综合例题分析

（kira p.s.：几道不大但有代表性，有综合特色的热身题，先把这三道题拿下，从方法吸收一下，我们再展开终极版中值定理题目的套路）

例 1 （找"$F(x)$ + 折腾区间"）

设 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上一阶导数连续，$(0,\frac{\pi}{2})$ 内二阶可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=3$，$f(\frac{\pi}{2})=1$，证明 $\exists \xi \in (0,\frac{\pi}{2})$ 使 $f''(\xi)+f'(\xi)\tan\xi=0$.

[分析] 欲证 $f'(\xi)=0$，想"费马"和"罗尔"，本题设条件充满：

相等关系 ⇒ 罗尔

不等关系 ⇒ 费马.

〈法一〉令 $F(x)=f'(x)\sin x$，$\xi\in(0,\frac{\pi}{2})$

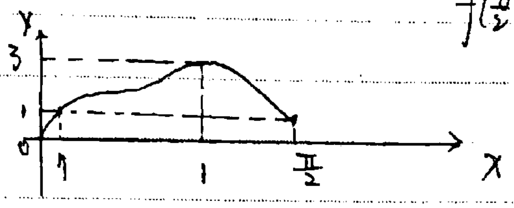
$F(0)=f'(0)\sin 0=0$

$F(\frac{\pi}{2})=f'(\frac{\pi}{2})\sin\frac{\pi}{2}$ 是否为0无法判断，区间$(0,\frac{\pi}{2})$失效。

$F(\tau)=f'(\tau)\cdot\sin\tau$，要使$F(\tau)=0$，因为$\sin\tau\neq0$，$\tau\in(0,\frac{\pi}{2})$

所以只证$f'(\tau)=0$。有$f(0)=0$，$f(1)=3$，$f(\frac{\pi}{2})=1$

由介值定理，$\exists\eta\in(0,1)$，$\left.\begin{array}{l}f(\eta)=1\\f(\frac{\pi}{2})=1\end{array}\right\}\Rightarrow f'(\tau)=0$，$\tau\in(\eta,\frac{\pi}{2})\subset(0,\frac{\pi}{2})$



$\Rightarrow F(\tau)=0=F(0)$

$\Rightarrow \exists\xi\in(0,\tau)\subset(0,\frac{\pi}{2})$

s.t. $f'(\xi)+f''(\xi)\tan\xi=0$ ☆

（囧：此法麻烦，从题干$f(0)=0$，$f(1)=3$，$f(\frac{\pi}{2})=1$中可看出不等关系，转用费马定理）

〈法二〉由$f(0)=0$，$f(1)=3$，$f(\frac{\pi}{2})=1$ ⇒ 最大值必在区间内部

而区间内最大值必为极值，即极值点$\in(0,\frac{\pi}{2})$

由费马定理，极值点处有$f'(x_0)=0$，从而有$F(x_0)=0$。

由$F(0)=F(x_0)=0$

$\Rightarrow \exists\xi\in(0,x_0)\subset(0,\frac{\pi}{2})$ s.t. $f'(\xi)+f''(\xi)\tan\xi=0$ ☆

（囧 Kira备注：其实使用⑤⑥⑦等中值定理是非常容易的，题目肯定都帮你凑好了，难点在$F(x)$如何找，主要依靠$(uv)'=uv'+u'v$和$(\frac{u}{v})'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$两大运算法则，以及你对求导公式和积分公式的倒推能力。

我将在P — P 详细介绍所有求$F(x)$的情形。）

（真题11分，得分率2分）

例2

设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上二阶可导，$f(1)=1$，证明

〈I〉 $\exists\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=1$.

〈II〉 $\exists\eta\in(-1,1)$，使 $f'(\eta)+f''(\eta)=1$.

解：〈I〉（送分）令 $G(x)=f(x)-x$

有 $G(0)=f(0)-0=0$

$G(1)=f(1)-1=0$

$\Rightarrow G'(\xi)=0$，即 $\exists\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=1$ #

〈II〉（移项观察）$f'(x)+f''(x)-1=0$

（一眼看穿）设 $F(x)=f'(x)e^x-e^x$

（有 $\begin{cases}F(1)=f'(1)e-e\\F(-1)=f'(-1)e^{-1}-e^{-1}\end{cases}$，两头不好用！于是想起第〈I〉问）

由奇函数，有 $\begin{cases}F(\xi)=f'(\xi)e^{\xi}-e^{\xi}=e^{\xi}-e^{\xi}=0\\F(-\xi)=f'(-\xi)e^{-\xi}-e^{-\xi}=e^{-\xi}-e^{-\xi}=0\end{cases}$，$\xi\in(0,1)$

由罗尔定理

$\Rightarrow\exists\eta\in(-1,1)$ s.t. $f'(\eta)+f''(\eta)=1$

#

（kira备注：

第一问是送分的，而且一定会被第二问用到，即使第一问不会证，在第二问中也可以直接用～）

例3

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导，$f(0)=0$，$f(1)=1$

证明：∃不同 $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (0,1)$ 使 $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)+f'(\xi_3)=3$

pf:

（思路：将 $(0,1)$ 三等分，由 Lagrange 定理）

$0 \quad \xi_1 \quad \tau_1 \quad \xi_2 \quad \tau_2 \quad \xi_3 \quad 1$

$$\left.\begin{aligned} f'(\xi_1) &= \frac{f(\tau_1)-f(0)}{\tau_1-0} \\ f'(\xi_2) &= \frac{f(\tau_2)-f(\tau_1)}{\tau_2-\tau_1} \\ f'(\xi_3) &= \frac{f(1)-f(\tau_2)}{1-\tau_2} \end{aligned}\right\}$$

取 $\tau_1=\frac{1}{3}$，$\tau_2=\frac{2}{3}$，即得证

（凑结果，凑抵消~）

☆

进阶（中值定理大法）

- 一、涉及 θ （两种情况）
- 二、使 $f^{(n)}(\xi)=0$ （三种方法）
- 三、结论仅含 ξ 的情形（三种方法）
- 四、结论含 ξ，a、b 的情形（两种情况）
- 五、结论含 ξ，η 的情形（三种情形）
- 六、Taylor 法（二阶、三阶以上可以考虑）（不知 x_0 的取法）

(一) 关于 θ 的解答题

有以下常用等式：

① $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$，$\xi\in(a,b)$

$\quad\quad\quad\quad\quad = f'[a+\theta(b-a)](b-a) \qquad \theta\in(0,1)$

② $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)]}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

（★ θ 不是常数，与 x、x_0 有关）

③ $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$，$\xi\in[a,b]$

$$= f[a+\theta(b-a)](b-a) \qquad (0\le\theta\le 1)$$

（kiro 表示：以上式子不需背，只是用另外一种方式来表示 f 而已，考试见到 θ 不抵触不陌生即可，理解即可）

套路 $\begin{cases} \text{当 } f(x) \text{ 表达式已知，求出 } \theta \\ \text{当 } f(x) \text{ 表达式未知，不求 } \theta \text{（多用导数定义）} \end{cases}$

例4

$f(x)=\arctan x,\ a>0$

$f(a)-f(0)=f'(\theta a)\,a \qquad (0<\theta<1)$

求 $\lim\limits_{a\to 0}\theta=?$

解：（果断，求出 θ）

由表达式 $\arctan a=\dfrac{a}{1+\theta^2a^2}$

$$\Rightarrow \theta^2=\frac{a-\arctan a}{a^2\arctan a}$$

$$\lim_{a\to 0}\theta^2=\lim_{a\to 0}\frac{a-\left(a-\frac{a^3}{3}+o(a^3)\right)}{a^3}=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \lim_{a\to 0}\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

例5

$\int_0^x e^t\,dt=e^{\theta x}\cdot x$ 求① θ 表达式 ② $\lim\limits_{x\to 0}\theta$

解：①（就求出来！）$\dfrac{e^x-1}{x}=e^{\theta x}\Rightarrow \theta=\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{e^x-1}{x}$

② $\lim\limits_{x\to 0}\theta=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\frac{e^x-1-x}{x}\right)}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{1}{2}$$

例6 （$f(x)$ 表达式未知）

$f(x)$ 二阶连续可导，$f''(a)\neq 0$，$f(a+h)=f(a)+f'(a+\theta h)\cdot h$ $(0<\theta<1)$. 求 $\lim_{h\to 0}\theta$

解：

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+o(h^2)$$

$$\Rightarrow f'(a+\theta h)-f'(a)=\frac{1}{2}f''(a)h+o(h)$$

$$\theta\cdot\frac{f'(a+\theta h)-f'(a)}{\theta h}=\frac{1}{2}f''(a)+\frac{o(h)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\theta\cdot f''(a)=\frac{1}{2}f''(a)$$

$\because f''(a)\neq 0$，$\therefore \lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{2}$ ☆

（☺ kira 备注：同时 P157 ①②③ ～）

例7

$f(x)$ 在 $(-a,a)$ 可导，$f'(0)\neq 0$，试证：

① $\forall x\in(0,a)$，$\exists\theta$，s.t. $\int_0^x f(t)\,dt+\int_0^{-x}f(t)\,dt=[f(\theta x)-f(-\theta x)]x$ $\theta\in(0,1)$

② 求 θ.

解：① $\int_0^{-x}f(t)\,dt \xlongequal{t=-u} \int_0^x f(-u)(-du)=-\int_0^x f(-t)\,dt$

非常漂亮 → 左 $=\int_0^x[f(t)-f(-t)]\,dt \triangleq F(x)=F(x)-F(0)=F'(\theta x)x$

$=[f(\theta x)-f(-\theta x)]x$，$\theta\in(0,1)$

② $$\frac{\int_0^x f(t)\,dt+\int_0^{-x}f(t)\,dt}{x^2}=\frac{f(\theta x)-f(-\theta x)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\text{左}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}+\frac{f(-x)-f(0)}{-x}\right]=f'(0)$$

$$\lim_{x\to 0}\text{右}=\lim_{x\to 0}\theta\cdot\left[\frac{f(\theta x)-f(0)}{\theta x}+\frac{f(-\theta x)-f(0)}{-\theta x}\right]$$

已经可导，所以可以这样拆

$$=2f'(0)\cdot\lim_{x\to 0}\theta$$

$\because f'(0)\neq 0\Rightarrow\lim_{x\to 0}\theta=\frac{1}{2}$ ☆

三 证明 $\exists\xi$，使 $f^{(n)}(\xi)=0$

① 极值法
② 罗尔定理（常用）
③ Taylor（个别）

例 8 （罗尔）

$f(x)\in C[0,4]$，在 $(0,4)$ 内二阶可导，$2f(0)=f(1)+f(2)=\int_2^4 f(x)dx$

证 $\exists\xi\in(0,4)$，s.t $f''(\xi)=0$

证：1° $f(x)\in C[1,2]\Rightarrow f(x)$ 在 $[1,2]$ 上有 m，M ⇨ 必会手法

$m\le\frac{f(1)+f(2)}{2}\le M$

$\exists x_0\in[1,2]$，$f(1)+f(2)=2f(x_0)$

2° 令 $F(x)=\int_2^x f(t)dt$ ⇨ 常见设法

$\int_2^4 f(x)dx=F(4)-F(2)=2F'(c)=2f(c)$，$c\in(2,4)$

3° $\because f(0)=f(x_0)=f(c)$

$\therefore\exists\xi_1\in(0,x_0)$，$\xi_2\in(x_0,c)$

$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$

$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,4)$ $f''(\xi)=0$ #

Kira 备注：

看到二阶导 f'' 没什么好说的，就像条件反射般找3个相等函值 $f(a)=f(b)=f(c)$，然后 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$ 然后 $f''(\xi)=0$，闭着眼就可以写好吗？

例 9 "不断构造相等"

$f(x)$ 三阶可导，$f(1)=0$，$F(x)=x^3f(x)$，证 $\exists\xi\in(0,1)$，$F'''(\xi)=0$。

〈法一〉 $F(0)=F(1)=0$. $\exists \xi_1 \in (0,1)$, $F'(\xi_1)=0$

"罗尔" $F'(x)=3x^2f(x)+x^3f(x)$

$\because F'(0)=F'(\xi_1)=0$

$\therefore \exists \xi_2 \in (0,\xi_1)$, $F''(\xi_2)=0$

$\because F'(x)=6x\,f(x)+3x^2f'(x)+3x^2f'(x)+x^3f''(x)$

$F''(0)=F''(\xi_2)=0$.

$\therefore \exists \xi_3 \in (0,\xi_2)\subset(0,1)$, $F'''(\xi_3)=0$ ☆

〈法二〉 $F(0)=F'(0)=F''(0)=0$

$F(1)=F(0)+F'(0)(1-0)+\frac{F''(0)}{2!}+\frac{F'''(\xi)}{3!}(1-0)^3$, $\xi\in(0,1)$

$\because f(1)=0$ $\therefore F(1)=0$. $\xi\in(0,1)$

$\therefore F'''(\xi)=0$ ☆

回 讨论仅含ξ的情形

- ① 还原法 (☆ 核心) $\boxed{\frac{f'}{f}=(\ln f)'}$ ← 咱先掌握这个~
- ② 分组法
- ③ 凑微法

背 一些非常常见的特例：

<1> $f'g+fg'=(fg)' \Rightarrow fg=F(x)$

<2> $f'g-fg'=(\frac{f}{g})' \Rightarrow F(x)=\frac{f}{g}$

<3> $f''g-fg'' \Rightarrow F(x)=f'g-fg'$

<4> $f'+2f \Rightarrow e^{2x}f(x)$

$f'-f \Rightarrow e^{-x}f(x)$

<5> $0=f''-f=(f'+f)'-(f'+f)=0$

$0=f''-f=(f'-f)'+(f'-f)=0$

Kira 哈哈：

先把这些组背下来，有点感觉，摸摸规律，做做例题…

我最后放个大招包全搞定

"还原法"

例10

$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$f(0)=f(1)$. 试证：

$\exists\, \xi \in (0,1)$，$f''(\xi)=\dfrac{2f'(\xi)}{1-\xi}$.

[分析] $\dfrac{f''(x)}{f'(x)}+\dfrac{2}{x-1}=0$ (*)

$[\ln f'(x)]'+[\ln (x-1)^2]'=0$

Kira 插播：

▶ 有情况？(*)式在干嘛？

▶ 在把 $f''(\xi)=\dfrac{2f'(\xi)}{1-\xi}$ 条件变为 $\dfrac{f'}{f}$ 的标准形式！

所有题目都朝这个方向凑！

pf: 令 $\varphi(x)=(x-1)^2 f'(x)$，$\varphi(1)=0$

$\because f(0)=1=f(1)$

$\therefore \exists\, c\in(0,1), f'(c)=0 \Rightarrow \varphi(c)=0$ ☆

例11

$f(x)\in C[0,1]$，$\int_0^1 f(x)\,dx=0$ 试证：

$\exists\, \xi\in(0,1)$，$\xi f(\xi)=2\int_\xi^0 f(t)\,dt$

[分析] $x f(x)=2\int_x^0 f(t)\,dt$

$x f(x)+2\int_0^x f(t)\,dt=0 \Rightarrow \dfrac{f(x)}{\int_0^x f(t)\,dt}+\dfrac{2}{x}=0$

$\Rightarrow [\ln \int_0^x f(t)\,dt]'+(\ln x^2)'=0$

(卷面)

证明：令 $\varphi(x)=x^2\int_0^x f(t)\,dt$

$\varphi(0)=\varphi(1)=0 \Rightarrow \exists\, \xi\in(0,1)$, s.t.

$\xi f(\xi)=2\int_\xi^0 f(t)\,dt$ ☆

例12. "分组法"

$f(x)\in C[a,b]$，(a,b)内可导，$f(a)=a$，

$\int_a^b f(x)dx=\frac{b^2-a^2}{2}$，试证 $\exists\xi\in(a,b)$，

$f'(\xi)+f(\xi)-\xi=1$.

pf: $\int_a^b f(x)\,dx=\frac{b^2-a^2}{2}=\int_a^b x\,dx$

$\Rightarrow\int_a^b[f(x)-x]\,dx=0$，令 $h(x)=f(x)-x$，则 $h(a)=0$

令 $F(x)=\int_a^x h(t)\,dt$

有 $F(a)=F(b)=0$

$\exists c\in(a,b)$，$F'(c)=0\Rightarrow h(c)=0$.

令 $\varphi(x)=e^x[f(x)-x]$ 有 $\varphi(a)=\varphi(c)=0$

$\Rightarrow\exists\xi\in(a,b)$. $f'(\xi)+f(\xi)-\xi=1$.

四 结论含 ξ, a, b 的情形

① ξ与a,b可分离 { ξ与a,b分离，a,b侧用Lagrange/Cauchy；凑微法：以x换ξ，$\Rightarrow$式$\ne 0\Rightarrow\varphi'(x)=0$.

② ξ与a,b不可分离，凑微法：以x换ξ.

例13 "凑微法"

$f(x)\in C[a,b]$，(a,b)内可导，$f(b)=0$，

试证：$(\xi-a)f'(\xi)+2f(\xi)=0$，$\exists\xi\in(a,b)$

[分析] $(x-a)f'(x)+2f(x)=0$

$(x-a)^2f'(x)+2(x-a)f(x)=0$

证明：令 $\varphi(x)=(x-a)^2f(x)$，$\varphi(a)=\varphi(b)=0$

$\Rightarrow\exists\xi\in(a,b)$，s.t. $(\xi-a)f'(\xi)+2f(\xi)=0$. ☆

例14 —— "会学到很多，综合性太强"

$f(x) \in C[a,b]$，在 (a,b) 内二阶可导，$\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{x-a} = 0$

$f''(x) > 0$

试证：① $f(x) > 0$，$(a < x \le b)$

② $\exists\, \xi, \eta \in (a,b)$ $\quad \dfrac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)\,dx} = \dfrac{2\xi}{f(\xi)} = \dfrac{2\xi}{f'(\eta)(\xi-a)}$

pf: ① $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{x-a} = 0 \Rightarrow f(a) = 0,\ f'_+(a) = 0$

由 $\begin{cases} f'_+(a) = 0 \\ f''(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) > 0 \quad (a < x < b)$

由 $\begin{cases} f(a) = 0 \\ f'(x) > 0 \ (a < x < b) \end{cases} \Rightarrow f(x) > 0 \quad (a < x < b)$

"已经分离好了" ⇨ ② $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$，$F'(x) = f(x) > 0$

$\exists\, \xi \in (a,b)$ 使 左 $= \dfrac{b^2-a^2}{F(b)-F(a)} = \dfrac{2\xi}{F'(\xi)} = \dfrac{2\xi}{f(\xi)}$

$f(\xi) = f(\xi) - f(a) = f'(\eta)(\xi - a)$，$\eta \in (a, \xi)$ #

例15 —— "ξ与a.b不回合"

$f(x),\ g(x) \in C[a,b]$ 证 $\exists\, \xi \in (a,b)$

s.t. $f(\xi) \int_b^\xi g(t)\,dt = g(\xi) \int_\xi^a f(t)\,dt$

[分析] $f(x) \int_b^x g(t)\,dt + g(x) \int_a^x f(t)\,dt = 0$

即 $\left[\int_a^x f(t)\,dt \int_b^x g(t)\,dt \right]' = 0$

pf: 令 $\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt \cdot \int_b^x g(t)\,dt$

$\Rightarrow \varphi(a) = \varphi(b) = 0 \Rightarrow \exists\, \xi \in (a, b)$，s.t. $f(\xi) \int_b^\xi g(t)\,dt$

$= g(\xi) \int_\xi^a f(t)\,dt$ #

四 结论含 ξ,η 的情形（不只一个中值）

① 仅有 $f'(\xi)$、$f'(\eta)$ { 1° 找三个点
2° 用两次 Lagrange ← $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 作差～

② ξ,η 复杂度不同 { 1° 用 x 换掉较为复杂的中值
2° { 形如 ( )′ 用 Lagrange
形如 $\frac{( )'}{( )'}$ 用 Cauchy.

其中，1° 中，分两种情况

▲ 一是，给出的是导数，将导数整体替换为 x 函数

则化法如：· $e^{2\eta}(f'(\eta)+2f(\eta)] \Rightarrow e^{2x}f(x)$

· $\frac{2\ln\eta}{\eta} \Rightarrow \ln^2 x$

· $\frac{f'(x)}{1+f^2(x)} \Rightarrow \arctan f(x)$

▲ 二是，给的根本不是导数，而仅是 $\frac{分子}{分母}$，但分子分母都是某函数的导数 [cauchy]

则化法如：· $e^{-\eta}f'(\eta) = \frac{f'(\eta)}{e^{\eta}} \Rightarrow \frac{f(x)}{e^x}$

· $\eta^2 f'(\eta) \Rightarrow \frac{f(x)}{-\frac{1}{x}}$

③ ξ,η 皆复杂，但复杂性基本对等（考查可能性不高）

Case 1. $f'(\xi)+2\xi=f'(\eta)+2\eta$

1° 构造 $\varphi(x)=f(x)+x^2$　2° 找三点，两次 Lagrange

Case 2. 1° { $\varphi_1(x)=f(x)+\frac{1}{2}x^2$
$\varphi_2(x)=f(x)-x^2$
2° 找三点，两次 Lagrange.

例16

$f(x) \in C[a,b]$，(a,b)内可导，$f(a)=f(b)$，

$f_+'(a)>0$

试证明：$\exists \xi,\eta \in (a,b)$，s.t. $f'(\xi)>0$，$f'(\eta)<0$

pf:

$f_+'(a)>0 \Rightarrow \exists\ c\in(a,b)$，$f(c)>f(a)$

$\exists \xi\in(a,c)$，$\eta\in(c,b)$

s.t. $f'(\xi)=\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}>0$ "两次Lagrange"

$\Rightarrow f'(\eta)=\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}<0$

例17

〈真〉$f(x)\in C[0,1]$ 在$(0,1)$内可导，$f(0)=0$，$f(1)=1$

① $\exists\ C\in(0,1)$，$f(c)=1-c$

② $\exists \xi,\eta\in(0,1)$，$f'(\xi)f'(\eta)=1$

pf) ① 令 $\varphi(x)=f(x)-1+x$

$\Rightarrow \varphi(0)=-1$，$\varphi(1)=1$

$\because \varphi(0)\varphi(1)<0$ $\therefore \exists\ c\in(0,1)$．$\varphi(c)=0$

$\Rightarrow f(c)=1-c$

② "有三个点，水到渠成" "无巧不成题！"

$\exists \xi\in(0,c)$，$\eta\in(c,1)$

$$\begin{cases} f'(\xi)=\dfrac{f(c)-f(0)}{c}=\dfrac{1-c}{c} \\ f'(\eta)=\dfrac{f(1)-f(c)}{1-c}=\dfrac{c}{1-c} \end{cases}$$

得证！

例18

$f(x)\in C[a,b]$，(a,b)内可导，$f(a)=f(b)=1$

试证 $\exists\xi,\eta\in(a,b)$ s.t. $e^{2\xi-2\eta}[f'(\eta)-2f(\eta)]=-2$

[分析] ξ和η"复杂程度不同"，η更为复杂，且可还原

$$e^{-2\eta}[f'(\eta)-2f(\eta)]=[e^{-2x}f(x)]'\big|_{x=\eta}$$

pf: 取 $\varphi(x)=e^{-2x}f(x)$

$\exists\eta\in(a,b)$，使 $\dfrac{e^{-2b}f(b)-e^{-2a}f(a)}{b-a}=e^{-2\eta}[f'(\eta)-2f(\eta)]$

左 $=\dfrac{e^{-2b}-e^{-2a}}{b-a}=-2e^{-2\xi}$，$\xi\in(a,b)$

即有 $e^{2\xi-2\eta}[f'(\eta)-2f(\eta)]=-2$ ☆

例19

$f(x)\in C[a,b]$，(a,b)内可导 $(a>0)$

证 $\exists\xi,\eta\in(a,b)$ s.t. $ab\,f'(\xi)=\eta^2 f'(\eta)$

pf: 令 $F(x)=-\frac{1}{x}$，$F'(x)=\frac{1}{x^2}\neq 0$

$\exists\eta\in(a,b)$. s.t. $\dfrac{f(b)-f(a)}{-\frac{1}{b}+\frac{1}{a}}=\dfrac{f'(\eta)}{\frac{1}{\eta^2}}$ [cauchy]

左边 $=ab\cdot\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=ab\,f'(\xi)$，$\xi\in(a,b)$ ☆

六 Taylor法（二阶，三阶以上可考虑）

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

☆关于x和x_0的取法.

x_0 通常取为 $\begin{cases} \text{① 题中给出 } f'(c)\text{，则令 } x_0=c & ☆ \\ \text{② 令 } x_0=\frac{a+b}{2} & ☆ \\ \text{③ 令 } x_0=a,b \text{ （罕见）} \end{cases}$

x 通常取为 $\begin{cases} \text{① } f(x_0) \text{ （无 } f'(x_0)\text{），取 } x=x_0 \\ \text{② } x=a,b \\ \text{③ } x=\frac{a+b}{2} \text{ （中点）} \\ \text{④ 任意点} \end{cases}$

若题中提供 $\left.\begin{matrix} f(a),f(b),f(c) \\ f'(a),f'(b),f'(c) \end{matrix}\right\}$ 一有俱有，倾向于用 Lagrange

若题中提供 $f'(a)$，$f'(c)$，$f(b)$ 倾向于用 Taylor.

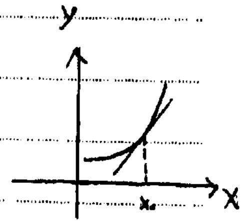
▶ Case 1 当 $f''(x)>0$ (<0) "二阶保号"

① $f''(x)>0 \Rightarrow f' \uparrow$ 单增

or $f''(x)<0 \Rightarrow f' \downarrow$ 单减

② $f''(x)>0 \Rightarrow$ 切线 $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

有 $f(x)\geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$



例18

$f(x)\in C[0,1]$，$f(x)>0$，证 $\ln\int_0^1 f(x)dx \geq \int_0^1 \ln f(x)dx$

Pf: "证明不等式为两种运算换序，往往用二阶保号性"

令 $\varphi(t)=\ln t$，$\varphi''(t)=-\frac{1}{t^2}<0$

取 $t_0=\frac{1}{1-0}\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx$

用到 t_0 取平均

$\varphi(t) \le \varphi(t_0) + \varphi'(t_0)(t-t_0)$) t设$f(x)$

$\varphi[f(x)] \le \varphi(t_0) + \varphi'(t_0)[f(x)-t_0]$

$\int_0^1 \ln f(x)dx \le \ln \int_0^1 f(x)dx$) 两边积分

※

Kira讲解：

关于这边 $\int_0^1$ 的积分是非常妙的，有的同学可能看不出是怎么积出来的，有两个关键字："常数"和"$\int_0^1 c\,dx = c$"

① $\int_0^1 dx$ 是非常特殊的积分限，用它来积常数，仍得常数本身，所以 $\int_0^1 \varphi(t_0)dx = \varphi(t_0)$

② 我们已设 $\int_0^1 f(x)dx = t_0$，又 $\int_0^1 t_0\,dx = t_0$

所以 $\int_0^1 \varphi'(t_0)[f(x)-t_0]dx = 0$

所以 $\varphi(t_0) + \varphi'(t_0)[f(x)-t_0]$ 从0到1的积分为 $\varphi(t_0)$

即为 $\ln \int_0^1 f(x)dx$

好玩哼？^_^

Case 2 泰勒常规证明

例19

f 在 $(-1,1)$ 三阶连续可导，$f(-1)=0$，$f'(0)=0$，$f(1)=1$.

证 $\exists f'''(x)=3$.

pf: 1° $f(-1) = f(0) + \frac{f''(0)}{2!}(-1-0)^2 + \frac{f'''(\xi_1)}{3!}(-1-0)^3$，$\xi_1 \in (-1,0)$

$f(1) = f(0) + \frac{f''(0)}{2!}(1-0)^2 + \frac{f'''(\xi_2)}{3!}(1-0)^3$　$\xi_2 \in (0,1)$

$\Rightarrow \begin{cases} 0 = f(0) + \frac{1}{2}f''(0) - \frac{1}{6}f'''(\xi_1) \\ 1 = f(0) + \frac{1}{2}f''(0) + \frac{1}{6}f'''(\xi_2) \end{cases}$

三种操作：相加，相减，各自处理

2° $f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2) = 6$

3° ∵ $f'''(x) \in C[\xi_1, \xi_2]$

∴ $f'''(x)$ 在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上有 m, M s.t.

$$m \le \frac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{2} \le M$$

∴ $m \le 3 \le M$. $\exists \xi \in [\xi_1, \xi_2] \subset (-1, 1)$, $f'''(\xi) = 3$ ☆

例20 "我的复试考题，懵住很多人~"

$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$f(0) = f(1) = 0$, $f_{min} = -1$

证至少有一 $f''(\xi) \ge 8$

证：

$\min\limits_{0 \le x \le 1} f(x) = -1 \Rightarrow \exists\ c \in (0,1)$, $f(c) = -1$, $f'(c) = 0$

$$\begin{cases} f(0) = f(c) + \dfrac{f''(\xi_1)}{2!}(0-c)^2, & \xi_1 \in (0, c) \\ f(1) = f(c) + \dfrac{f''(\xi_2)}{2!}(1-c)^2 & \xi_2 \in (1-c, 1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{c^2}{2} f''(\xi_1) = 1 \\ \dfrac{(1-c)^2}{2} f''(\xi_2) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f''(\xi_1) = \dfrac{2}{c^2} \\ f''(\xi_2) = \dfrac{2}{(1-c)^2} \end{cases}$$

若 $c \in (0, \frac{1}{2}]$, $f''(\xi_1) \ge 8$ 则令 $\xi = \xi_1$

若 $c \in (\frac{1}{2}, 1)$, $f''(\xi_2) \ge 8$ 则令 $\xi = \xi_2$.

命题得证. ☆

例21

$f(x)$ 在 $[0, a]$ 二阶可导，$|f''(x)| \le M$, $f(x)$ 在 $(0, a)$ 内取最小值，

证 $|f'(0)| + |f'(a)| \le Ma$

"导数阶数无差距，想Lagrange"

pf: $\exists\ c \in (0, a)$，取 $f(c)$ 最小值，有 $f'(c) = 0$

有 $\begin{cases} f'(c) - f'(0) = f''(\xi_1) c & (0 < \xi_1 < c) \\ f'(a) - f'(c) = f''(\xi_2)(a-c) & (c < \xi_2 < a) \end{cases}$

$\Rightarrow |f'(0)| \le Mc$, $|f'(a)| \le M(a-c)$，两式相加. ☆

例22

f在$(0,1)$二阶可导，$|f|\le a$，$|f''|\le b$，求证$|f'(c)|\le 2a+\frac{b}{2}$

证：

"甚至不具备2个点，选Taylor"

$$\begin{cases} f(0)=f(c)+f'(c)(0-c)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(0-c)^2, & \xi_1\in(0,c) \\ f(1)=f(c)+f'(c)(1-c)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(1-c)^2, & \xi_2\in(c,1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(c)=f(1)-f(0)+\frac{c^2}{2}f''(\xi_1)-\frac{(1-c)^2}{2}f''(\xi_2)$$

$$|f'(c)|\le 2a+\frac{b}{2}[c^2+(1-c)^2]$$

〈法一〉 $\because c^2\le c$，$(1-c)^2\le 1-c$，$\therefore c^2+(1-c)^2\le 1$

〈法二〉 $\varphi(c)=c^2+(1-c)^2$，$\varphi'(c)=2c-2(1-c)=0\Rightarrow c=\frac{1}{2}$

$\because \varphi(0)=\varphi(1)=1$，$\varphi(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{1}{2}\le\varphi(c)\le 1$

☆

最后 （四大"辅助函数构造法"）

我在P159页下面卖了个关子，在你掌握了简单的常用的还原法之后，下面我将介绍最完整最普适版构造辅助函数的方法，大家在做题时可进行查阅，不会都背下来。

① 还原乘积
- 对于 $\xi f'(\xi)+nf(\xi)=0$，取 $F(x)=x^n f(x)$
- 对于 $f'(\xi)g(\xi)+mg'(\xi)f(\xi)=0$，取 $F(x)=f(x)g(x)^m$
- 对 $nf'(\xi)g(\xi)+mg'(\xi)f(x)=0$，取 $F(x)=[f(x)]^n[g(x)]^m$

（KIKA记忆法：n和导数一起出现，看到"n和'"绑在一起，就要（次方）"）

② 选取商 $\begin{cases} \cdot\ f'(\xi)g(\xi)-f(\xi)g'(\xi)=0,\ 取\ F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)} \\ \cdot 特\ \xi f'(\xi)-nf(\xi)=0,\ 取\ F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)} \end{cases}$

（☺ kira记忆法：先' 写分子（如 $f'(\xi)g(\xi)-f(\xi)g'(\xi)=0$，$f'$ 在前，所以前' 写分子））

③ 选取 $F(x)=f'(x)g(x)-f(x)g'(x)$

$\{$ 出现二阶导以上
$f''(x)g(x)-f(x)g''(x)=0$，取 $F(x)=f'(x)g(x)-f(x)g'(x)$

例15

$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=f'(0)=0$，试证：存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f''(\xi)=\dfrac{2f(\xi)}{(1-\xi)^2}$

▲分析：注意到 $[(1-x)^2]''=2$
（☺：对 $(1-x)^2$ 和 2 同时出现而感到警觉）

解：欲证等式写作 $f''(x)(1-x)^2-2f(x)=0$

即 $f''(x)(1-x)^2-f(x)[(1-x)^2]''=0$

令 $F(x)=f'(x)(1-x)^2+2(1-x)f(x)$.

因 $F(0)=F(1)=0$，在 $[0,1]$ 上Rolle 罗尔定理 ☆

④ 选取 $F(x)=f(x)e^{g(x)}$ （"还原法"通式）

$\begin{cases} \cdot\ f'(x)+\lambda f(x)=0 \quad 取\ F(x)=f(x)e^{\lambda x} \\ \cdot\ f'(x)+[f(x)+\lambda]g'(x)=0,\ 取\ F(x)=[f(x)+\lambda x]e^{g(x)} \\ \cdot\ (f'(x)+\lambda)+(f(x)+\lambda x)g'(x)=0,\ 取\ F(x)=[f(x)+\lambda x]e^{g(x)} \end{cases}$

「4A筛」之

级数

· 本Part的解锁条件：极限计算非常666！
有一颗想把公式背好的心♡

· 本Part的特别关注：P175 比较判别法极限形式
P181 步骤是常识.

· 本Part的厌点：本部分编排总体上中规中矩.
可以好好读P172前言和P188总结.

Kira 前言：

级数是我本科时就非常抵触的章节，觉得形式超麻烦，觉得乱，后来当我准备考研一步步走来，发现所有的抵触情绪都只是因为：一、没学好极限计算；二、没学好不定积分计算；三、公式没背。

换言之，解决好以上三者，级数部分即如探囊取物般容易，考试不会出很难的题，应拿满分！

再换言之「大王小王篇」真的非常非常重要！必须熟透！

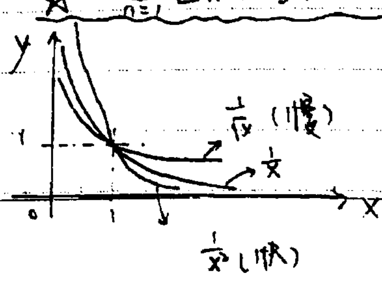
Let's Party!

- 一、基本概念与性质
- 二、数项级数的判敛　4'　（本Part最难也不难）
- 三、幂级数的收敛域　4' or 10'
- 四、幂级数的展开与求和　（数一 10'）

一　基本概念与性质

Kira说：我们研究"级数是否收敛"，本质上是研究 $n\to\infty$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的通项 $u_n\to 0$ 的速度快慢

★ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $u_n\to 0$ 足够快



（想象函数图象上的点同时从(1,1)向右跑，即 $x\to\infty$，当x相同时离x轴更近（y更小），说明谁→0更快）

(Kira 提示:
在本Part具备过硬的收敛素养非常重要!
请返回 P76 自行复习.)

1. 常数项级数

(一)Def <1> $\{a_n\}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 称为常数项级数.

<2> 部分和 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

辨析 ① S_n 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 不同
② $\lim_{n\to\infty} S_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 同

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} S, & \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \\ \text{无}, & \text{发散} \end{cases}$$

"即我们用数列前n项和来定义级数"

(二) 性质

<1> 收 + 收 = 收, 收 − 收 = 收, 收 ± 散 = 散

<2> $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} k a_n = ks$

$k \neq 0$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} k a_n$ 敛散性相同.

(Kira 一句话: 即可以随便乘系数)

<3> 级数添(减)有限项, 不改敛散性, S可能改

☆<4> 添括号提高收敛性

(如 $\underbrace{a_1 + a_2 + \cdots}_{2项}$ 和 $\underbrace{(a_1+a_2)}_{1项} + (a_3+a_4) + \cdots$ 不是一个级数)

<5> $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 反推不成立 (例 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$)

(三) 两个对象

1. p-级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} 敛, & p>1 \\ 散, & p\le 1 \end{cases}$$

2. 几何级数（等比数列）

$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ $\begin{cases} 发散, & |q|\geq 1 \\ \frac{首项}{1-q}, & |q|<1 \end{cases}$

（☺ 读作："首项除以1减公比"就记住了~）

(四) 正项级数

def：$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n \geq 0)$ 称为正项级数

特征 $S_1 \leq S_2 \leq S_3 \leq \cdots$ 即 $\{S_n\}\uparrow$ $\begin{cases} 无上界, \lim_{n\to\infty} S_n = +\infty \\ S_n \leq M, \lim_{n\to\infty} S_n 存在 \end{cases}$

（这是正项级数区别于其它级数的重要特征）

(五) 交错级数

def：$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots \\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 \cdots \end{cases}$ $(a_n > 0)$

(六) 任意项级数

def：$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(>0, <0, =0)$

2. 幂级数

def $\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \end{cases}$ 称为幂级数.

二 数项级数的判敛（四大方法）

• 收敛原则：$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \{S_n\}$ 有上界 $(u_n \geq 0)$

例1

设 $a_n > 0$，记 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，则 $\{S_n\}$ 有界 $\Leftrightarrow \{a_n\}$ 收敛

[分析] $\{S_n\}$天生↑+有界 $\Leftrightarrow$ $\{S_n\}$收敛 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$存在

$\Leftrightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛 $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ $\overset{\Rightarrow}{\nLeftarrow}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$存在 $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$收敛.

所以 $\{S_n\}$有界 $\nRightarrow$ $\{a_n\}$收敛

[例：取 $a_n=1$，$S_n=n\to\infty$]

<u>方法一：比较判别法（题目给2个正项级数）</u>

设 $a_n\geq 0$，$b_n\geq 0$.

Th1. ① $a_n\leq b_n$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$敛 $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$敛

② $a_n\geq b_n$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$发散 $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$发散

（即"大收⇒小收，小发⇒大发"，人之常情~）

Th1′（比较判别法的极限形式）

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\begin{cases}0, & \text{说明 } a_n\text{小}, b_n\text{大}, \text{若}\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\text{收敛，则}\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\text{敛.}\\ \infty & \\ A>0 & \text{则 } a_n \text{ 与 } b_n \text{ 同敛散}\end{cases}$$

（Kira备注：比较判别法的极限形式是我最喜欢用的判别法~没有什么问题是求极限不能解决的~事实上，我们不需要求 $\lim\frac{a_n}{b_n}$，而只需求级数的等价无穷小即可，非常方便~）

例2 "判敛时是不需求和号Σ玩哒~"

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$判敛.

[分析]

$n\to\infty$，$\frac{1}{n}\to 0^+$，把 $\frac{1}{n}$ 连续化为 $x\to 0^+$

$x\to 0$，$x-\ln(1+x)\sim\frac{1}{2}x^2$

所以 $\frac{1}{n}\to 0^+$，$\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})\sim\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}$ 收敛.

（😊 你看，归根到底，还是在考验你大主小主等价功力）

例 3

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\sqrt{\frac{1}{n}}}\tan\sqrt{t}\,dt$$

[分析]

$n\to\infty$，$\frac{1}{n}\to 0^+$，连续化 $x\to 0^+$ → 习惯动作

对于 $\int_0^{\sqrt{x}}\tan\sqrt{t}\,dt$.

$f(x)=\int_0^x\tan\sqrt{t}\,dt\sim\int_0^x\sqrt{t}\,dt=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$，$g(x)=\sqrt{x}$

$f(g(x))=\int_0^{\sqrt{x}}\tan\sqrt{t}\,dt\sim\frac{2}{3}x^{\frac{3}{4}}$

故 $\int_0^{\sqrt{\frac{1}{n}}}\tan\sqrt{t}\,dt\sim\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}$ 而 $\frac{3}{4}<1$ ⇒ 发散！

（😊 关于此等价无穷小求法，请翻阅第二页）

常项级数判敛常用

方法二：比值判别法 （靠自己）“达朗贝尔”

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho\begin{cases}<1 & \text{收敛}\\ >1 & \text{发散}\\ =1 & \text{失效}\end{cases}$$

方法三：根值判别法

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho\begin{cases}<1 & \text{收敛}\\ >1 & \text{发散}\\ =1 & \text{失效}\end{cases}$$

例4

判别 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$ 在 $x=2$，$x=3$ 处级数的敛散性.

[分析]

$x=2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}2^n$　令 $u_n=\frac{n!}{n^n}2^n$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\,2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!\,2^n}=2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$=2e^{\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{n}{n+1}-1\right)}=2e^{-1}<1 \Rightarrow \text{收敛}.$$

当 $x=3 \Rightarrow 3\cdot e^{-1}>1 \Rightarrow$ 发散

☆

方法四. 积分法　(用于一看就很好积的)

Th. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ $(a_n\geqslant 0)$ 且 $\{a_n\}\downarrow$

令 $a_n \triangleq f(n)$

则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \int_1^{+\infty}f(x)\,dx$ 收敛.

例5

<1> $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 判敛.

解: $\because \left\{\frac{1}{n\ln n}\right\}\downarrow$　又 $\because \int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\ln\ln x\Big|_2^{+\infty}=+\infty$

$\therefore \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 发散　☆

<2> $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$ 判敛.

解: $\because \left\{\frac{1}{n\ln^2 n}\right\}\downarrow$　又 $\because \int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}=\frac{1}{-\ln x}\Big|_2^{+\infty}=\frac{1}{\ln 2}$

$\therefore \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$ 收敛.

② 交错级数判敛法　"莱布尼兹"

★① $a_n\geqslant a_{n+1}$　(即 $\{a_n\}\downarrow$)　② $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛 且 $S\le a_1$.

[注] ① $\{a_n\}\downarrow$ 不可少（反例：$a_n=\frac{1}{n}+(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n}$

$\{a_n\}$ 不单调 而极限为0，但 $\{a_n\}$ 发散）.

② 考研命题一定会保证 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

证 $\{a_n\}\downarrow$ 是难点.

例6

$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln n}$ 判敛

解：

$$\begin{cases}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}=0\\ \frac{1}{\ln n}>\frac{1}{\ln(n+1)}\end{cases}\Rightarrow \text{收敛}$$

☆

(六) 任意项级数的绝对收敛与条件收敛

（😊 添加绝对值会增加发散性哦~↗）

如 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right|$ 发散.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散，称 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛（弱）.
2. $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 敛，称 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛（强）.

例7

设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，$\alpha>0$ 常数，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot|a_n|}{\sqrt{n^2+\alpha}}$（　）

A. 绝对收敛　B. 条件收敛　C. 发散

该级数不是交错级数，因为有 0 项．

$\frac{|a_n|}{\sqrt{n^{3+\alpha}}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^{3+\alpha}} + a_n^2\right)$ （由 $\sqrt{\alpha\beta} \le \frac{\alpha+\beta}{2}$）

收敛 ⇐ 收敛 + 收敛

所以 绝对收敛．

例1.8

① $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\overset{?}{\Rightarrow}$ $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1}+a_{2n})$ 收敛？ ✓．

因为：

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1}+a_{2n}) = (a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots$

② $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 ⇒ $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+a_{n+1})$ 收敛 ✓．

因为

$S = a_1+a_2+\cdots+a_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 ⇒ $\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \end{cases}$

$S_n' = (a_1+a_2)+(a_2+a_3)+\cdots+(a_n+a_{n+1}) = 2S_n - a_1 + a_{n+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n' = 2S - a_1$ ∴ $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+a_{n+1})$ 收敛．

③ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\overset{?}{\Rightarrow}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛？ ✗ 反例 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$

（ ◡ Kira：找反例朝"交错级数"和"$\frac{1}{\sqrt{n}}$"上靠，很有效～ ）

④ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\ (a_n \ge 0)$ 收敛 $\overset{?}{\Rightarrow}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛．（pf：$0 \le a_n^2 \le a_n < 1$）

例9

$f(x)$二阶连续可导，$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x^2}=1$，证 $\sum_{n=1}^{\infty}[f(\frac{1}{n})-1]$ 绝对收敛

证：

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x^2}=1 \Rightarrow f(0)=1$

$1=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{2x} \Rightarrow f'(0)=0$

$1=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\frac{1}{2}f''(0) \Rightarrow f''(0)=2$

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)$

$f(x)=1+x^2+o(x^2)$

$\Rightarrow f(\frac{1}{n})=1+\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2}) \Rightarrow |f(\frac{1}{n})-1|\sim\frac{1}{n^2}$

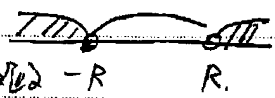
$\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}|f(\frac{1}{n})-1|$收敛。

OK！

三 幂级数的收敛域 (最难已过~↑)

1. Abel定理

对 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，$\exists R$



$\begin{cases} 当|x|<R，绝对收敛 \\ 当|x|>R，发散 \\ 当|x|=R，一切皆有可能 \end{cases}$

(其中，R称为收敛半径)

2. R的求法

对 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$

① $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho \Rightarrow R=\frac{1}{\rho}$

② $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho \Rightarrow R=\frac{1}{\rho}$

★(注意！此处只把系数a_n拿去算，不带x玩儿！)

[注] ① 对 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，若 $x=x_0$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 条件收敛.

$\Rightarrow R=|x_0|$

② 如对 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{3n+1}$

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho \Rightarrow R=\sqrt[3]{\frac{1}{\rho}}$

③ 求收敛域的程序：

step 1. $\sum a_n(x) \to \sum|a_n(x)| \geq 0$ (不管三七二十一先给加绝对值)

step 2. 按 P180 方法求出 R.

$\Rightarrow$ 收敛区间为 $(-R, R)$

step 3. 单独讨论 $x=-R$ 和 $x=R$ 处级数的敛散性.

综上，收敛域为 ——.

(☺ kira 备注：step 2 中，要会写"收敛区间"四个字，$(-R,R)$ 为开区间)

例 10

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(2x-1)^n$ 在 $x=-2$ 处收敛，在 3 处发散，求 R.

解：

$$\left.\begin{array}{ll} |2\cdot(-2)-1| \leq R & \Rightarrow R\geq 5 \\ |2\cdot 3-1| \geq R & \Rightarrow R\leq 5 \end{array}\right\} \Rightarrow R=5.$$

例 11

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-1)^n}{2^n n^2}$，求 R. 收敛域.

解：$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{2}$ 陷阱. $R=2$ ← 系数是 $\frac{1}{2}$ 还是 ... 不是系数

$2x-1=\pm2$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(\pm2)^n}{2^n\cdot n^2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛.

$\therefore -2\le 2x-1\le 2$

收敛域为 $[-2,2]$

☆

四 幂级数的展开与求和

▶ 任务一：函数展成幂级数

• 工具一：$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

背 记：① $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\quad(-\infty<x<+\infty)$

② $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}\quad(-\infty<x<+\infty)$

③ $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\quad(-\infty<x<+\infty)$

④ $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\quad(-1<x<1)$

⑤ $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\quad(-1<x<1)$

⑥ $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\quad(-1<x\le1)$

☆ ⑦ $-\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\quad(-1\le x<1)$

（Kira强调：以上7个式子必须背熟，至少背熟，最低要求是对左侧和右侧形式均有印象，有感觉~）

• 工具二：分析性质

对 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，$x\in(-R,R)$

Th1（逐项可导性）$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$

☆ 新幂级数与原幂级数收敛半径相同，端点处敛散性未必同.

Th2.（逐项可积性）$\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nx^n\,dx$
$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$

例12

将 $f(x)=\ln x$ 展成 $x-2$ 的幂级数

解：

$$f(x)=\ln[2+(x-2)]=\ln 2+\ln\left[1+\frac{x-2}{2}\right]$$

$$=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x-2}{2}\right)^n$$

$$=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n}(x-2)^n \quad (0<x\le 4)$$

☆

kira备注：☆☆☆

所谓展成幂级数，本质上无非就是凑准成那几个公式，而这种"凑公式技能"，你早在大一上学期之极限就应该熟练掌握了！玩级数和玩极限本质上技能点是一致的！

例13

$f(x)=\dfrac{5x-1}{x^2-x-2}$ 展成 $x+2$ 的幂级数

解：

$$f(x)=\frac{5x-1}{(x+1)(x-2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}$$

$$f(x)=2\cdot\frac{1}{x+1}+3\cdot\frac{1}{x-2}$$

$$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{-1+(x+2)}=-\frac{1}{1-(x+2)}=-\sum_{n=0}^{\infty}(x+2)^n \quad (-3<x<-1)$$

$$\frac{1}{x-2}=\frac{1}{-4+(x+2)}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{(x+2)}{4}}=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+2}{4}\right)^n$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^{n+1}}(x+2)^n \quad (-6<x<2)$$

$$\therefore f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}-\left(2+\frac{3}{4^{n+1}}\right)(x+2)^n \quad (-3<x<-1)$$

☆

例14

$f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}$ 展成x的幂级数

解:

$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)x^{2n}\quad(-1<x<1)$$

$$f(0)=\frac{\pi}{4},\quad f(x)=f(0)+\int_0^x f'(x)dx$$

$$=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\quad(-1\le x<1)$$

(kim 提醒: 收敛域千万记得要检查端点哦~)

- 任务二: 求 $S(x)$
- 工具三: DE

Case 1.	$\Sigma P(n)x^n$	④ $\frac{1}{1-x}$ ⑤ $\frac{1}{1+x}$

例15 "规范!"

$\sum_{n=1}^{\infty}n^2(2x-1)^{2n}$, 求 $S(x)$

解:

1° $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1\Rightarrow R=1$

$2x-1=\pm1$ 时 $\because n^2\cdot(\pm1)^{2n}\to\infty\quad(n\to\infty)$

$\therefore 2x-1=\pm1$ 时 发散 $\quad\therefore -1<2x-1<1\Rightarrow x\in(0,1)$

2° 令 $(2x-1)^2=t$,

$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2t^n=\sum_{n=1}^{\infty}[n(n-1)+n]t^n$ ⇨ $\boxed{n^2\text{处理方法}}$

$=t^2\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)t^{n-2}+t\Sigma nt^{n-1}$ ⇨ $\boxed{\text{"手法是非常faith"}}$

$= t^2 \left(\sum_{n=2}^{\infty} t^n\right)'' + t\left(\sum_{n=1}^{\infty} t^n\right)'$

$= t^2 \left(\frac{t^2}{1-t}\right)'' + t\left(\frac{t}{1-t}\right)'$

（方法点到为止）

例 16

$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n+1}$ 求 $S(x)$. "超简单"

解：

1° $R=1$, $x=\pm1$ 时 $n(\pm1)^{n+1} \to \infty$

$\Rightarrow x \in (-1,1)$

按规范步骤
条理分明

2° $S(x) = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = x^2\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = x^2\left(\frac{x}{1-x}\right)'$

（"再讲就无聊了…" 如：$(n+1)(n+3)x^n = [n(n-1)+5n+3]x^n$）

Case 2 $\sum \frac{x^n}{p(n)}$ ⑥ $\ln(1+x)$

⑦ $-\ln(1-x)$

分析性质

（一个常识："$\left(\frac{x-1}{2}\right)^{2n}$" 令 "$\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 = t$" ！）

例 17

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$

解：

1° $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1 \Rightarrow R=1$

$x=\pm1$ 时 $\left|\frac{(\pm1)^n}{n(n+1)}\right| \sim \frac{1}{n^2}$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛.

$\therefore x \in [-1,1]$

2° $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ "无定义点先算"

$S(0)=0$

$x\neq 0$ 时 $S(x)=-\ln(1-x)-\frac{1}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-x\right)$

$=\left(\frac{1}{x}-1\right)\ln(1-x)+1 \quad (-1\leq x<1$ 且 $x\neq 0)$

$S(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$

$\therefore S(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ 1, & x=1\\ \left(\frac{1}{x}-1\right)\ln(1-x)+1, & -1\leq x<1 \text{ 且 } x\neq 0\end{cases}$

例18 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}$ $S(x)$?

解:

1° $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1 \Rightarrow R=1$

当 $x=\pm 1$ 时 $\frac{(\pm 1)^{2n}}{2n+1}\sim\frac{1}{2n}$

$\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 发散 $\therefore x=\pm 1$ 时 级数发散.

$\therefore x\in(-1,1)$

2° $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}$

"我拿到手，首先第一步 S(0)，因为分母明显除下一次.

S(0) 是常数项."

$S(0)=1$

$x\neq 0$ 时, $xS(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 求导分母就没了

$(xS(x))'=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}$

$$xS(x) = xS(x) - 0\cdot S(0) = \int_0^x [xS(x)]'\,dx = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Bigg|_0^x$$

$$\Rightarrow xS(x) = -\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}$$

综上，$S(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2x}\ln\frac{1-x}{1+x}, & 0<|x|<1 \\ 1, & x=0 \end{cases}$ ☆

Case 3 $\sum \frac{x^n}{含!}$ $\begin{cases} ①.②.③ \quad e^x.\ \sin x.\ \cos x \\ 微分方程 \end{cases}$

例19 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{n!}x^n$ 求 $S(x)$ "不用练很多，很快就熟了"

解：

1° $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0 \Rightarrow R = +\infty$

$x\in(-\infty,+\infty)$

2° $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^n + e^x$

$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)+1}{(n-1)!}x^n + e^x$

$= x^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + e^x$

$= (x^2+x+1)e^x$ ☆

"写级数时把前面0项都扔了，从第一个非0项开始写，很保险！"

例20

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ 求 $S(x)$

解：

1° $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0 \Rightarrow R=+\infty$

$x\in(-\infty,+\infty)$

2° $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$

$S'(x)=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots$

$S''(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$

注意到

$S(x)-S''(x)=0$

有 $S(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{x}$，$S(0)=1$，$S'(0)=0$.

$\Rightarrow c_1=\cdots \quad c_2=\cdots$

"方法点到为止，关注方法～！"

(kira 总结陈词：

▶ 玩级数首先一定一定要熟好极限计算的各项技能，很多技巧和思想方法通用，不然你有时会都害怕！！！

▶ 不定积分计算，定积分和反常积分功底要扎实，否则判敛和用积分解决幂级数时发怵！

▶ 反正学好【大王小王篇】就对了啦～！

▶ 级数内容我认为冲刺时最好的巩固和提高方法是：用李永乐真题分题型级数部分完整做一遍。（因为考试不会太难，以此种方式扫一遍真题，你让头脑清晰，应对80%级数题游刃有余～前提是我的方法你都会了～）)

「拾遗篇」

本篇内容多为概念和应用类问题.
取材自宇哥和汤神的课程笔记，并融入
我自己的整理和感悟.

开启本篇前仍望先练熟「大王小王篇」
以增强信心和能力.

极限定义及性质

(一) "$x\to\cdot$"是一种"过程性"——"取遍趋向过程中所有点"

Thx: $\lim\limits_{x\to\cdot} f(x)$ 存在 ⇒ $f(x)$ 在 $x\to\cdot$ 时处处有定义(存在)

(即：若 $f(x)$ 在 $x\to\cdot$ 时存在无定义点，⇒ $\lim\limits_{x\to\cdot} f(x)$ 不存在)

例1

如 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x\sin\frac{1}{x})}{x\sin\frac{1}{x}}=1$ ✗　正解：不存在.

取 $x=\frac{1}{k\pi}$，$\sin\frac{1}{x}=\sin k\pi\equiv 0$

(p.s. 计算题会跳开无意义点)

(二) 定义.

① 函数极限：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ ⇔ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$

② 数列极限：$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时 恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$ ⇔ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$

例2

以下四个说法正确的个数为 3.

✗ A. $\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $x>X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<e^{\frac{\varepsilon}{2016}}$ ⇔ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$

B. $\forall N\in N^*$，$\exists$正整数 k，当 $|x-x_0|\le\frac{1}{k}$ 时，恒有 $|f(x)-A|\le\frac{1}{2N}$ ⇔ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$

C. $\forall\varepsilon\in(0,1)$，$\exists$正整数 N，当 $n\ge N$ 时，恒有 $|x_n-a|\le 2\varepsilon$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

④ $\forall$正整数k，$\exists$正整数N，当$n>N$时，恒有$|x_n-a|\le\frac{1}{2k}$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

[分析] 抓两点：<1>不论"尺度ε"以何种形式出现，

必须且仅需满足 ① >0 ② 可以任意小（→0）

<2> $0<|x-x_0|<\delta$，$\exists\delta$
与 $0<|x-x_0|\le\delta$，$\exists\delta$ 等价

同样地 $|f(x)-A|<\varepsilon$
$|f(x)-A|\le\varepsilon$ 等价.

[A 含在 ε 前面 可以任意小！]

(三) 性质 (三大性质)

1. 唯一性：若$\lim f(x)$存在$=A \Rightarrow A$唯一

若$\lim x_n$存在$=a \Rightarrow a$唯一

注：左右极限不等，则极限不存在

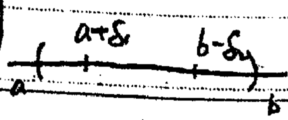
2. 局部有界性：若$\lim f(x)$存在，则$f(x)$在"$x\to\cdot$"有界（邻域）

[注] 有界性的判别

① 理论判别法：若$f(x)$在$[a,b]$上连续，$f(x)$在$[a,b]$有界

② 计算判别法：
$$\begin{cases} 若 f(x)在(a,b)连续 \\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\ \exists \\ \lim\limits_{x\to b^-} f(x)\ \exists \end{cases}$$

$\Rightarrow f(x)$在(a,b)内有界



③ 若 $\lim f(x)$ 不存在，则转向四则运算

$\begin{cases} 有界 \pm 有界 = 有界 \\ 有界 \times 有界 = 有界 \end{cases}$

例3

设 $f(x)=\dfrac{(x^2-1)\sin x}{(x^2+1)\cdot|x|}$，讨论 $f(x)$ 在其定义域上的有界性.

【分析】 $-\infty \quad -X \quad -\delta \quad 0 \quad +\delta \quad +X \quad +\infty$

"判4个极限"

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(x^2-1)\sin x}{(x^2+1)\cdot|x|} = -1\cdot 1=-1$ $\exists$ ✓

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2-1}{x^2+1}\cdot\dfrac{\sin x}{|x|} = -1\cdot -1=1$ $\exists$ ✓

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-1}{(x^2+1)|x|}\cdot\sin x$ = 不存在！（转）

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-1}{(x^2+1)|x|}$ 有界，$\sin x$ 有界

有界·有界 = 有界 ✓

$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2-1}{(x^2+1)|x|}\sin x$ 同理，有界·有界 = 有界 ✓

由初等函数性质，$f(x)$ 在 $[-X,\delta]$，$[\delta,X]$ 上必连续，则必有界.

※

2. 局部保号性（在"$x\to\cdot$"上，在邻域上）

$\begin{cases} 若 \lim f(x)=A>0 \xrightarrow[\text{脱帽}]{} f(x)>0 \\ 若 f(x)>0 \xrightarrow[\text{戴帽}]{} \lim f(x)\geq 0 \quad（须检验极限存在性） \end{cases}$

"经典"　"常识"

例4

设 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\ (=f'(0))=2$，

则 $\exists\ \delta>0$，使（　）

A. $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内 ↗

B. $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内 ↘

C. $\forall x\in(0,\delta)$，$f(x)>f(0)$

D. $\forall x\in(-\delta,0)$，$f(x)>f(0)$

[分析] 由保号性，在邻域内 $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}>0$

$\forall x\in(0,\delta)\Rightarrow f(x)>f(0)$

$\forall x\in(-\delta,0)\Rightarrow f(x)<f(0)$　　选[C]

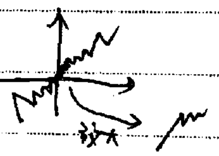
☆ 导数不能脱离区间，若 $\forall x\in I$，$f'(x)>0\Rightarrow f(x)$ 在 I 上 ↗

按A的叙述，$f(x)$ 的导数在区间 $(0,\delta)$ 上处处为正，

而原题仅保证导数在 $x=0$ 一点为正，显然A错。

经典反例：振荡函数

（在任意小区间振荡，不单调！）



4. 其它性质：

① (列与子列) $\begin{cases}\text{列有极限}\Rightarrow\text{任一子列有极限且极限同}\\ \text{子列有极限}\nRightarrow\text{列有极限}\end{cases}$

② 准则 I：单调有界数列必有极限

$\{$ Case 1. $\{a_n\}\uparrow\begin{cases}\text{若无上界}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty\\ \text{若}a_n\le M\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n\text{存在}\end{cases}$

Case 2. $\{a_n\}\downarrow$ $\begin{cases} \text{无下界} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty \\ a_n \geq M \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \text{存在} \end{cases}$

例5 "比较难"

$a_1 = 2$，$a_{n+1} = 2 + \frac{1}{a_n}$，证 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在

pf:

令 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \Rightarrow A = 2 + \frac{1}{A} \Rightarrow A^2 - 2A - 1 = 0 \Rightarrow A = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$

$\Rightarrow A = 1 + \sqrt{2}$，$A = 1 - \sqrt{2}$（舍）

$0 \leq |a_n - A| = \left|(2 + \frac{1}{a_{n-1}}) - (2 + \frac{1}{A})\right| = \left|\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{A}\right| = \frac{1}{Aa_{n-1}}|a_{n-1} - A|$

$\leq \frac{1}{4}|a_{n-1} - A| \leq \cdots \leq \frac{1}{4^{n-1}}|a_1 - A|$

$\because \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{4^{n-1}}|a_1 - A| = 0$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$

(p.s. 本题采用的是"先求极限，后证存在"的逆向思维。另外，判断单调性不是件容易的事件，常用方法有数学归纳法，相邻两项相减，求导等，这里还介绍了

[导数法] $a_{n+1} = f(a_n)$，构造 $y = f(x)$

$f'(x) \geq 0 \Rightarrow \{a_n\}$ 单调 $\begin{cases} a_1 < a_2 & \uparrow \\ a_1 > a_2 & \downarrow \end{cases}$)

③ 准则 II. 夹逼准则

<1> $\begin{cases} a_n \leq b_n \leq c_n \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$

<2> $\begin{cases} f \leq g \leq h \\ \lim f = \lim h = A \end{cases} \Rightarrow \lim g = A$

[注] $\lim f = \lim h = A \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \lim (h - f) = 0$

连续和间断

1\. 一切初等函数在其定义区间内连续，故只需研究函数特殊的点。

{ 无定义点，
  分段函数分段点，

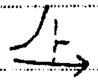
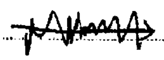
2\. 连续

$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

① = ② = ③

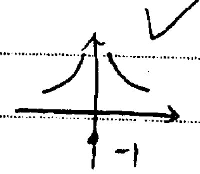
3\. 间断

1) ①②均存在，但①≠② ⇒ 跳跃间断点，
   ①=②≠③ ⇒ 可去间断点，
} 第一类间断点

2) ①和②至少一个不存在，且
   =∞ ⇒ 无穷间断点， 
   =振荡 ⇒ 振荡间断点， 
} 第二类间断点

[注] x_0为无穷间断点 ⇒ x_0可否为极小值点？✓

如 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x\neq 0 \\ -1, & x=0 \end{cases}$



例6 $f(x)=\frac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点有 2 个

解：

无分段点，故看无定义点 -1, 0, 1

$$\lim_{x\to -1}\frac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to -1}\frac{e^{x\ln|x|}-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to -1}\frac{x\ln|x|}{x(x+1)\ln|x|}=\infty$$

⇒ 无穷间断点。

$$\lim_{x\to 0}\frac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln|x|}}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln|x|}{x(x+1)\ln|x|}=1 \Rightarrow \text{可去}.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to 1}\frac{e^{x\ln|x|}-1}{x(x+1)\ln|x|}=\frac{x\ln|x|}{x(x+1)\ln|x|}=\frac{1}{2} \Rightarrow \text{可去}.$$

*

插播

Def ① 无穷小 — $\lim_{x\to a}\alpha(x)=0$ 称 $\alpha(x)$ 当 $x\to a$ 时为无穷小

② 无穷大 — 无穷小的倒数称为无穷大

若 $\forall M>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，$|f(x)|>M$

$\lim_{x\to a}f(x)=\infty$

> 字哥：
> +∞：玉皇大帝（一直在天上）
> −∞：阎王爷（一直在地下）
> 无界：悟空（上天入地回人间）

- 问题1：无界 $\overset{\nRightarrow}{\Leftarrow}$ 无穷大

如 $a_n=n[1+(-1)^n]$；$a_1=0$，$a_2=4$；$a_3=0$；$a_4=8$…

是无界，非无穷大

- 问题2：无界 × 无界 $\overset{?}{=}$ 无界 ×

无穷大 × 无穷大 = 无穷大 ✓

[反例] a_n：1，0，3，0，5…

b_n = 0，2，0，4，0…

$a_n\cdot b_n=0$（无界 × 无界 = 0）.

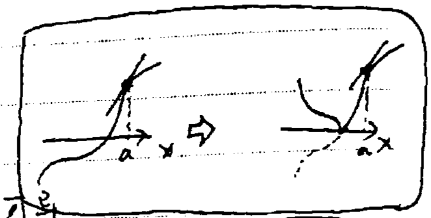
一元求导与微分概念相关　"一大波重要结论"

(一) ▶① 可导

$f(x)$ 在 $x=a$ 处连续 $\Rightarrow$ $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处连续

$f(x)$ 在 $x=a$ 处可导 $\not\Rightarrow$ $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处可导 (如 $y=x$)

(kira点评：取绝对值这个动作绝不破坏连续性，但不保持可导性.)



设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导

$f(a)\neq 0 \Rightarrow |f(x)|$ 在 $x=a$ 处可导

$f(a)=0$ $\begin{cases} f'(a)=0 \Rightarrow |f(x)| \text{在} x=a \text{可导} \\ f'(a)\neq 0 \Rightarrow |f(x)| \text{在} x=a \text{处不可导} \end{cases}$ → 变尖点

▶② $y=f(x)$ 可导 $\Rightarrow$ $f(x)$ 连续

$\not\Rightarrow$ $f'(x)$ 连续

例 7　"经典反例"

$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，问 $f'(x)$ 连续否？

解：

当 $x\neq 0$　$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$

$x=0$　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0 \Rightarrow f'(0)=0$

处处可导

但 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ 不存在　($\cos\frac{1}{x}$ 不存在极限)

$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)\neq f'(0) \Rightarrow f'(x)$ 不连续

③ $\lim_{x\to a} f'(x)$ 与 $f'(a)$ 不同 （例）就是活生生的例子）

④ $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，即 $\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$

- 修双侧 （$\Delta x\to 0$，若 $\Delta x\to 0^{+}$ 或 $\Delta x\to 0^{-}$ 都错）
- 不可跨 （$f(a)$ 不能写为 $f(a-2h)$ 等，只能写 $f(a)$）
- 阶相同 （分子 Δx 与分母 Δx 必须同阶无穷小）

④ ☆☆☆☆☆ 非常重要！要顺口溜背下来，秒杀选择题！）

例 8

设 $f(x)$ 连续，且 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在 $\Rightarrow$ $f'(0)$ 存在

答：错！因为"不可跨"，要死守定义。

经典反例：令 $f(x)=|x|$，$f'(0)$ 不存在。

（二）可微（微分）　$\because y=f(x),\ x\in D$

① $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$　"函数的增量"

若有 $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$

称 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可微，其中 $\boxed{A\Delta x} \triangleq$ 记作 $dy|_{x=a}=Adx$

"线性主部"

② 一元函数：
- 可导 $\Leftrightarrow$ 可微
- $A=f'(a)$
- $dy = d\,f(x) = f'(x)dx$

③ $f(x)$ 连续，$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-b}{x-a}=A \Rightarrow f(a)=b,\ f'(a)=A$

（自信写出来！！！）

$f(x)$ 可导，$f'(x)$ 奇偶性与 $f(x)$ 反.

例19 ——————"一道题玩通概念"

设 $f(u)$ 可导，$y=f(x^2)$ 当 x 在 $x=-1$ 处取得增量 $\Delta x=-0.1$ 时 Δy 的线性主部为 0.1 求 $f'(1)$

[分析] 由 $y=f(x) \Rightarrow y=f$

有 $y=f(x^2) \Rightarrow y=f[g(x)] \Rightarrow y=f\circ g$

$y'(-1)\Delta x=0.1 \Rightarrow y'(-1)=-1$

又 $y'(x)\big|_{x=-1}=(f(x^2))'=f'(x^2)\cdot 2x\big|_{x=-1}=f'(1)\cdot(-2)$

$\Rightarrow f'(1)=\frac{1}{2}$ ☆

积分相关概念

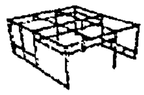
(一) 不定积分：$\forall x\in I$，$F'(x)=f(x)$，则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 I 上的一个原函数，记 $\int f(x)\,dx=F(x)+C$

（注：即，若 $F(x)$ 是原函数，则 $F(x)$ 有处处存在的导数。意味着，若 $\exists x_0\in I$，$F'(x_0)\neq f(x_0)$，则 $F(x)$ 不是 $f(x)$ 在 I 上的原函数.）

☆ 以下5种，有原函数的是：①⑤

① 连续 ✓ ② 有跳跃间断点 ✗ ③ 可去 ✗ ④ 无穷 ✗ ⑤ 振荡 ✓

（证明略，需要的话来找我~）



别	考	别
F	f	f'
偶 ⇐	奇	⇒ 偶
奇 ⇐	偶	⇒ 奇
周期 ⇐	周期	⇒ 周期

(二) 定积分： $\int_a^b f(x)\,dx \triangleq \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

Def. 可积： $\int_a^b f(x)\,dx$ 存在 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

△ ◡̈ ☆ 一张图串起可积的各种条件

$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在

$\Updownarrow$

充分：☆ $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界且只有有限个间断点. ⇒ $\int_a^b f(x)\,dx$ 存在 ⇒ $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有界 （必要）

$\Updownarrow$

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 ↗ $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积 ↗

（连续必可积）　　　　　　（可积必有界）

例 10 "一组'有原函数'和'可积'的剖析"

(1) $f(x)=\begin{cases} 2, & x>0 \\ 1, & x=0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$ 在 $[-1,2]$ 上有无原函数？是否可积.

答：由 P200 准线框，$f(x)$ 有跳跃间断点 ⇒ 无原函数

由 P201 准线框，$f(x)$ 有界且有有限个跳跃间断点 ⇒ 可积.

（结合图象，很好想 ◡̈ ）

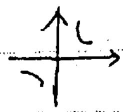
(2) $f(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}\right)=$ 无界振荡

求得 $F(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

⇒ 有原函数，无定积分.

(3) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$



⇒ 无原函数，无定积分.

(4) $f(x)=\begin{cases} 2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}\right)$ 有界振荡 ⇒ $F(x)=\begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

⇒ 有原函数，有定积分

[注] ① $f(x)$ 在区间 I 上连续，则 $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ 在 I 上可导

(降级) ② $f(x)$ 在 I 上可积，则 $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ 在 I 上连续

▲ $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ 天生就连续

(非常好用的结论！)

例 11

设 $f(x)=\begin{cases} \sin x, & 0\le x\le \pi \\ 2, & \pi< x\le 2\pi \end{cases}$

记 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$，则以下结论正确的是（C）

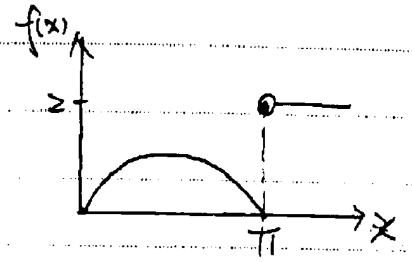
A) $x=\pi$ 是 $F(x)$ 的跳跃间断点，

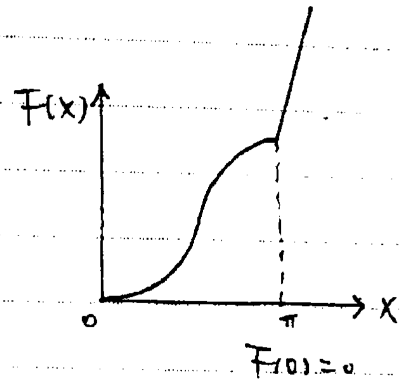
B) $x=\pi$ 是 $F(x)$ 的可去间断点，

C) $x=\pi$ 是 $F(x)$ 的连续但不可导点，

D) $x=\pi$ 是 $F(x)$ 的可导点。

解：





$F(x)$ 天生连续，A、B 直接错。

$f(x)$ 的跳跃间断点即为 $F(x)$ 不可导点（尖点）

（ 关于函数草图的画法，我后面会详细说 ）

(三) 关于奇偶性（P201 表格）"深化讲解"

- $f(x)$ 可积奇函数 $\Rightarrow \begin{cases} \int_0^x f(t)\,dt & \text{偶} \\ \int_a^x f(t)\,dt & \text{偶} \quad (a\neq 0) \end{cases}$

（[注] $\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^0 f(t)\,dt + \int_0^x f(t)\,dt$ 拆

偶 = 偶（常数是偶函数）+ 偶）

- $f(x)$ 可积偶函数 $\Rightarrow \begin{cases} \int_0^x f(t)\,dt & \text{奇} \\ \int_a^x f(t)\,dt & \text{不定} \end{cases}$

（[注] $\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^0 f(t)\,dt + \int_0^x f(t)\,dt$

偶 + 奇，所以不定哈～）

(四) 关于周期性 (P201 表格) "深化讲解"

Thm: 若 $f(x)$，T 则 $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$，$\forall a$

即在一个周期上的积分值与起点无关.

应用. 如证明奇函数在一个周期上的积分必为 0.

$\int_0^T f(x)dx = 0$

pf: $\int_0^T f(x)dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx = 0$ ✓ (妙了!)

(五) 关于有界

以例1引入 ———— "放狗战术"

$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导，则

A) $\exists \delta>0$，$f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内有界时 $\Rightarrow f'(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内有界

✓B) $\exists \delta>0$，$f'(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内有界时 $\Rightarrow f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内有界

C) $\exists X>0$，$f(x)$ 在 $(X,+\infty)$ 内有界 $\Rightarrow f'(x)$ 在 $(X,+\infty)$ 内有界

D) $\exists X>0$，$f'(x)$ 在 $(X,+\infty)$ 内有界 $\Rightarrow f(x)$ 在 $(X,+\infty)$ 内有界

[分析] A) 举反例考虑能否从有界中求出无界导. ("放狗")

$x\to 0^+$，$|\sin 狗|\le 1$.

取 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$，$f'(x)=-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$

B) 是定理: 若 $f(x)$ 在有限区间 (a,b) 内可导，当 $f'(x)$ 在 (a,b) 内有界时，$f(x)$ 在 (a,b) 内一定有界.

C) $x\to+\infty$，$f(x)=\sin x^2$，$f'(x)=2x\cos x^2$ "放狗"

D) $x\to+\infty$，$f(x)=x$. $f'(x)=1$

B）
PF：（用 Lagrange 中值定理）

$$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)$$

$$\Rightarrow |f(x)|=|f(x_0)+f'(x-x_0)|$$

$$\Rightarrow |f(x)|\le |f(x_0)|+|f'(\xi)||x-x_0|<f(x_0)+M(b-a)$$

OK!

（六）其它常用结论

☆1. $f(x)\in C[a,b]$，

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\le\int_a^b |f(x)|\,dx$$

⇨ 评："非常重要，不可以开玩笑的~"

2. $f(x),g(x)\in C[a,b]$，$g(x)\ge 0$，$\Rightarrow \exists\xi\in[a,b]$

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$$

（"☺ 俾多的 g(x) 不用中值了 条"）

3. $f(x)\in C[a,b]$ 则 $\exists\xi\in(a,b)$ 使

$$\int_a^b f(x)\,dx=f(\xi)(b-a)$$

☆4. ① $f(x)\in C[a,b]$，$f(x)\ge 0$，$\int_a^b f(x)\,dx=0$

$$\Rightarrow f(x)\equiv 0\quad (a\le x\le b)$$

② $f(x)\in C[a,b]$，$f(x)\ge 0$ 且 $f(x)\not\equiv 0$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx>0$$

③ $f,g\in C[a,b]$，$f\ge g$，$f\not\equiv g$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx>\int_a^b g(x)\,dx$$

例13

$f(x) \in C[a,b]$，$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b x f(x)\, dx = 0$

试证 $f(x)$ 在 (a,b) 内至少两不同零点.

pf:

令 $F(x) = \int_a^x f(x)\, dx = 0$

$\Rightarrow F(a) = F(b) = 0 \Rightarrow \exists c \in (a,b)$，$F'(c) = 0 \Rightarrow f(c) = 0$

一个零点确定.

反证. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内除 c 外无零点.

则 $f(x)$ 在 (a,c) 与 (c,b) 内异号 (因为积分为0!)

设 $\begin{cases} f(x) < 0, & x \in (a,c) \\ f(x) > 0, & x \in (c,b) \end{cases}$

$$\int_a^b (x-c) f(x)dx = \int_a^c (x-c) f(x)dx + \int_c^b (x-c) f(x)\, dx$$

对 $\int_a^c (x-c) f(x)\, dx$

由 $\begin{cases} (x-c)\ f(x) \in C[a,c] \\ (x-c)\ f(x) \geq 0 \\ (x-c)\ f(x) \not\equiv 0 \end{cases}$

$\therefore \int_a^c (x-c) f(x)\, dx > 0$ (P205. 4. ②)

同理

$\int_c^b (x-c)\ f(x)\, dx > 0$

$\Rightarrow \int_a^b (x-c) f(x)\, dx > 0$ 而 $\int_a^b (x-c) f(x)\, dx = 0$

$\therefore f(x)$ 除 c 外至少还有一个零点.

(kira备注:

$\int_a^b (x-c)\ f(x)\, dx = 0$ 来自题干条件, 真的是非常漂亮!)

▶5.「Cauchy不等式」 "康熙常识和工具"

$f(x), g(x) \in C[a,b]$ 则 $\left(\int_a^b fg\,dx\right)^2 \le \int_a^b f^2 dx \cdot \int_a^b g^2 dx$

Kira小贴士：

• 1. 问：可积和存在原函数是不是一回事？

答：当然不是。可积是区间上定积分存在。

原函数以不定积分为定义。

可积用 P201 的"偏头"判断。

原函数用 P200 的"√ ××× √"判断

• 2. 补充一个反常积分的知识点（反常积分在"大王小王篇"已有）

反常积分在收敛情况下可看作奇函数 or

偶函数，可用"偶倍奇0"，在收敛未判时，

不可乱用奇偶性！

极值，凹凸性与拐点

(一) 关于极值

① 邻域内 $\underset{x_0-\delta}{(}\ \overset{x_0}{\cdot}\ \underset{x_0+\delta}{)}$ $\forall x,\ f(x) < f(x_0)$ 极大值点

$\forall x,\ f(x) > f(x_0)$ 极小值点

（"既管大小，也管位置"）

② 最值 区间 I 上，$f(x) < f(x_0)$，$\forall x$ 最大

$f(x) > f(x_0)$，$\forall x$ 最小

（"只管大小，不管位置"）

☆ $[a,b]$ 上最值可疑点：① 驻点 ② $f'(x)$ 不∃点 ③ 端点

(a,b) 上 ③ 为 $\lim_{x\to a^+}$ 和 $\lim_{x\to b^-}$

• [Thm] 区间内部的最值必为极值.

(中值定理证明题, $f'(x_0)=0$ 必备~)

• p.s. 跳跃, 可去, 振荡, 无穷均可作为极值点.

(虽是间断点, 但双侧都有定义)

③ 单调性

<1> 单调性判别

$\forall x\in$] 一个区间上所有点导数都大于0, 说单格↗

$\forall x\in$] 一个区间上所有点导数都小于0, 说单格↘

<2> 费马定理: 若 $f(x)$ 在一点可导且在该点取极值,

则必有 $f'(x)=0$.

<3> 判断极值的第一充分条件 (用 $f'(x)$)

若 $f(x)$ 在 x_0 连续且在 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 可导, 在 x_0 左邻域↘,

右邻域↗ ⇒ 取极小值

(只要左右邻域导数符号相反, 即取极值)

☆ <4> 判断极值的第二充分条件 (用 $f''(x)$)

若 $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$, 该点必为极值点.

背 ☆ <5> 判断极值的第三充分条件 (用 $f^{(n)}(x)$) $n>2$.

若 $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$

$f^{(n)}(x_0)\neq 0$

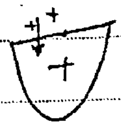
则 n 为偶数 ⇒ x_0 必为极值点.

且 $f^{(n)}(x_0)>0$ ⇒ 极小值点, / $f^{(n)}(x_0)<0$ ⇒ 极大值点

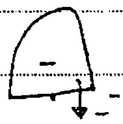
(二) 关于凹凸性与拐点.

①

一张生动又形象的图.



"碗"



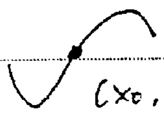
凹　　　　　　凸

$f''>0$　　　　　　$f''<0$

想象函数图象是个碗，f''为正就是一只正着的碗，可以盛住东西，里面东西增加"+"；

f''为负是倒扣的碗，里面东西撒出来"−"；

② 拐点.



$(x_0, f(x_0))$

凹曲线和凸曲线的分界点.

定理: $f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$

$f^{(n)}(x_0) \neq 0$，n为奇数，则x_0必为拐点.

pf: (考过多次，背!)　只证$n=3$情形.

$$f'''(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0} > 0$$

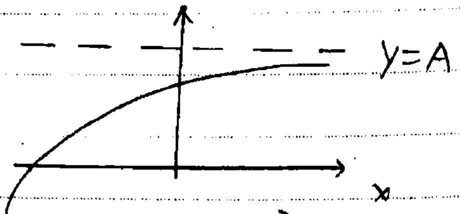
局部保号性 $\Rightarrow$ $\dfrac{f''(x)}{x-x_0} > 0$

$\Rightarrow$ $x \in (x_0-\delta, x_0)$ 有 $f''(x)<0$

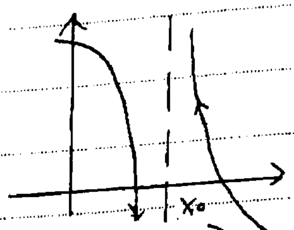
$x \in (x_0, x_0+\delta)$ 有 $f''(x)>0$.

$f''(x)$在x_0两端变号 $\Rightarrow (x_0, f(x_0))$为拐点.

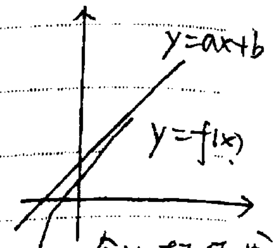
渐近线与函数作图 (必考!)



水平渐近线



垂直渐近线



斜渐近线

斜渐近线满足 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$.

"已知极限反求函数"

$$\begin{cases} b=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax) \\ a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} \end{cases}$$

★求渐近线的程序

① 找出 $y=y(x)$ 的无定义点，或定义区间端点 x_0，
考查 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to x_0^+) \\ (x\to x_0^-)}} y(x) \overset{?}{=} \infty$，若是，则 $x=x_0$ 为铅垂渐近线.

② 考查 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y(x) \overset{?}{=} A$ (∃)
若是，则 $y=A$ 为水平渐近线；
若不是，$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y(x)=\infty$，则转向③

③ 考查 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{y(x)}{x} \overset{?}{=} a$ $(\neq 0)$
若是，则考查 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[y(x)-ax] \overset{?}{=} b$.
若也是，则 $y=ax+b$ 为斜渐近线.

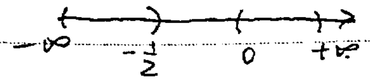
(闭眼睛想一想，水平渐近线和斜渐近线是"有你没我"的关系哦~)

例14

曲线 $y=\sqrt{4x^2+x}\,\ln(2+\frac{1}{x})$ 的渐近线有 3 条.

[分析]

$$\begin{cases}4x^2+x\geq 0\\ 2+\frac{1}{x}>0\\ x\neq 0\end{cases} \Rightarrow (-\infty,-\tfrac{1}{2})\cup(0,+\infty)\ \text{为定义域}.$$



1° $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}-0}\sqrt{4x^2+x}\,\ln(2+\frac{1}{x})=-\infty \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$ 为垂直渐近线.

$\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{4x^2+x}\,\ln(2+\frac{1}{x})=0$. 无

2° $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt{4x^2+x}\,\ln(2+\frac{1}{x})=\infty$ 无

3° $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4+\frac{1}{x}}\,\ln(2+\frac{1}{x})=2\ln2=a\neq0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{4x^2+x}\,\ln(2+\frac{1}{x})-2\ln2\,x\right]=-\frac{1}{4}\ln2+1=b$.

$\Rightarrow y=2\ln2\cdot x+\frac{1}{4}\ln2+1$ 为斜渐近线.

同理 $y=-2\ln2\cdot x-(\frac{1}{4}\ln2+1)$ 为斜渐近线. ☆

(😊 大主小主篇求 $\infty-\infty$ 型我有特别推荐哦~)

☆ 作图的程序:

(😊 你已经是个不动声色的大人了, 要像大人一样作图哦. 考虑6大因素.)

依次是:

1° $x\in D$ 定义域 2°. $f'(x)\begin{cases}=0\\ 无\end{cases}$ 增减

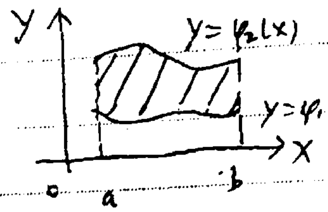
3° $f''(x)\begin{cases}=0\\ 无\end{cases}$ 凹凸. 4° 画表. 5° 渐近线 6° 关键点

x	( )	?	( )	?	( )
f'	+		−		+
f''	−		+		+
f	[illegible]	拐	[illegible]		[illegible]

求测度 (长度、面积、体积)(套公式、送分)

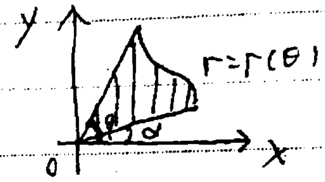
(☺ 不管题目如何变化，其实公式也不必死记硬背，面积就是"长×宽"，体积就是"底×高"，把握此原则，现推都可以~)

(1) $A=\int_a^b[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]\,dx$

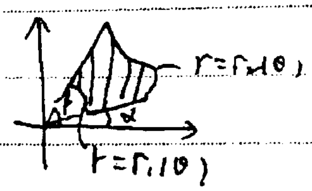


(2) 曲边扇形面积

$A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\,d\theta$



$A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta[r_2^2(\theta)-r_1^2(\theta)]\,d\theta$

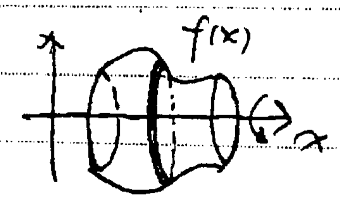


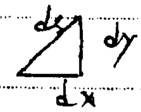
("跟求扇形面积一个道理")

(3) 求旋转体表面积

$dA=2\pi|f(x)|\,ds$ (类比$2\pi r$)

$A=2\pi\int_a^b|f(x)|\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$



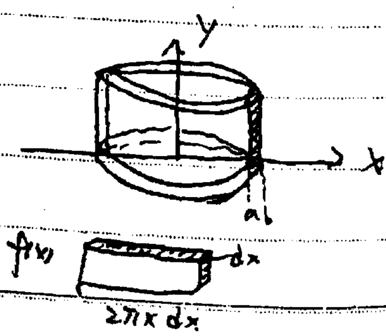


体积 $V=\int_a^b\pi f^2\,dx$

(4) 求薄壁圆柱体积 ("壳体")

"拆开变长方体"

$V=\int_a^b|f(x)|2\pi x\,dx.$



不等式证明 （历年高数考证明题频率最高）

《四大方法》
- 单调性 （求导～）
- 中值定理
- 凹凸性 （偶频）
- 最值 （与单调性是同一问题不同侧面

（😊 kira 备注：我个人是不太建议在不等式证明上
花太多心思啦，毕竟练完那么多花样
到头来发现大多题目还是直接用单调性
（求导）来得直白。）

"精华"

$$① \text{ 利用 } \begin{cases} f''(x)>0 \\ f(a)=f(b)=0 \end{cases} \Rightarrow f(x)<0 \quad (a<x<b)$$

例 15

$0<x<\frac{\pi}{2}$时，证：$\frac{2}{\pi}x<\sin x<x$

证：

令 $f(x)=x-\sin x$ ， $f(0)=0$

$f'(x)=1-\cos x>0 \quad (0<x<\frac{\pi}{2})$

$$\begin{cases} f(0)=0 \\ f(x)>0 \ (0<x<\frac{\pi}{2}) \end{cases} \Rightarrow f(x)>0 \quad (0<x<\frac{\pi}{2})$$

令 $g(x)=\sin x-\frac{2}{\pi}x$ ， $g(0)=0$.

$g'(x)=\cos x-\frac{2}{\pi}$ （用单调性碰壁）

$g''(x)=-\sin x<0$

$\because \begin{cases} g(0)=0, \quad g(\frac{\pi}{2})=0 \\ g''(x)<0 \end{cases}$

$\therefore g(x)>0. \quad (0<x<\frac{\pi}{2})$ ※

② 利用 $M_1 \le f(x) \le M_2$

其中 M_1 可 $\begin{cases} =m \\ <m \end{cases}$，$M_2$ 可 $\begin{cases} =M \\ >M \end{cases}$

例16

$e<a<b$. 证：$a^b > b^a$ （"简单到无法容忍"）

证：

$a^b > b^a \Leftrightarrow b\ln a - a\ln b > 0$

$\varphi(x) = x\ln a - a\ln x$，$\varphi(a)=0$ （习惯动作）

$\varphi'(x) = \ln a - \frac{a}{x} > 0 \quad (x>a)$

$\begin{cases} \varphi(a)=0 \\ \varphi'(x)>0. \ (x>a) \end{cases} \Rightarrow \varphi(x)>0 \quad (x>a)$

$\because b>a \quad \therefore \varphi(b)>0.$ ※

例17

$0<a<b$，证：$\frac{2a}{a^2+b^2} < \frac{\ln b - \ln a}{b-a} < \frac{1}{\sqrt{ab}}$

证：

$\frac{\ln b-\ln a}{b-a} = \frac{1}{\xi} \quad (a<\xi<b)$

$\frac{1}{\xi} > \frac{1}{b} > \frac{2a}{a^2+b^2}$ （中学生不等式）（$M_1<m$）

$$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}} \Leftrightarrow \ln b-\ln a = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$\varphi(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}-(\ln x-\ln a),\quad \varphi(a)=0$$

$$\varphi'(x)=\frac{1}{2\sqrt{a}\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{a}}{2x\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{x+a-2\sqrt{a}\sqrt{x}}{2\sqrt{a}\,x\cdot\sqrt{x}}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}\,x\sqrt{x}}>0$$

$$\begin{cases}\varphi(a)=0\\ \varphi'(x)>0\ (x>a)\end{cases} \Rightarrow \varphi(x)>0\quad (x>0)$$

$\because b>a.\quad \therefore \varphi(b)>0$ ※

例18 "一步Cauchy"

$e<a<b<e^2$，证 $\dfrac{\ln^2 b-\ln^2 a}{b-a}>\dfrac{4}{e^2}$

证：（可用单调性）

左 $=\dfrac{2\ln c}{c}\quad (a<c<b)$

即证 $\dfrac{2\ln c}{c}>\dfrac{4}{e^2}$ （想法：$\frac{4}{e^2}$ 可能是最小值，可能小于最小值）

令 $\varphi(c)=\dfrac{2\ln c}{c}$

$\varphi'(c)=2\cdot\dfrac{1-\ln c}{c^2}<0$

$\therefore \varphi(c)$ 在 $[e,e^2]$ 上 $\downarrow$

$m=\varphi(e^2)=\dfrac{4}{e^2}$

$\therefore \varphi(c)>\dfrac{4}{e^2}$ ※

方程根讨论

step1. 写函数，找范围.

step2. 求增减，找极值.

step3. 画草图

"三步很想"

例19

$a>0$，讨论 $ae^x=x^2$ 根个数.

解:

• step 1. $ae^x=x^2 \Leftrightarrow x^2e^{-x}-a=0$. （"把x捆一起"）

令 $\varphi(x)=x^2e^{-x}-a$ $(-\infty<x<+\infty)$

• step 2. $\varphi'(x)=e^{-x}(2x-x^2)=0$

$\Rightarrow x=0,\ x=2$

$x<0,\ \varphi'(x)<0$

$0<x<2,\ \varphi'(x)>0$ $\Rightarrow$ $x=0$ 极小点，$x=2$ 极大点.

$x>2,\ \varphi'(x)<0$

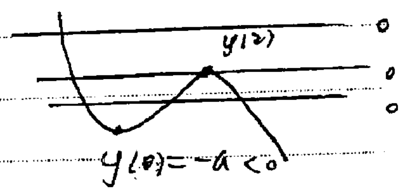
$\varphi(0)=-a<0$. $\varphi(2)=\frac{4}{e^2}-a$

• step 3. 画草图（凹凸性不考虑，所以不追究）

①当 $\varphi(2)>0$, $0<a<\frac{4}{e^2}$ 3个根

②当 $\varphi(2)=0$, $a=\frac{4}{e^2}$ 2个根

③当 $\varphi(2)<0$, $a>\frac{4}{e^2}$ 1个根.



例20

证 $e^x=-x^2+ax+b$ 不可能有3个不同根.

证:(反证) $f(x)=e^x+x^2-ax-b$

设 $c_1<c_2<c_3$, $f(c_1)=f(c_2)=f(c_3)=0$.

$\exists \xi_1\in(c_1,c_2)$, $\xi_2\in(c_2,c_3)$. $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0 \Rightarrow f''(\xi)=0$

而 $f''(x)=e^x+2>0$ 恒成立，矛盾！

（完结撒花…）