Kira 概统解题指南

官方店铺：Kira 考研周边小铺

微信公众号：Kira 言而信

微博：Kira 言而信

Kira 序 ——

感谢您选择 Kira 考研数学系列之《Kira 概统解题指南》，高数葵花宝典获得的认可给了我极大的鼓舞，让我觉得自己确实做了件十分有意义的事。在大家的敦促和鼓励下，终完成此本概统指南。

我本学期担任概率论与数理统计公共课助教，批作业时发现学生存在非常严重的概念不清和思路混乱问题，恨铁不成钢，由此想到考研人中大概也有“懵逼而不自知”的同学吧。我在复习考研数学时，对两块内容十分有心得——高数的计算和概统的框架，高数已出，概统还是有些好东西觉得可以分享。本指南有两大目标：一是概念吃透理清，通过把数学里的“鬼话”用“人话”生动地讲出来，帮你形象理解，同时你自己发现不了的含糊不清的地方，我也会帮你发现；二是把做题套路梳理干净，思路系统化，步骤规范化，达到“闭眼”做题的效果。

有评价说“概统指南就像高数那本一样，拯救了我混乱的大脑。”

本指南的重磅部分有：17 页我考研期间的私人概统框架（我自己亲手抄写一遍时，明显能感到知识点梳理得非常清晰，能够有效拉起知识脉络，你也可以抄写一遍）、每一章开篇的“Kira 挑战”及答案、全概率公式贝叶斯公式的生动讲解、一维随机变量函数分布、二维随机变量函数分布（分布函数法、卷积公式法）、求二维连续型随机变量函数的期望、秒杀计算技能、判断三大抽样分布、手把手求矩估计等。

我写指南的第一、二章节奏都很慢，甚至很简单很熟悉的知识点都要不断强调，一方面是为了纠正部分同学对于这些基础概念的理解偏差，另一方面是为了对概统不入门或畏惧的同学循序渐进打开一扇门，让新手不畏概统，大方自信地下笔。

我一直致力于洗脑以使读者养成好习惯，如P41-P44连续三道例题，我每一道都在step1写“当x在……取值时，y在……取值”，字都不用换，直接“复制粘贴”。做概统很多时候就是闭着眼复制粘贴，条件反射，所有的题目都是似曾相识。

风格秉承了一贯的“率性耿直吐槽风”，我的特长是——洗脑洗到会为止，边角细节用力抠，抽象概念具体化，讲话只讲大实话。 ><

希望概统指南能够为你们带来切实的帮助，我相信你依然会在里面看到葵花宝典的影子和我的影子，在最后关头get到使你受益的技能。我所能做的一点微薄的小事，大概就是把枯燥的概念生动地讲给你听，把逻辑梳理得透亮些，让读者觉得学数学是一件快乐而轻巧的事。

再次感谢。

Kira

-索引-

(*下划线表示该部分有我想特别强调的一些有 Kira 特色的知识点)

-真题索引-

(*本索引将详细列出各考研真题例题的具体位置，方便大家定位)

第一章 随机事件与概率

第二章 一维随机变量及其分布

第三章 多维随机变量及其分布

第四章 随机变量的数字特征

第六章 数理统计的基本概念

第七章 参数估计

第一章 随机事件与概率

空降点（适用于有一定基础且时间紧迫的同学）
【直接空降到以下页码↓】
P5 自测上方方框
P9 与独立有关的结论
（其它随便看看，哪里好奇看哪里）

☺ Kira 前言：

本章介绍了各种概率术语、概念和结论，为大家打开了概率世界之门，我将有目的性地围绕考点进行总结，其它一笔带过，大家自行读书理解。

▶ 真题选填必考点（每年3-4个考点必考，属高频~）

① 事件关系和运算（$A\subset B$, $A=B$, $A\cup B$, $A\cap B$, $A-B$, $AB=\phi$, $\bar{A}$）

② 概率的性质及五大公式

③ 事件相互独立的概率关系

④ 古典概型，几何概型

▶ 对做大题产生深远影响的

① 完备事件组 — 全概率公式（全集分解思想）

（很多同学惧怕的"离散＋连续"联合分布题型，实际是送分的，用的即是全概率公式及其思想

如数一、三 2008年22题 送分！）

② 条件概率、独立性、规范性

③ n重伯努利概型

必备常识 / 好用的必会结论

1 术语（理解概念）

▶(1) 随机试验E（3个特点）、样本点ω、样本空间Ω，

随机事件A、B、C，基本事件，必然事件，完备事件组

例 一例串概念：抛一颗骰子（随机试验E）

· 基本事件 or 样本点：点数为k（$k=1,2,\cdots,6$）

· 样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ （若分别用数字1-6表示点数）

· 随机事件 A:{点数为偶数}, B:{点数为3}, C:{点数大于…

· 完备事件组 A_1:{点数为奇数}, A_2:{点数为偶数}

（有 $A_1A_2=\phi$ 且 $A_1\cup A_2=\Omega$）

▶(2) 概率 $P(\cdot)$ 公理化定义

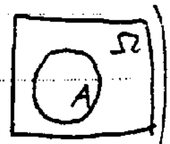
满足
$$\begin{cases} ① \text{ 非负性: } P(A)\geq 0 \quad (\text{考!}) \\ ② \text{ 规范性: } P(\Omega)=1 \quad (\text{考!}) \\ ③ \text{ 可列可加性: } A_1,\cdots,A_k \text{ 两两互斥, 有 } P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k) \end{cases}$$

且对于随机试验E的每个随机事件A，都有实数$P(A)$与其对应，则称$P(A)$为随机事件A的概率。

（☺ Kira备注：这里涉及到非常深邃的数学思想，
即把各种"不可描述"变为"可描述可衡量"。
概率$P(A)$不是理所当然的，是数学家为你定义的）

▶(3) 条件概率：$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ （$P(A)>0$）

（本质：$P(A)$, $P(B)$, $P(AB)$ 等样本空间是Ω
而 $P(B|A)$ 样本空间是A）



▶(4) 事件独立性：

设$A_1,\cdots A_n$为n个事件，如果对其中任意k个事件$A_{i_1}\cdots A_{i_k}$
($k\geq 2$)有 $P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$
则称n个事件$A_1,\cdots,A_n$相互独立。

😊来，看例子!

设 A, B, C 为三个随机事件，若有

〈Ⅰ〉 $P(AB)=P(A)P(B)$，$P(BC)=P(B)P(C)$，$P(AC)=P(A)P(C)$

〈Ⅱ〉 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$

称 A, B, C 三个事件相互独立.

若去掉〈Ⅱ〉，满足〈Ⅰ〉的事件 A, B, C 两两独立.

▶(5) 古典概型与几何概型.

▶古典概型：样本空间满足 { ①有限个基本事件. ②每个基本事件发生可能性同

⇒ 等可能事件 A 概率：$P(A)=\dfrac{\text{事件A所含基本事件个数}\ k}{\text{样本点总数}\ n}$

▶(二维)几何概型：{ ①若 Ω 是平面中的有界闭区域 D. ②投中 D 的子区域 A 的概率与 A 的位置和形状无关，而与 A 的面积成正比 (每个样本点等可能发生)

⇒ $P(A)=\dfrac{S_A}{S_D}$ (即面积之比)

(P.S. 类似地，一维几何概型 $P(A)$ 为 A 区间长度与样本空间线段长度之比；三维几何概型为体积之比).

▶ (6) 伯努利概型

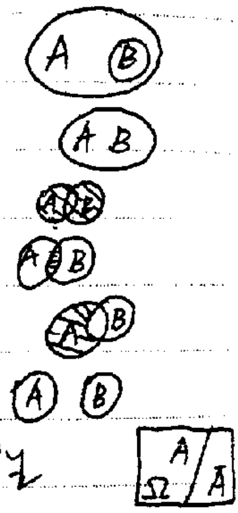
若随机试验E满足 $\begin{cases} n\text{次独立试验} \\ \text{每次试验只有两个结果 } A \text{ 与 } \bar{A} \\ P(A)=p,\ P(\bar{A})=1-p \quad (0<p<1) \end{cases}$

$$\Rightarrow P(A\text{发生}k\text{次}) = C_n^k p^k q^{n-k} \qquad (q=1-p)$$

2 随机事件的关系及运算律

▶ 关系

① 包含	$A \supset B$	B发生A必发生	
② 相等	$A=B$	A(B)发生B(A)必发生	
③ 和	$A\cup B$	A发生或B发生	
④ 积	$A\cap B$	A发生且B发生	
⑤ 差	$A-B$	A发生且B不发生	
★⑥ 互斥	$AB=\varnothing$	A, B不同时发生	
★⑦ 对立事件	$\bar{A}$	A与$\bar{A}$有且仅有一个发生	



▶ 运算律

① 交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$

② 结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

③ 分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cap(B-C)=A\cap B-A\cap C$

★ ④ 德摩根律（对偶律）

$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$，$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$

$\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n}=\bar{A_1}\cap\bar{A_2}\cap\cdots\cap\bar{A_n}$

$\overline{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n}=\bar{A_1}\cup\bar{A_2}\cup\cdots\cup\bar{A_n}$

（☺ 对偶律非常好用，不必死背：交变并，并变交，长杠变短杠）

3 概率的基本运算公式（防脱险，概率运算不自信）

$P(A+B)=?$ $P(A-B)=?$

$P(A+B|C)=?$ $P(A-B|C)=?$

【我就问你敢不敢下笔？？】

① ▸一般概率◂ ▸条件概率（$P(C)>0$）◂

一般概率	条件概率（$P(C)>0$）
（有界性）• $0\le P(A)\le 1$	$0\le P(A\mid C)\le 1$
• $P(\Omega)=1$	$P(\Omega\mid C)=1$
• $P(\emptyset)=0$	$P(\emptyset\mid C)=0$
（逆事件）• $P(\bar{A})=1-P(A)$	★ $P(\bar{A}\mid C)=1-P(A\mid C)$
（单调性）• 若 $A\supset B$，则 $P(A)\ge P(B)$	若 $A\supset B$，则 $P(A\mid C)\ge P(B\mid C)$

② ▸ 加事件 「$A\cup B$ 就是 $A+B$」（"加法公式"）

一般 ⬅

$$P(A\cup B)=\begin{cases}P(A)+P(B)-P(AB) & ★\\ P(A)+P(B) & (A、B\text{互斥})\end{cases}$$

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}P(A_iA_j)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

条件 ⬅ ☆

$$P(A\cup B|C)=\begin{cases}P(A|C)+P(B|C)-P(AB|C)\\ P(A|C)+P(B|C) & (A、B\text{互斥})\end{cases}$$

kira备注：

① $P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)$ 运算公式不用死背，按 +，-，+，- 依次写就好

如 $P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$

② 条件概率的关系式与一般概率同，把跟随出"|C"挂上就

· BMDM ·

③ ▶ $\boxed{\text{差事件}}$ （"减法公式"）

一般 ◆ $p(A-B)=\begin{cases} p(A)-p(AB) \\ p(A)-p(B) & (A\supset B) \end{cases}$

条件 ◆ ★ $p(A-B|C)=\begin{cases} p(A|C)-p(AB|C) \\ p(A|C)-p(B|C) & (A\supset B) \end{cases}$

④ ▶ $\boxed{\text{积事件}}$ 「逻辑感强，好用，好玩」（"乘法公式"）

$p(AB)=\begin{cases} p(A)p(B|A) & (p(A)>0) & \text{"A先于B发生"} \\ p(B)p(A|B) & (p(B)>0) & \text{"B先于A发生"} \\ p(A)p(B) & A,B\text{独立} \end{cases}$

Kira解读：

$p(AB)=p(A)p(B|A)$

$p(A\text{和}B\text{发生})=p(A\text{发生})\cdot p(A\text{发生的情况下}B\text{发生})$

逻辑非常通顺. 这个式子不需从 $p(B|A)=\frac{p(AB)}{p(A)}$ 中反推，应十分顺手地，肌肉记忆地，不经大脑地，直接顺利写出.

$p(A_1A_2\cdots A_n)=\begin{cases} p(A_1)p(A_2|A_1)p(A_3|A_1A_2)\cdots p(A_n|A_1\cdots A_{n-1}) \\ \qquad (p(A_1,\cdots,A_{n-1})>0) \\ p(A_1)p(A_2)\cdots p(A_n) \quad (A_1,\cdots,A_n\text{相互独立}) \end{cases}$

Kira感慨：我真的太喜欢这个关系式了！多米诺的感觉！做大题必会，在全概公式中有大用！

（结合P7库线框理解"分步走"）

⑤ ▶ 全概率公式　"全面的思想" ☆

万年真理：
一定一定要背原始公式，会写原始公式，
跟原始公式交朋友，原始公式最亲切了！

设 A 为一个随机事件，$B_1, B_2, \cdots, B_n$ 是一个完备事件组

($\bigcup_{i=1}^{n} B_i=\Omega$, $B_iB_j=\emptyset\ (i\neq j)$), $P(B_i)>0$, $(i=1,2,\cdots n)$

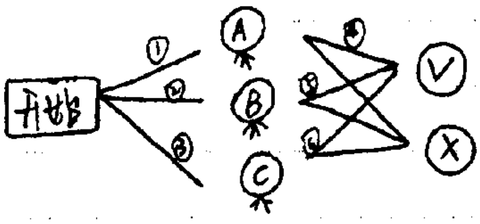
则 $P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)$

很好理解：

现实背景 → 设甲乙丙三人去射击，每次只选一个人射，
我们用 A, B, C 分别表示甲乙丙被选中射击，
用 D 表示射中，则运用我们的逻辑思维可知：

概率表示 → 甲乙丙被选中的概率表示为 $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$
被选中后射中的概率为 $P(D|A)$, $P(D|B)$, $P(D|C)$
结果本身　试验背景

★ Q 问：射中靶子总共分几步？[宋丹丹语气]
★ A 答：2步 ①选一个人 ②这个人射中了



计算 $P(D)$ 把所有从起点通往 V 的"路径"考虑全面即可

①(选A)　②(A击中)　①(选B)　②(B击中)

$P(D)=P(A)P(D|A)+P(B)P(D|B)+P(C)P(D|C)$

⑥ 贝叶斯公式 （逆概公式）「不用死背！像玩一样的！」

设 A 为一随机事件，$B_1, B_2, \cdots, B_n$ 是一个完备事件组，$P(A)>0$，$P(B_i)>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A|B_j)} \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

被虐了吧！

还是P7的题，已知靶子被射中了，问：谁干的？！

对于本题，靶子被射中有三种可能，即

$$\begin{cases} \text{甲射中：} & P(A)P(D|A) \\ \text{乙射中：} & P(B)P(D|B) \\ \text{丙射中：} & P(C)P(D|C) \end{cases}$$

显然，甲射中靶的概率为

$$P(A|D)=\frac{\overbrace{P(A)P(D|A)}^{\text{甲射中}}}{\underbrace{P(A)P(D|A)+P(B)P(D|B)+P(C)P(D|C)}_{\text{所有射中可能性}}}$$

结果"甲中"　　"已知射中"背景

上式就是"贝叶斯公式"，一模一样！

一边被虐，一边写，就可以了。不要被吓住！

4 有关独立性的那点事儿

P2-P3 我们简单给出了独立的概念，下面总结做题常用的结论：

① 相互独立 $\Rightarrow$ 两两独立；两两独立 $\nRightarrow$ 相互独立

（P3也有指出，两两独立缺个条件）

② • A,B 相互独立 $\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$

$\Leftrightarrow P(A)=P(A|B)$ （$P(B)>0$时） ☆

$\Leftrightarrow P(B)=P(B|A)$ （$P(A)>0$时） ☆

$\Leftrightarrow P(A|B)=P(A|\bar{B})$ （$0<P(B)<1$时）.

• A,B 相互独立 $\Rightarrow$ A与$\bar{B}$，$\bar{A}$与B，$\bar{A}$与$\bar{B}$ 均相互独立.

• A,B,C 相互独立 $\Rightarrow$ ① A与$\bar{A}$，B与$\bar{B}$，C与$\bar{C}$中各选一事件，得到的三个事件相互独立.
② 任一事件与另外两个事件的和、差、积均独立（理解为"毫无关系"）

③ 重要结论

▲ 概率为0的事件必与任何事件独立

▲ 概率为1的事件必与任何事件独立

Kira挑战时间:

1. 若A,B存在包含关系，是否一定不独立？
2. 若A,B互斥，是否一定独立？是否一定不独立？

▶ 答案统统是："否"！

若A,B存在包含关系，如$A\subset B$，表面上看，A发生则B一定发生. 但如果$P(B)=1$呢？
A发不发生，B都会发生（A好可怜…），A,B独立.

• 正确结论 ✓

若$0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$，A,B存在包含关系，则一定不独立

互斥与独立 — 千古难题

对于事件A、B，有互斥和独立两个概念。

⚠ 听好：

"互斥"和"独立"不是一个概念的东西，不在一个维度上。"互斥"是集合关系（若 $AB=\emptyset$，则互斥）

"独立"是概率关系（若 $P(AB)=P(A)P(B)$，则A、B独立）

当放在一起讨论时，一切皆有可能！

- 如：设 $P(A)>0$，$P(B)>0$，则若 $AB=\emptyset$，则 $P(AB)=0$

  但 $P(A)P(B)>0$，不独立，互斥。

- 如：若 $P(AB)=P(A)P(B)>0$，则 $A\cap B\neq\emptyset$，

  独立，不互斥。（因为 $P(\emptyset)=0$）

- 正确结论✓：

  若 $0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$，A与B互不相容（互斥）

  则A与B一定不独立

实战套路

一 随机事件的关系及运算

工具：事件的常用变形：

①真题的宠儿！

★ ① $A-B=A-AB=A\bar{B}$ （便于计算独立计算）

② $A\cup B=A\cup\bar{A}B=B\cup A\bar{B}=A\bar{B}\cup AB\cup\bar{A}B$

（化成互斥事件的和）

③ 若 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 是一个完备事件组，则

$A = AB_1 \cup AB_2 \cup \cdots \cup AB_n$

(将 A 转化为若干互斥事件之和)

★ 特别地，$A = AB \cup A\bar{B}$

(☺ Kira说：B 与 $\bar{B}$ 是常用的完备事件组)

真题1 — 2016 数三.7 —— (2006 数一13题基本相同)

设 A、B 为两个随机事件，且 $0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$，如果 $P(A|B)=1$ 则 ( )

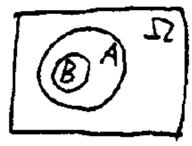
(A) $P(\bar{B}|\bar{A})=1$ (B) $P(A|\bar{B})=0$

(C) $P(A\cup B)=1$ (D) $P(B|A)=1$.

☺ Kira考场快速解法：「能用画图解决的先别写字」

$P(A|B)=1$ 即若 B 发生，则 A 一定发生.

又 $0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$，有 $B\subset A \subsetneq \Omega$



看(A)：若 A 不发生，则 ，显然 B 也不发生. ✓

看(B)：若 B 不发生且 A 发生，则 ，P 显然不必为0.

看(C)：错，不解释.

看(D)：错，不解释. 选(A).

☹ 不推荐用式子推，万一正确答案选D，这题分就丢掉了

如果证明题：由唯一的条件，有 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=1$

$\Rightarrow \underset{\boxed{\text{减法公式}}}{P(B)-P(AB)=0} \Rightarrow \underset{\boxed{\text{P10 ① 1★}}}{P(B\bar{A})=0} \Rightarrow \underset{\boxed{\text{由条件概率定义式}}}{P(B|\bar{A})=0}$

又 $\underset{\boxed{\text{P11 上方③}}\ \boxed{\text{P5 ②}}}{P(B|\bar{A})+P(\bar{B}|\bar{A})=1} \Rightarrow P(\bar{B}|\bar{A})=1$

真题2 2014 数一三 7

设随机事件A B相互独立，且 $P(B)=0.5$，$P(A-B)=0.3$，则 $P(B-A)=$ ____ .

Kira带你飞：

哎呀！太熟悉！刚用过的 P10 ★ 曰1 ！

从问题倒着走 $P(B-A)=P(B\bar{A})=P(B)P(\bar{A})$ ← P9

由 $P(A-B)=P(A\bar{B})=P(A)(1-P(B))=0.3 \Rightarrow P(A)=0.6$

$\Rightarrow P(B-A)=0.5\cdot 0.4=\underline{0.2}$ ※

④ A与C互斥，有 $AC=\phi$，有 $A\subset\bar{C}$，$C\subset\bar{A}$ 曰 C

真题3 2012 数一.三 14

设A,B,C是随机事件，A与C互不相容，$P(AB)=\frac{1}{2}$，$P(C)=\frac{1}{3}$，则 $P(AB|\bar{C})=$ ____ .

Kira带你飞：

从问题倒着走 $P(AB|\bar{C})=\dfrac{P(AB\bar{C})}{P(\bar{C})}=\dfrac{P(AB)}{1-P(C)}=\underline{\dfrac{3}{4}}$ ※

Kira备注： $AC=\phi \Rightarrow A\subset\bar{C} \Rightarrow AB\subset\bar{C} \Rightarrow AB\bar{C}=AB$

(想明白) 交运算"∩"，越交范围越小，越小越倒到最后

交就是乘，乘就是交；加是并，并是和.

三 古典概型、几何概型、伯努利概型

(1)

$\boxed{\text{古典概型}}$是开发智力，锻炼逻辑思维的好东东，我们要学会的是如何一步步把事情梳理条理，不重不漏！

▶翻译几个数学符号（基础好可跳过）

① C_n^m："从 n 个中取 m 个"的样本点数 $\left(=\frac{n!}{(n-m)!\,m!}\right)$

如 $C_7^3=\frac{7\times6\times5}{3!}$ 分子从 n 乘 m 个数（递减）再除以 m!

② A_n^m："从 n 个中取 m 个，并排序"的样本点数 $\left(=\frac{n!}{(n-m)!}\right)$

如 $A_7^3=7\times6\times5$ 分子从 n 乘 m 个递减数。

（我在上面反复提"样本点数"，而古典概型就是关于样本点数的问题，由 P_3）

真题 4 2016. 数三. 14

设袋中有红、白、黑球各一个，从中有放回地取球，每次取 1 个，直到 3 种颜色都取到时停，则取球次数恰好为 4 的概率为____.

（Kira 说：古典概型除了 16 年数三考了还真没怎么考过！大家掌握一般难度题目即可。古典概型最大的特色就是"坑"！坑到你都不知道自己哪里错，陷阱一大把。）

★读条件要读出以下信息：①有放回；②直到 3 色取到时停

★ 要想到以下隐含条件：
{ ①第4次取出的色在前3次中没出现；
  ②前3次取出过2种颜色的球，1种不行；

（😊 该题思考到如此地步，你的逻辑思维能力才达到要求，并可以开始列式。）

解：

$$p=\frac{\underbrace{C_3^1}_{\text{挑一种色最后取}}\cdot\underbrace{C_2^1}_{\text{剩余2色选一色}}\cdot\underbrace{C_3^1}_{\text{3个位置中挑一个放}C_2^1\text{选出的球}}}{\underbrace{3^4}_{\text{每次有3种选择，取4次}}}$$

$$=\frac{2}{9}$$

※

* 补充说明：(i) 不妨设最后取黑球 □□□黑

(ii) 黑球前有3次（3个位置），放红白两种球，且红出现1次或2次，在3个位置中取任意位置

(iii) C_2^1：在红、白中选一种颜色，只出现一次

(iv) C_3^1：在3个位置中选一个位置给 C_2^1 选出的球，剩2个位置自然放另一种色的球

至此，不重，不漏！

（😊 kira 建议：
- 古典概型主要有以下几种出法：①直接数数（shǔ shù），②投信问题，③连续抽取问题，④超几何分配问题（抽次品，抽牌）
- 思维不同多多懂的同学可多找相关题目来做。考试不作重点，不需把难题浪费时间。）

(2) 几何概型

几何概型出题频率较高，关键很多同学看到题目会法压根不知道该用几何概型，也不会列式。

★ 题型用几何概型的描述有：
在线段A、B中任取两点； 在区间(a, b)中任取两数；

真题5. 2007 数一、三 16.
在区间(0,1)中随机地取两个数，则这两数之差绝对值小于$\frac{1}{2}$的概率为______.

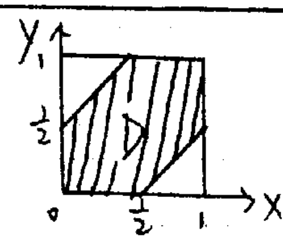
解：设随机抽取的数为X和Y，有$0<X<1$，$0<Y<1$
step1：X和Y相互独立，现把(X,Y)看作平面坐标。

step2：满足差绝对值小于$\frac{1}{2}$的区域即为$D=\{(X,Y)\mid |X-Y|<\frac{1}{2}\}$
样本空间Ω对应的区域为$G=\{(X,Y)\mid 0<X<1, 0<Y<1\}$

Kira备注：即使做大题，step2这两行要信手拈来，"D="，"G="，基本的数学素养，基本的步骤分。

step3：画图，标出区域D

$$P\{|X-Y|<\frac{1}{2}\}=\frac{S_D}{S_G}=\frac{1-(\frac{1}{2})^2}{1}=\frac{3}{4}$$



(3) 伯努利概型

Bernoulli 概型中涉及的n次独立重复试验除独立

出题外，其包含的思想在二项分布，中心极限定理，统计中都有了这种深刻的运用。

真题6　2007 数一、三 9

某人向同一目标独立重复射击，每次射击命中目标的概率为 p $(0<p<1)$ 则此人第4次射击恰好第二次命中目标的概率为______。

解：

（Kira备注：Bernoulli不需要背，跟着条件，按逻辑推）

（分析）$\underbrace{\times \quad \checkmark \quad \times}_{\text{前3次命中一次}} \quad \checkmark$

所以 $p(A) = C_3^1 p \, (1-p)^2 p$ ← 第4次命中

前3次选1次命中　两次不命中

整理得：$p(A) = 3p^2(1-p)^2$ ※

（😊 Kira备注：

对待独立重复试验，脑子保持条理性和清爽，好好梳理条件，不难，基础，送分 ）

第二章 一维随机变量

及其分布

P19 kira挑战内容先问自己一遍
答案在 P45，然后哪里不会点哪里

上空降点

P19 "好习惯" 3点
P21-P22 三个函数再理解
P26-P27 "3σ"原则；正态分布常用结论 (iii), (iv)
P30 注③ "心算"要求；4
P37 下方一个小习惯
P39 真题6 涉及的方法、技能
▲P40 六 "作图思想" P41 例11 "当X在…，Y在…"
▲P42. 利用反函数 P43. 真题7 真·复制粘贴
P41. 例11 和 P44 例12 的分段依据

Kira前言：

大家观察真题的出题规律不难发现，大题是一道多维随机变量(函数)分布，和一道搞统计量搞估计的统计大题，换言之，本章不会单独出大题，而是为做大题打底子的，同时本章往往以小题形式单独出题，考察概念、性质，故必须在此章把根基打牢。

Kira挑战 （注：r.v.指"随机变量"） P45回顾

1. 是不是只有连续型r.v.才有概率密度？
2. $P\{a<X\leq b\}=F(b)-F(a)$ 对连续型r.v.成立吗？对离散型r.v.成立吗？若不成立，仍如何改？
3. 分布函数一定连续吗？一定单调吗？
4. 连续型r.v.的概率密度 $f(x)$ 一定连续吗？
5. 几何分布的背景？超几何分布的试验背景？
6. 一般地，$F(x)$ 的分段点是否与 $f(x)$ 分段点相同？
7. 求一维随机变量函数分布该从 $F(x)$ 着手还是从 $f(x)$ 着手
8. 正态分布的性质？
9. 知道 3σ 原则吗？（为什么别人答卷那么快？）

所以，你真的复习好了吗？你做题是不是蒙的？？

Kira希望你养成的好习惯

1. 考虑严谨性，在写分布函数 $F(x)$ 时 x 的范围取"左闭右开"，虽然在连续型r.v.中这无所谓，但对于离散型和混合型r.v.，它可以时刻提醒你 $F(x)$ 右连续

而不能低级失误.

★2. $F(x)=P\{X\le x\}$ 时刻谨记 x 取遍 $(-\infty,+\infty)$
是"小写 x"取遍 $(-\infty,+\infty)$，不是"大写 X"取遍……

★3. 随手写际始公式，务必写际始公式，
随手画"大括号 {"，随手讨论 X 的范围.

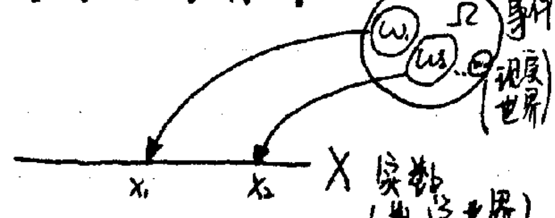
基础概念 & 必备常识

一 随机变量 r.v. (random variable)（可略过）

- 通俗说，随机变量的定义是将现实生活中的随机事件数量化，化成数学语言，从而可用数学工具加以研究.

- 随机试验 E 的样本空间为 $\Omega=\{\omega\}$，如果对每一个 $\omega\in\Omega$ 都有唯一实数 $X(\omega)$ 与之对应，且对于任意 $x\in R$，$\{\omega: X(\omega)\le x\}$ 是随机事件，则称定义在 Ω 上的单实值函数 $X(\omega)$ 为随机变量. 简记为 X.

（Kira 备注：
对于数学人来说，r.v. 的提出是非常重要的理论飞跃，因为它把现实中的具体事物与数学中的抽象概念建立了某种联系，使深入研究成为可能. 考研这块了解即可，至少要知道：X 是变量，在实数域上取值）



· BMDM ·

二 描述随机变量分布的三个函数

「概念一定理得一干二净，否则你连概统门都迈不进！对，迈不进！」

(1) 分布函数 $F(x)$ 【老大！根基！所有随机变量 X 都有！】

▶ 定义：设 X 是随机变量，x 是任意实数，称函数
$F(x)=P\{X\le x\}$ $(x\in R)$ 为随机变量 X 的分布函数

（kira 强调：$F(x)$ 是关于 x 的函数，不是 X，
x 要取遍 $(-\infty,+\infty)$，所以在任何情况下，
写"$F(x)=$"都要写遍 $(-\infty,+\infty)$ 上的 $F(x)$ 才完整！）

▶ 性质（充要条件）
- ① $F(x)$ 单调不减 且有 $0\le F(x)\le 1$
- ② $F(x)$ 右连续，即 $\forall x_0\in R$，有 $\lim\limits_{x\to x_0^+}F(x)=F(x_0+0)=F(x_0)$
- ③ $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$，$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$

▶ 注：
- ① $F(x)$ 本质是概率，自然有 $0\le F(x)\le 1$
- ② 满足上述性质①②③的 $F(x)$ 必是某随机变量的分布函数.

(2) 分布律 p_i 【仅限离散型随机变量 X】

▶ 定义：随机变量 X 只可能取有限个或可列个值 $x_1, x_2, \cdots$
则称 X 为离散型随机变量，称
$p_i=P\{X=x_i\}$，$i=1,2,\cdots$ 为 X 的分布律.

表示为

X	x_1	x_2	$\cdots$
P	p_1	p_2	

或 $X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots \end{pmatrix}$

(3) 概率密度 $f(x)$ 【仅限连续型 r.v. X】

▶ 定义：如果随机变量 X 的分布函数可以表示为

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \quad (x \in \mathbb{R})$$

其中 $f(x)$ 是非负可积函数，则称 X 为连续型随机变量，称 $f(x)$ 为 X 的概率密度函数，记为 $X \sim f(x)$

KiTa 提醒：① 注意连续型随机变量的定义，是先写出 $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$，$\forall x$ 再定义的连续型 r.v.

② 你不有看错："$X \sim f(x)$"，"$X \sim F(x)$" 都对

(4) 性质比较（两组）

▶ 像一组性质（放一起记）

分布律（充要条件）
- ① $p_k \geq 0$，$k = 1, 2, \cdots$
- ② $\sum_k p_k = 1$

概率密度
- ① $f(x) \geq 0$ ▲
- ② $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$ ▲
- ③ $P\{a < X \leq b\} = \int_a^b f(x)\,dx$
- ④ 若 $f(x)$ 连续，则 $F'(x) = f(x)$

☆ $f(x)$ 是某 r.v. 的概率密度的充要条件：$f(x) \geq 0$ 且 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

▶ 离散型与连续型（放一起记）

$$\begin{cases} \text{离散型 r.v. } X \begin{cases} ① F(x)=\sum_{x_k\le x} P\{X=x_k\} \\ ② P\{a<X\le b\}=F(b)-F(a) \\ ③ P\{X=a\}=F(a)-F(a-0) \blacktriangle \quad (F(a-0)=\lim_{x\to a^-}F(x)) \end{cases} \\ \text{连续型 r.v. } X \begin{cases} \blacktriangle ① F(x) \text{ 在 } (-\infty,+\infty) \text{ 上连续} \quad (\text{《高数全典》}P_{202}\ \text{原函数}F(x)\text{大X连续}) \\ ② P\{X=a\}=0,\ \forall a\in\mathbb{R} \\ \blacktriangle ③ P\{a<X\le b\}=P\{a\le X\le b\}=P\{a<X<b\}=F(b)-F(a) \end{cases} \end{cases}$$

三 常用分布

<1> 离散型 r.v. 常用分布（以分布律给出，即 $P\{X=x_i\}=p_i$）

▶ ① 0-1 分布　　$X\sim B(1,p)$

$P\{X=0\}=1-p$，$P\{X=1\}=p$，即 $X\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1-p & p\end{pmatrix}$　$(0<p<1)$

背景：伯努利一次实验，只有两个结果.

▶ ② 二项分布　　$X\sim B(n,p)$

$P\{X=k\}=C_n^k p^k q^{n-k}$　　$(k=0,1,\cdots,n;\ 0<p<1,\ q=1-p)$

背景：n 重伯努利实验两个结果 A 和 $\bar{A}$，A 发生次数 X.

▶ ③ 几何分布　（与几何无关，更像"终结者分布"）

$P\{X=k\}=q^{k-1}p$　　$(k=0,1,\cdots;\ 0<p<1,\ q=1-p)$

背景：伯努利试验，首次成功时试验次数 X

"首中即停止"

▶ ④ 超几何分布　（立即联想"抽次品"，相当于解古典概型）

$P\{X=k\}=\dfrac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$　　$(k=1,2,\cdots,l;\ l=\min\{M,n\})$

背景：① N件产品，M件次品，抽n次不放回抽样，
其中次品数 X.
或② N件产品，M件次品，抽n件检查，其中次品数X

▶ ⑤ 泊松分布 $X \sim P(\lambda)$ （联想"逛商场"）

$$P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k=0,1,2,\cdots,n;\ \lambda>0)$$

背景：某商场某时间段内，源源不断的顾客来流个数X.

Kira总结：• ①-④ 记住表达式和对应背景，不必背，自己推。
要会标准写法，比如左边指的一定是
"$P\{X=k\}=$"
要独立自主地写出来!!! 左边会写右边就会写!!!

• ⑤ 背公式，死背，考前背一背即可

★特别地，$\boxed{\text{泊松定理}}$：$X \sim B(n,p)$，当n较大，p较小时，
X近似服从于泊松分布 $P(np)$

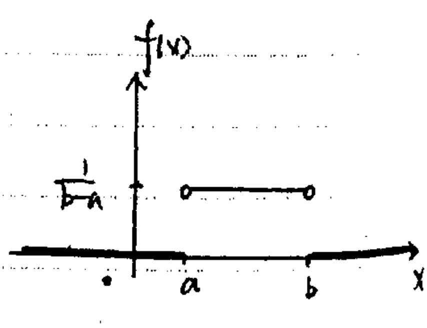
即 $P\{X=k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx \dfrac{(np)^k e^{-np}}{k!}$

（即大样本、小概率，便于计算复杂二项分布）

Ⅲ 连续型r.v.常用分布 （以f(x)给出）

▶ ⑥ 均匀分布 $X \sim U(a,b)$

$$X \sim f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a<x<b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



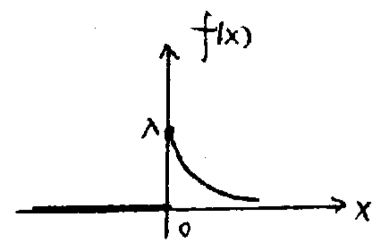
或给出 $X \sim F(x) = \begin{cases} 0, & x<a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \le x < b \\ 1, & b \le x \end{cases}$

(kira备注:
新手同学一看到"X服从区间(a,b)上的均匀分布"立刻懵住，不知该如何翻译，大方淡定地写呀:

" $X \sim f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a<x<b \\ 0, & 其他. \end{cases}$ "

大拇哥拉起来，分数就到手了.)

▶ ⑦ 指数分布 $X \sim E(\lambda)$



$X \sim f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$

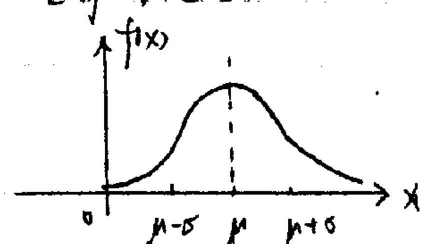
或给出

$X \sim F(x) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$ $(\lambda>0)$

▶ ⑧ 正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ [最重要]

背→ $X \sim f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

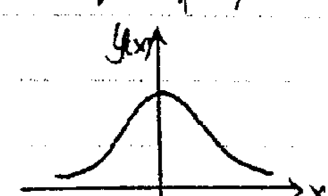
$(-\infty < x < +\infty)$



标准正态分布 $X \sim N(0,1)$

不用背→ $X \sim \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

[主要是可用标准化] $(-\infty < x < +\infty)$



Kira总结：

① 最低要求：以上3种分布的 $f(x)$ 要认识，能默写.
$F(x)$ 要认识，可根据 $f(x)$ 算出来（除正态分布）

② 均匀分布和指数分布的 $f(x)$ 和 $F(x)$ 均分段，写大括号

③ 均匀分布的 $f(x)$ 闭眼写，指数分布和正态分布公式死背，考前背一背就行，早点记住更好（不难！不难！不难！）

④ 正态分布的各种性质非常重要，重要且好用！

☆隆重推出：$\boxed{\text{正态分布常用结论}}$ 设：r.v. $X \sim N(\mu,\sigma^2)$

则

(i) 概率密度曲线关于 $x=\mu$ 对称，当 $x<\mu$ 单增，$x>\mu$ 时单减，在 $x=\mu$ 处取最大值，以 $y=0$ 为水平渐近线.

▲ (ii) $Z=\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$（标准化，必会）▲

▲ (iii) 标准正态分布的分布函数用 $\Phi(x)$ 表示，有 $\Phi(0)=\frac{1}{2}$，$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$

(iv) 对于 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，有

▲ $F(x)=P\{X\le x\}=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

▲ $P\{a<X<b\}=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

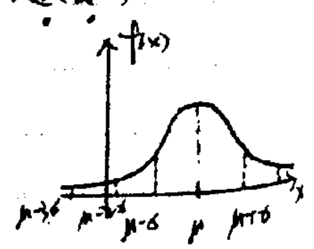
▲ $aX+b \sim N(a\mu+b, a^2\sigma^2)$ $(a\ne 0)$

★★★重磅 (v) "3σ"原则（常识！）（秒杀题目）

$P(\mu-\sigma<X\le\mu+\sigma)=68.3\%$

$P(\mu-2\sigma<X\le\mu+2\sigma)=95.4\%$

$P(\mu-3\sigma<X\le\mu+3\sigma)=99.7\%$



正态分布在 $(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$ 外面的取值概率不到 0.3%
几乎不可能发生，称为小概率事件.

（😀 kira说明：尽量把 68.3%，95.4%，99.7% 这三个数背下来
背不下没关系，对大小有概念就行.
马上秒杀一道真题 ⇩ ）

真题1 2013 数一、三 7题

设 X_1, X_2, X_3 是随机变量，且 $X_1 \sim N(0,1)$，$X_2 \sim N(0,2^2)$，$X_3 \sim N(5,3^2)$，$p_i = P\{-2 \le X_i \le 2\}$ $(i=1,2,3)$ 则

(A) $p_1 > p_2 > p_3$ (B) $p_2 > p_1 > p_3$

(C) $p_3 > p_1 > p_2$ (D) $p_1 > p_3 > p_2$

😀 kira带你飞：

（去年 12.14 左右时，很多同学在网上问我这道题，
我对这道题本来毫无印象，因为觉得太简单了……
从读题到出答案 20 秒足够）

[分析] 2 对于 X_1 是 2 个 σ，对于 X_2 是 1 个 σ，
对于 X_3 是不到 1 个 σ，所以自然有 $p_1 > p_2 > p_3$ *

（看 $f(x)$ 与 x 轴包围面积就可以了）

解题套路

● 常见题型如下：

一、分布律、分布函数、概率密度的概念及性质
（如：判断一个函数是否可作为分布函数/律/概率密度
已知是分布函数/律/概率密度，求未知参数）

二、分布律与分布函数的关系与转换

三、概率密度与分布函数的关系与转换

四、八个常用分布相关问题

五、一般类型随机变量的概率分布

六、一维随机变量函数的分布 $Y=g(X)$

一 分布律、分布函数、概率密度的概念及性质

1、判断一个函数是否可作为分布律/已知是分布律求未知参数

[套路] 用充要条件，即 $p_k \geq 0$，$\sum p_k = 1$

例1

设离散型随机变量X的分布律为 $P\{X=i\}=p^{i+1}$ $(i=0,1)$
确定p的值

解：

$$P\{X=0\}+P\{X=1\}=p+p^2=1 \quad \text{由规范性}$$

$$\Rightarrow p_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \quad p_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \ (\text{舍去})$$

▶2. 判断是否为分布函数 / 已知是分布函数求未知参数

[套路] P_{21} 充要条件 依次考虑 ①单调不减
②在实数域右连续 ③在0-1之间 $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$

真题2 1998 5.

设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 分别为随机变量 X_1 与 X_2 的分布函数,
为使 $F(x)=aF_1(x)-bF_2(x)$ 一定是某随机变量的分布函数
在下列给定各组数值中应取 (　　)

(A) $a=3/5$, $b=-2/5$　　(B) $a=2/3$, $b=2/3$

(C) $a=-1/2$, $b=3/2$　　(D) $a=1/2$, $b=-3/2$

[分析] (KIRA提示: "判 $F(x)$ 是否为分布函数" 要①②③都验,
"求未知参数" 为其选择题, 挑着验
$F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$ 最好用)

由 $F(+\infty)=1$, 有 $1=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=a\lim\limits_{x\to+\infty}F_1(x)-b\lim\limits_{x\to+\infty}F_2(x)$
$=a-b$　　选 (A)　※

补充 | 其它性质的验证:
① $F(x_2)-F(x_1)=\frac{3}{5}[F_1(x_2)-F_1(x_1)]+\frac{2}{5}[F_2(x_2)-F_2(x_1)]\geq 0$
② 因为 $F_1(x)$, $F_2(x)$ 均右连续, 所以 $F(x)$ 右连续

▶3. 求概率密度中的未知参数

[套路] P_{22} 充要条件 依次考虑: ① $f(x)\geq 0$ ② $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=1$

真题3. 2010 数一、三. 8

$f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度, $f_2(x)$ 为 $[-1,3]$ 上
均匀分布的概率密度, 若

$$f(x)=\begin{cases} a f_1(x), & x\le 0 \\ b f_2(x), & x>0 \end{cases} \quad (a>0,\ b>0)$$

为概率密度，则 a,b 应满足

(A) $2a+3b=4$　　(B) $3a+2b=4$

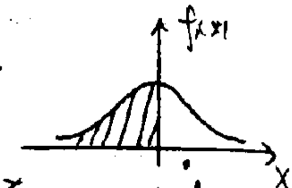
(C) $a+b=1$　　(D) $a+b=2$

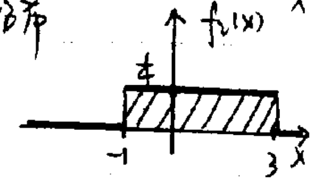
[分析] $1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = a\int_{-\infty}^{0} f_1(x)dx + b\int_{0}^{+\infty} f_2(x)dx$ ← 分段函数积分

$= \frac{1}{2}a + \frac{3}{4}b$　　选(A)

注：① $\int_{-\infty}^{0} f_1(x)dx=\frac{1}{2}$ 因为标准正态分布关于 $x=0$ 对称.

② $\int_{0}^{+\infty} f_2(x)dx$ 为 $[-1,3]$ 上的均匀分布 看图求面积





★ 因培养数形结合尤其是脑补图象的能力，$\frac{1}{2}$ 和 $\frac{3}{4}$ 应该是心算结果.

▶4. 分布函数 $F(x)$ 的概念深化理解　★★★ 必会!

例2

设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，用其表示下列概率

(1) $P\{a<X\le b\}$；(2) $P\{a<X<b\}$ (3) $P\{a\le X\le b\}$

解：

用分布函数定义 $F(x)=P\{X\le x\}$ 以及 $P\{X=a\}=F(a)-F(a-0)$

得 $P\{a<X\le b\}=P\{(X\le b)-(X\le a)\}=P\{X\le b\}-P\{X\le a\}=F(b)-F(a)$

$P\{a<X<b\}=F(b)-F(a)-P\{X=b\}$

$=F(b)-F(a)-[F(b)-F(b-0)]=F(b-0)-F(a)$

$P\{a\le X\le b\}=F(b)-F(a)+P\{X=a\}$

$=F(b)-F(a)+[F(a)-F(a-0)]$

（注 Kira强调：死守概念中的 $P\{X\le x\}$.）

三 分布律与分布函数的关系及转换

▶ 已知分布律求分布函数 / 已知分布函数求分布律

[套路] ① 已知分布律 $P\{X=x_k\}=p_k \quad (k=1,2,\cdots)$，
则 X 的分布函数 $F(x)=\sum_{x_k\le x} p_k$ （拉大括号，后面说）
② 已知 $F(x)$，且仅在 $x=x_k$ 有跳跃间断点，
（故判断为离散型）则 X 取 x_k，且 $P\{X=x_k\}=F(x_k)-F(x_k-0)$
$(k=1,2,\cdots)$

看一看例题便明白了

例3

离散型随机变量 $X\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0.5 & 0.3 & 0.2\end{pmatrix}$，求分布函数 $F(x)$ 并作出 $F(x)$ 的图象

[分析]

（ kira 解析：$F(x)$ 取遍 $(-\infty,+\infty)$ 故当 x 取任意实数都有意义，不妨做个小实验，取 $x=1.8$

$F(1.8)=P\{X\le 1.8\}=P\{X<1\}+P\{X=1\}+P\{1<X\le 1.8\}=0.5$，
$(=0+0.5+0=0.5)$ ）

解：[分段] → [拉大括号]

① 当 $x<1$ 时，$F(x)=0$

② 当 $1\le x<2$ 时，$F(x)=P\{X=1\}=0.5$

③ 当 $2\le x<3$ 时，$F(x)=P\{X=1\}+P\{X=2\}=0.8$

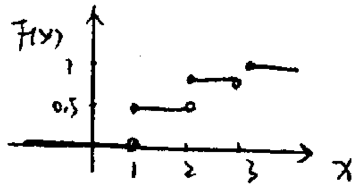
④ 当 $x\ge 3$ 时，$F(x)=P\{X\le x\}=P\{X=1\}+P\{X=2\}+P\{X=3\}=1$

综上，X 的分布函数

$$F(x)=P\{X\le x\}=\begin{cases}0, & x<1\\ 0.5, & 1\le x<2\\ 0.8, & 2\le x<3\\ 1, & 3\le x\end{cases}$$

（ kira 强调：
<1> 分段点看着分布律 $x=1,2,3$ 走；<2> X 分段区间左闭右开 ）

(3) 时刻记得大括号，第一行永远是0，最后一行永远是1，闭眼写。



(4) 图像画满 $(-\infty, +\infty)$，左实心点右空心点。

例4

设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ 0.1, & -1\le x<0\\ 0.6, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$$

求 X 的分布律。

解：观察 $F(x)$ 为阶梯函数，X 应为离散型随机变量 ← 推理一步

易知 X 的取值为 $-1, 0, 1$，且有 ← 与分段点完全同

$P\{X=-1\}=F(-1)-F(-1-0)=0.1-0=0.1$

$P\{X=0\}=F(0)-F(0-0)=0.6-0.1=0.5$

$P\{X=1\}=F(1)-F(1-0)=1-0.6=0.4$

所以分布律为

$$X\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0.1 & 0.5 & 0.4\end{pmatrix}$$

Kira备注：① $P\{X=x_k\}=F(x_k)-F(x_k-0)$，难吗？一点不难。前提是你左右极限计算没问题，不然什么写这个式子要行云流水，像连体婴一样！

② 把极限算好了，步步推来，以前搞死你的混合型 r.v. 的分布函数就搞不动你了。易 例2，再吃透！真题2010数一、三，了嘿~）

三 概率密度与分布函数的关系及转换

▶ 互推

[套路] ① 概率密度 $f(x)$ 是分段函数时，分段函数 $F(x)$ 也分段。

一般地，若连续型 r.v. X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} g(x), & a\le x<b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

则 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<a \\ \int_a^x g(t)\,dt, & a\le x<b \\ 1, & x\ge b \end{cases} \quad (*)$$

（Kira 备注：直接把(*)式糊在卷子上，段分得干干净净清清楚楚，(*)式一出题目已经做出来了。）

② 分布函数 $F(x)$ 连续且除去个别点外可导，则它为连续型 r.v. 的分布函数，求导即得概率密度 $f(x)$。

（*个别点 $f(x)$ 在保证有意义条件下可任意确定，因此分布函数不能唯一确定概率密度，但概率密度可唯一确定分布函数。）

例5

设连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} \frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & 0<x<1 \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求分布函数 $F(x)$。

解：

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \int_0^x \frac{2}{\pi\sqrt{1-t^2}}\,dt, & 0\le x<1 \\ 1, & 1\le x \end{cases} \Rightarrow F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{2}{\pi}\arcsin x, & 0\le x<1 \\ 1, & 1\le x \end{cases}$$

（Kira 备注：以原始公式为骨，干净清楚，计算完本书不

负责解决，请自行结合《kira高数考前宝典》大王小王篇解决。weibo：@kira言而信　淘宝店名：kira考研周边小铺）
（以上为防伪水印 ⌣）↑「请支持官方出品～」

例6

设连续型随机变量X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0 & , x<-a \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{a} & , -a\le x<a \\ 1 & , a\le x\end{cases}$$

求X的概率密度f(x)

解：

$$f(x)=\begin{cases}F'(x) & , -a<x<a \\ 0 & , 其他\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}} & , -a<x<a \\ 0 & , 其他\end{cases}$$

☆

四 八个常用分布相关问题

该部分问题唯一难点在于需理解试验背景，会自己列式一但式子列出，本质上还是利用P，F(x)，f(x)……的概念和性质做题。各参考书在此部分有大量例题，可多多练习，我只挑选自己觉得好的个别题作为例题。
（毕竟不作为单独做题重点）

真题4　2006 数一、三 14.　　　　（正态分布）

设随机变量X服从正态分布$N(\mu_1,\sigma_1^2)$，随机变量Y服从正态分布$N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且$P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\}$

则必有（ ）

(A) $\sigma_1<\sigma_2$　(B) $\sigma_1>\sigma_2$　(C) $\mu_1<\mu_2$　(D) $\mu_1>\mu_2$

解：（😊 果断标准化，利用标准正态分布函数性质）

由 $P\{|X-\mu_1|<1\} > P\{|Y-\mu_2|<1\}$

有 $P\left\{\frac{|X-\mu_1|}{\sigma_1} < \frac{1}{\sigma_1}\right\} > P\left\{\frac{|Y-\mu_2|}{\sigma_2} < \frac{1}{\sigma_2}\right\}$

$\Rightarrow 2P\left\{0<\frac{X-\mu_1}{\sigma_1}<\frac{1}{\sigma_1}\right\} > 2P\left\{0<\frac{Y-\mu_2}{\sigma_2}<\frac{1}{\sigma_2}\right\}$

$\Rightarrow 2\Phi(\frac{1}{\sigma_1})-1 > 2\Phi(\frac{1}{\sigma_2})-1 \Rightarrow \Phi(\frac{1}{\sigma_1}) > \Phi(\frac{1}{\sigma_2})$

由 $\Phi(x)$ 单调性，$\frac{1}{\sigma_1} > \frac{1}{\sigma_2} \Rightarrow \sigma_1<\sigma_2$ ☆

（😊 P26 正态分布常用结论，必须用得非常溜。做题时来回去随便找的地方~ ）

复题5　2013 数一 14

设随机变量Y服从参数为1的指数分布，a为常数且大于0，则 $P\{Y\le a+1 \mid Y>a\}=$ ___.

解：$P\{Y\le a+1 \mid Y>a\} = 1-P\{Y>a+1 \mid Y>a\} = 1-\frac{P\{Y>a+1, Y>a\}}{P\{Y>a\}}$

$= 1-\frac{P\{Y>a+1\}}{P\{Y>a\}} = 1-\frac{\int_{a+1}^{+\infty} e^{-t}dt}{\int_a^{+\infty} e^{-t}dt} = 1-\frac{e^{-(a+1)}}{e^{-a}} = 1-\frac{1}{e}$

故填 $1-\frac{1}{e}$

（以上解题过程每一步都可以在之前找到依据，没有新东西，难下来就是了 || 转化"≤"为">"思路）

😊 Kira备注：有能力的同学可以去看无记忆性：

设 $X\sim E(\lambda)$，当 $s,t>0$ 时，$P\{X>s+t \mid X>t\}=P\{X>s\}$

故本题可直接求解：

$$P\{Y\le a+1 \mid Y>a\} = 1-P\{Y>a+1 \mid Y>a\} = 1-P\{Y>1\} = 1-\frac{1}{e}$$

☆

▶一道帮助理解泊松分布，熟悉泊松分布的分布律，锻炼级数计算能力的题（争取自己能推下来）

例7.

假设一日内到过某商店的顾客数服从参数为 λ 的泊松分布，每客实际购货概率为 p，分别以 X 和 Y 表示一日内到过该商店的顾客中购货或不购货的人数，分别求 X 和 Y 的概率分布。

解：

由条件知，在一日内有 n 个顾客到过该店条件下 ← 自己大胆设 n

购货人数的条件概率分布为 ← 二项分布，"n个人中有m个人买"

$$P\{X=m \mid X+Y=n\} = C_n^m p^m (1-p)^{n-m} \quad (m=0,1,2,\cdots; n\ge m)$$

由全概率公式，对于 $m=0,1,2,\cdots$ 有

$$P\{X=m\} = \sum_{n=m}^{\infty} P\{X=m \mid X+Y=n\} P\{X+Y=n\}$$

$$= \sum_{n=m}^{\infty} C_n^m p^m (1-p)^{n-m} \left(\frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}\right)$$

⬇（级数计算环节）

$$= e^{-\lambda} \sum_{n=m}^{\infty} C_n^m p^m (1-p)^{n-m} \frac{\lambda^n}{n!} = \frac{(\lambda p)^m}{m!} e^{-\lambda} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{[(1-p)\lambda]^{n-m}}{(n-m)!}$$

想办法把 $\sum_{n=m}^{\infty}$ 换成 $\sum_{k=0}^{\infty}$ →

$$= \frac{(\lambda p)^m}{m!} e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} [(1-p)\lambda]^k = \frac{(\lambda p)^m}{m!} e^{-\lambda} e^{(1-p)\lambda}$$

$$= \frac{(\lambda p)^m}{m!} e^{-\lambda p}$$

可见，一日内到过该商店的顾客中购货人数 X 服从参数为 λp 的泊松分布。

同理，Y 服从参数为 $\lambda(1-p)$ 的泊松分布。☆

（😊 KITTY备注：先看懂再自己推一遍，非常爽！实在不会就算了）

▶ 一道帮助搞懂串联并联 指数分布，学会求 $\max\{X_i\}$ 和 $\min\{X_i\}$ 的题 （简单）

例 8

一电路装有三个同种电气元件，其工作状态相互独立，且无故障工作时间服从参数为 $\lambda>0$ 的指数分布。当三个元件都无故障工作时，线路工作状态正常，试求电路正常工作时间 T 的概率分布 $G(t)$

解：

设第 i 个元件正常工作时间为 X_i $(i=1,2,3)$，则

$$X_i \sim F(x) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$$

写 F(x) 为求 min，max 做好准备，直接用

坏一个即停止 → 由题设，$T=\min\{X_1,X_2,X_3\}$

① 当 $t\le 0$，$G(t)=P\{T\le t\}=0$

② 当 $t>0$，$G(t)=P\{T\le t\}=1-P\{T>t\}$

$$=1-P\{\min\{X_1,X_2,X_3\}>t\}$$

$$=1-P\{X_1>t,X_2>t,X_3>t\}$$

$$=1-P\{X_1>t\}P\{X_2>t\}P\{X_3>t\}=1-e^{-3\lambda t}$$

因此

$$G(t)=\begin{cases} 1-e^{-3\lambda t}, & t>0 \\ 0, & t\le 0 \end{cases}$$ ※

并联（全坏了才停止）：$t>0$ 时，$G(t)=P\{T\le t\}=P\{\max\{X_1,X_2,X_3\}\le t\}$

$$=P\{X_1\le t,X_2\le t,X_3\le t\}$$

$$=(1-e^{-\lambda t})^3$$

你有木有发现？？？！！！

不管是 P35 还是例 8，都喜欢把 $P\{X\le x\}$ 化为 $1-P\{X>x\}$，因为指数分布很有特色，$P\{X>x\}=1-F(x)=e^{-\lambda x}$，好求！漂亮！

建议收藏！

·BMBM·

▶ 一道帮助提高数学素养,理解泊松分布,学会在离散和连续间建立联系的题 (开发思维)

例9

假设大型设备在任何长度为 t 的时间内发生故障的次数 $N(t)$ 服从参数为 λt 的泊松分布

(1) 求相继出现两次故障之间时间间隔 T 的分布

(2) 设备在无故障工作8小时的情况下,再无故障工作16小时的概率

[分析] 😊 时间间隔 T 是连续型随机变量,而次数 $N(t)$ 则是离散的,在它们之间建立联系是需要对这个世界有深刻理解的!!! ▽▽

$\{N(t)=0\}$: t 时间内无故障发生

$\{T>t\}$: 两次故障出现的时间间隔大于 t

⇒ 事件 $\{N(t)=0\}$ 和 $\{T>t\}$ 等价

解: (1) $F(t)=P\{T\le t\}$ ← 起步就写概念! ·▽·◇ 永远不会错!且要明白自己在干嘛

① 当 $t\le 0$ 时, $F(t)=0$

② 当 $t>0$ 时, $P\{N(t)=k\}=\dfrac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}\ (k=0,1,2,\cdots)$

事件 $\{N(t)=0\}$ 和 $\{T>t\}$ 等价,

有 $F(t)=P\{T\le t\}=1-P\{T>t\}=1-P\{N(t)=0\}=1-e^{-\lambda t}$

即
$$F(t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t}, & t>0\\ 0, & t\le 0\end{cases}$$

T 是服从参数为 λ 的指数分布.

(2) $P\{T\ge 16+8 \mid T\ge 8\}=\dfrac{P\{T\ge 24\}}{P\{T\ge 8\}}=\dfrac{e^{-24\lambda}}{e^{-8\lambda}}$

$=e^{-16\lambda}$ ($=P\{T\ge 16\}$ 无记忆性) ✕

三 一般类型随机变量的概率分布

兼具有连续型和离散型随机变量特征的 r.v.
对概念理解要求很高，一般就是坑题！
没有概率密度，只有分布函数！死守不连续！

真题6 1997 11 ——— (重原因，罕见，有分量！)

假设随机变量 X 的绝对值不大于1，$P\{X=-1\}=\frac{1}{8}$，$P\{X=1\}=\frac{1}{4}$，在事件 $\{-1<X<1\}$ 发生的条件下，X 在 $(-1,1)$ 内任一子区间上取值的条件概率与该子区间长度成正比，试求 X 的分布函数 $F(x)$。

[分析]

kira套路：
- step1：把条件全部翻译成数学符号，看看手头有哪些可利用的工具
- step2：根据万年第一步 $F(x)=P\{X\le x\}$ 再转转脑子，一步步把结果套出来

(p.s. 分识条件概率，一定要想到全集分解)

解：(step1) $\boxed{\text{"直译"；"抄"条件；}}$

由题设：$P\{-1\le X\le 1\}=1$，$P\{X=-1\}=\frac{1}{8}$，$P\{X=1\}=\frac{1}{4}$

在 $-1<X<1$ 发生的条件下，X 的条件概率密度

$$f_X(x\mid -1<x<1)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

由倒数第2行题干判断是均匀分布，常识！

(step2)

$F(x)\triangleq P\{X\le x\}$

① $x<-1$ 时，$F(x)=0$

② $x\ge 1$ 时，$F(x)=1$

①②根据 X 绝对值不大于1判断，"$X\ge 1$"因为不连续，死守不连续就不会错

· BMDM ·

种族隔离！道不同不相为谋！

③ 当 $-1\le x<1$ 时，$F(x)=P\{X\le x\}=P\{X=-1\}+P\{-1<X\le x\}$

全集分解，精确"掌握"有用的区间

$=\frac{1}{8}+P\{-1<X\le x,\Omega\}$

$=\frac{1}{8}+P\{-1<X\le x,-1<X<1\}+P\{-1<X\le x,\overline{-1<X<1}\}$

乘法公式

$=\frac{1}{8}+P\{-1<X\le x|-1<X<1\}P\{-1<X<1\}$

$=\frac{1}{8}+\int_{-1}^{x}\frac{1}{2}dt\cdot(1-\frac{1}{8}-\frac{1}{4})$

$=\frac{1}{8}+\frac{5}{16}(x+1)$

综上，$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ \frac{5x+7}{16}, & -1\le x<1\\ 1, & 1\le x\end{cases}$ ※

（Kira备注：$P\{-1<X\le x\}$ 我们不直接可知，必须一步步把它框在已知条件下，才能自信大胆写。）

六 一维随机变量函数的分布 $Y=g(X)$

[套路]

离散型：根据 X 分布律和 $g(X)$ 即可写出 Y 的分布律（送分）

★ 连续型：

① 确定 Y 不为 0 的区间，把 $F_Y(y)=0$，$F_Y(y)=1$ 及其对应区间先写出。（区间不好确定时，$\boxed{作图}$！画出 Y 关于 X 的函数图象，$g(X)$ 不单调时一定要作图确定）

② 利用 $P\{g(X)\le y\}$，将 X 从 $g(X)$ 中解出，即得到 $P\{X\le y\}$ 即得到关于 y 的函数。

③ 求导得 $f_Y(y)$

妙用到没朋友❗

· BMDM ·

看二道有代表性的题

例10 （设难度，基本功）

设随机变量 X 的分布函数为

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<-2\\ 0.2, & -2\le x<-1\\ 0.35, & -1\le x<0\\ 0.6, & 0\le x<1\\ 1, & 1\le x\end{cases}$$

令 $Y=|X+1|$，求随机变量 Y 的分布律．

解：

（方法同P32 例4）易知 X 的分布律为 $X\sim\begin{pmatrix}-2 & -1 & 0 & 1\\ 0.2 & 0.15 & 0.25 & 0.4\end{pmatrix}$

X 与 Y 取值的对应关系为

X	-2	-1	0	1
Y	1	0	1	2

经计算 Y 的分布律为 $Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 0.15 & 0.45 & 0.4\end{pmatrix}$

其中 $P\{Y=0\}=P\{X=-1\}=0.15$，

$P\{Y=1\}=P\{(X=-2)\cup(X=0)\}=P\{X=-2\}+P\{X=0\}=0.45$

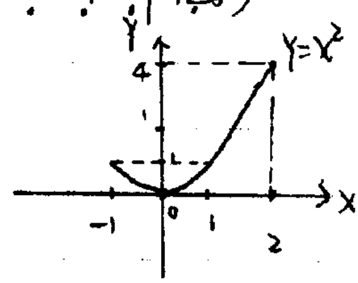
$P\{Y=2\}=1-P\{Y=0\}-P\{Y=1\}=0.4$

＃

例11

设 $X\sim f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1<x<0\\ \frac{1}{4}, & 0\le x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$，$Y=X^2$，求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$．

解：（step1 确定 Y 的区间，$Y=X^2$ 不单调，赶紧作图）



两句话 一方面的意识 → 当 X 在区间 $(-1,2)$ 上取值时，

Y 在区间 $(0,4)$ 上取值．

$F_Y(y)\triangleq P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}$

① 当 $y<0$，$F_Y(y)=0$

② 当 $y\ge4$，$F_Y(y)=1$

（step2．将 X 从 $g(x)$ 中解出）

③ $0\le y<1$ 时，$F_Y(y)=P\{X^2\le y\}=P\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}$

$$=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x)\,dx$$

这样就可以代到原题条件了

$$=\int_{-\sqrt{y}}^{0}\frac{1}{2}dx+\int_{0}^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}dx$$

$$=\frac{3}{4}\sqrt{y}$$

④ $1\le y<4$ 时，$F_Y(y)=P\{-1\le X\le\sqrt{y}\}$

$$=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}dx+\int_{0}^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}dx$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{y}$$

- $0\le y<1$ 时在对称区间 $(-\sqrt{y},\sqrt{y})$ 积分
- 而 $1\le y<4$ 时，0左侧积分定值 $\frac{1}{2}$，y只在右侧变化
- 要警惕!!!

综上，Y的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ \frac{3}{4}\sqrt{y}, & 0\le y<1\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{y}, & 1\le y<4\\ 1, & 4\le y\end{cases}$$

$\Rightarrow$ Y的概率密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{8\sqrt{y}}, & 0<y<1\\ \frac{1}{8\sqrt{y}}, & 1\le y<4\\ 0, & 其他\end{cases}$$

- 微调定义域：概率密度函数取值区分布在闭或开都可，但y做分母不可取0

★ Kira进阶：当 $Y=g(X)$ 为单调函数且反函数存在时，可直接将反函数代入 $F(x)$ 中求得Y的分布函数.

即 $y=g(x)$ $\begin{cases}单增且反函数存在，有 F_Y(y)=P\{X\le g^{-1}(y)\}=F_X(g^{-1}(y))\\ 单减且反函数存在，有 F_Y(y)=P\{X\ge g^{-1}(y)\}=1-F_X(g^{-1}(y))\end{cases}$

以下题为例，我们用两种方法解出 $Y=g(X)$ 的分布.

真题7 2003 11

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & 若\ x\in[1,8]\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$F(x)$ 是 X 的分布函数，求随机变量 $Y=F(X)$ 的分布函数

解：

〈法一〉（P40 & 例11 设类方法）

求得

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx=\begin{cases}0, & x<1\\ \sqrt[3]{x}-1, & 1\le x<8\\ 1, & 8\le x\end{cases}$$

Again 确定Y不为0的区间

设 $Y=F(X)$ 的分布函数为 $F_Y(y)$，当X在区间[1,8)上取值时，Y在区间[0,1)上取值。

$F_Y(y)\triangleq P\{Y\le y\}=P\{F(X)\le y\}$

① $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$． ② $1\le y$ 时，$F_Y(y)=1$

反解"X≤" ③ 当 $0<y<1$，$F_Y(y)=P\{\sqrt[3]{X}-1\le y\}=P\{X\le(y+1)^3\}$

$$=F[(y+1)^3]=\sqrt[3]{(y+1)^3}-1=y$$

综上，

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ y, & 0\le y<1\\ 1, & 1\le y\end{cases}$$

（☺ Kira感叹：比较上面的步骤和例11，讲真概统把典型题做会后题跟复制粘贴似的。）

〈法二〉 $y=F(x)$ 的反函数 注意y范围

$$g^{-1}(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ (y+1)^3, & 0\le y<1\\ 1, & 1\le y\end{cases}$$

$F(x)$是单增函数（由P42下方公式）

$$F_Y(y)=F_X(g^{-1}(y))=\begin{cases}0, & y<0\\ \sqrt[3]{(1+y)^3}-1, & 0\le y<1\\ 1, & 1\le y\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & y<0\\ y, & 0\le y<1\\ 1, & 1\le y\end{cases}$$

#

（kira备注：反函数运用熟练的同学在法一学会做的基础上可以记忆一下此法，非常快！）

★ kira带你千伐决断：

型如：已知概率密度 $f_X(x)$，$Y=g(X)$，求Y的概率密度

遇这种题你原路是？$f_X(x)\to F_X(x)\to F_Y(y)\to f_Y(y)$？

可以，但太麻烦了！我：直接找 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$ 的关系。

▸ 举例：

例12 —— （step1不变，习惯性动作，step2议一下）

设随机变量 $X\sim U(-1,2)$，求 $Y=|X|$ 的概率密度

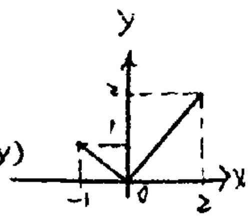
解：由 $X\sim U(-1,2)$，有

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & -1<x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$$

第二遍：确定y的区间

当 X 在 $(-1,2)$ 取值时，Y 在 $[0,2)$ 取值

$F_Y(y)=P\{|X|\le y\}=P\{-y\le X\le y\}=F_X(y)-F_X(-y)$



★ $f_Y(y)=F_Y'(y)=F_X'(y)-F_X'(-y)=f_X(y)+f_X(-y)$

① 当 $0<y<1$ 时，$f_Y(y)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

② 当 $1<y<2$ 时，$f_Y(y)=\frac{1}{3}+0=\frac{1}{3}$

③ 当 $y\le 0$ 或 $y\ge 2$ 时，$f_Y(y)=0$.

（kira备注：分段原理与例11一毛一样！）

综上，$Y=|X|$ 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{3}, & 0<y<1\\ \frac{1}{3}, & 1<y<2\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

※

最后，我们回到P9「Kira挑战」的问题

1. 是的.
2. 对连续型 r.v. 成立，对离散型 r.v. 不一定，见P30 例2.
3. 不一定（连续型 r.v. 一定）；一定单调.
4. 不一定连续，但一定在 $(-\infty, +\infty)$ 可积
5. P23
6. 是的.
7. 从 $F(x)$ 着手.
8. P26.
9. P26-27.

你有收获吗？咻咻~

·BMDM·

第三章 多维随机变量及其分布

P47 "kira挑战"先问自己一遍

答案在P84，然后哪里不会点哪里~

占分降点（很多宏观和微观的东西，建议排着过）

P47 kira前言

P48-P53 知识结构（注意找样的"先求""后视"）

P54 题型扫一眼

▲ 结合P51阅读P57

P58-P60 训练思维 例13+kira补充

P63 kira备注

P64 例6 P66 kira备注

P67 波浪线

P68 kira再讲解 求$f_Y(y)$三步走

▲ P72-P73 $Z=g(X,Y)$分布函数法 +例9

▲ P74-P77 卷积公式 大讲解. "蹭身"思维 P75

P77-P84 都了解一下~

Kira前言：

多维随机变量分布每年必考一道大题，其中求$Z=g(X,Y)$的分布函数$F_Z(z)$是重难点（且多同学找我求救），另外(X,Y)两分量间独立性，及不独立时的条件概率分布也是高频考点。

在本章我将带你疏通各种概念及套路，但请你先问自己2个问题：

① 我第二章吃透了吗？甚至，第一章吃透了吗？
② 我高数二重积分真的懂吗？求得熟练吗？图都会画吗？能读懂图是什么意思吗？

我写本章时，默认以上两个答案是肯定的，任何一个问题答案是否定的，则你学本章将极不自信且脑子糊涂。计算问题找《高数葵花宝典》，概念问题，好好过前两章。

Kira挑战

1. 二维连续型随机变量(X,Y)的：
① 联合分布函数式中x,y能否同时出现？写取值范围吗？
② 边缘分布函数式中x,y能否同时出现？写取值范围吗？
③ 条件分布函数式中x,y能否同时出现？写取值范围吗？
2. 除用定义外，判X,Y独立 ①能否用分布函数$F_X(x)F_Y(y)=F(x,y)$对$\forall x,y$成立？②能否用概率密度$f_X(x)f_Y(y)=f(x,y)$对$\forall x,y$成立？
3. 卷积公式求$F_Z(z)$怎么玩？式子怎么列？区间怎么划？
4. 我应先求概率密度还是分布函数？

5. 用分布函数法求 $F_Z(z)$，怎么平移？怎么划区间？
6. 离散型 r.v. 与连续型 r.v. 之和可能是连续型 r.v. 吗？
7. 有限个独立随机变量最大值/最小值分布怎么求？

Kira 希望你养成的好习惯

1. 学会写标准的规范化的步骤（有利于把题做下去）（李永乐的《真题解析》步骤非常标准，我将以之为参照来写例题步骤）
2. 抓住最最基本的概念和定义不撒手，并呈现于卷面上。
3. 依旧随手分段，写大括号！讨论区间！

基础概念 & 必备常识（对象：二维 r.v. (X, Y)）

▶ 对三种分布 {联合分布、边缘分布、条件分布} 研究三个内容 {分布函数、离散型分布律、连续型概率密度}

它们之间的关系大家可以看看我附录后一页的框架，非常清楚！此处我着重阐述具体概念和性质，然后带大家过题型套路。

一 联合分布

设二维 r.v. (X, Y)，则二元函数 $F(x, y) = P\{X \le x, Y \le y\}$ $(-\infty < x, y < +\infty)$ 称为二维随机变量 (X, Y) 的（联合）分布函数

▶ 性质：
① $F(x,y)$ 关于 x 和 y 均单调不减
（类比一维） ② $0 \le F(x,y) \le 1$，且固定 x、y 时，有 $F(x, -\infty) = 0$，$F(-\infty, y) = 0$

$F(-\infty,-\infty)=0$, $F(+\infty,+\infty)=1$

③ $F(x,y)$ 右连续，即 $F(x+0,y)=F(x,y)$，$F(x,y+0)=F(x,y)$

④ 非负性，对 $\forall x_1<x_2,\ y_1<y_2$ 有 $P\{x_1<X\le x_2,\ y_1<Y\le y_2\}$
$=F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)$

▲

离散型：
- 联合分布律 $P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}\ (i,j=1,2,\cdots)$
  - 非负性 $p_{ij}\ge 0$
  - 规范性 $\sum\limits_i\sum\limits_j p_{ij}=1$
- 联合分布函数 $F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}=\sum\limits_{x_i\le x}\sum\limits_{y_j\le y}p_{ij}$

连续型：
- 联合分布函数 $F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\,du\,dv$
- 联合概率密度 $f(x,y)$
  - 非负性：$f(x,y)\ge 0$
  - 规范性：$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx\,dy=1$
  - 在$F(x,y)$连续点处有 $\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$

Kira备注：

① 以上是我分类整理本章内容的结构，所有原始定义式必须信手拈来，做题有掌握，万变不离其宗。

② 在写边缘&条件分布前，我先来直观解释一下这三个概念：
- 联合：联合分布函数$F(x,y)$指$\{X\le x\}$和$\{Y\le y\}$同时发生的概率
- 边缘：只研究其中一个变量，如$F_X(x)$我们只研究X，撇开Y.
- 条件：固定其中一个变量，研究另一个变量在此条件下的分布。如固定$Y=y$（即Y不变了，严格等于一个常数），此时求X的分布

▶注意，对于$f(x,y)$，我们有 $P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy$ 这是求随机变量函数（所谓$F_Z(z)$）时的重要依据，如 $P\{X+Y>1\}=\iint\limits_{x+y>1}f(x,y)\,dx\,dy$
（详见P57）

(😊 解题都是有依据的，紧抓依据，步步推进精准，结果都是自然而然得来的)

三 边缘分布（在二维随机向量，但运算性质与一维同，回到第二章）

关于X的边缘分布函数：$F_X(x)=F(x,+\infty)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)$

关于Y的边缘分布函数：$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)$

离散型
- 边缘分布律：$p_{i\cdot}=\sum_j p_{ij}\ (i=1,2,\cdots)$【看表格，把j=i的$p_{ij}$全加起】（关于X的↑）（关于Y的 $p_{\cdot j}=\sum_i p_{ij}$）
- 边缘分布函数 $\begin{cases} F_X(x)=\sum_{x_i\le x}p_{i\cdot}=\sum_{x_i\le x}\sum_j p_{ij} \\ F_Y(y)=\sum_{y_j\le y}p_{\cdot j}=\sum_{y_j\le y}\sum_i p_{ij}\end{cases}$ $\boxed{\text{不用记，看分布律表格好说！}}$

连续型
- 边缘概率密度（先求↑）$\begin{cases} f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy \\ f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx\end{cases}$ "求谁不积谁"
- 边缘分布函数（后求↑）$\begin{cases} F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f_X(x)\,dx \\ F_Y(y)=\int_{-\infty}^{y}f_Y(y)\,dy\end{cases}$

😊 kira备注：

▲ 1. 做大题时，先求 $f_X(x)$，$f_Y(y)$，再求 $F_X(x)$，$F_Y(y)$，一步步来，有序！有序！有序！

2. 已知 $f(x,y)$ 求 $f_X(x)$ 时，"求谁不积谁"，积出来还是概率密度，只是变成一维。再求 $F_X(x)$ 时，是积x（本质是上一章内容），积出来是分布函数。

三 条件分布

离散型（不背，会读表格）

- 条件分布律
  - $X=x_i$ 条件下，Y 的 $P\{Y=y_j|X=x_i\}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}$ $(j=1,2,\cdots)$
  - $Y=y_j$ 条件下，X 的 $P\{X=x_i|Y=y_j\}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$ $(i=1,2,\cdots)$
- 条件分布函数（和一维一样算）
  - $F_{Y|X}(y|x_i)=\sum_{y_j\le y}P\{Y=y_j|X=x_i\}$
  - $F_{X|Y}(x|y_j)=\sum_{x_i\le x}P\{X=x_i|Y=y_j\}$

连续型

- 条件概率密度（先求↑）
  - 固定 x，$f_X(x)>0$，则在 $X=x$ 条件下，Y 的：
    $f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$ ← 和二求一姐妹花
  - 固定 y，$f_Y(y)>0$，则在 $Y=y$ 条件下，X 的：
    $f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$
- 条件分布函数（对密度积分）（后求↓）
  - $F_{Y|X}(y|x)=P\{Y\le y|X=x\}=\int_{-\infty}^{y}f_{Y|X}(y|x)dy$
  - $F_{X|Y}(x|y)=P\{X\le x|Y=y\}=\int_{-\infty}^{x}f_{X|Y}(x|y)dx$

Kira点拨：

▲① 二维与一维在求解顺序上有个非常大的区别：（拍黑板）一维我们通常跟据定义 $F(x)=P\{X\le x\}$ 先求分布再求密度。但二维，反了！我们少用定义了！求边缘，求条件，都先用概率密度求概率密度，再积分得分布函数。

★ 各种定义式、关系式都用概率密度给的，显然用密度更吃得开。

② $F_{Y|X}(y|x)$ 这个式子很多人麻木，Y、X 这两个字母完全不同！首先，这是一元函数，Y 是唯一变量，X 是死的，X 死了！事实上，本质上 X 只是个常数而已，本质上可以写成 $F_{Y|X}(y|x_0)$，$F_{Y|X}(y|250)$…

四 独立性

若对任意的实数 x, y，有 $P\{X\le x, Y\le y\} = P\{X\le x\}P\{Y\le y\}$，称随机变量 X 与 Y 相互独立。

离散型：X 与 Y 相互独立 $\Leftrightarrow$ $p_{ij} = p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j}$ $(i,j=1,2,\cdots)$.

X 与 Y 相互独立 $\Leftrightarrow$ $F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$，$\forall x,y$.

连续型：X 与 Y 相互独立 $\Leftrightarrow$ $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$，$\forall x,y$.

Kira 备注：

① 即判独立时，分布律，分布函数，概率密度都能用，放心大胆用

② 对于离散型随机变量 (X,Y)，先默认不独立并找反例，只要能举出一个反例即不独立；对于离散型 X 和连续型 Y，可利用定义式，即 $P\{X=x_i, Y\le y\} = P\{X=x_i\}P\{Y\le y\}$ 来判别，仍先举反例（取合适的 x_i 和 y）；对于连续型 (X,Y) 依次求出在某一区域的 $f(x,y)$，$f_X(x)$，$f_Y(y)$ 再进行判断（先举反例）

③ 反例：

- 离散型：存在某 x_i, y_j 使 $P\{X=x_i, Y=y_j\} \ne P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}$ 则不独立
- 连续型：存在某区域 D，使当 $x,y\in D$ 时，$f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$ 则 X,Y 不独立

五 二维均匀分布（会根据题设列式）

称 (X,Y) 在平面区域 D 上服从均匀分布，若 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{S_D}, & (x,y)\in D \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

注意：二维均匀分布的边缘分布未必是均匀分布，与区域形状有关
如圆域的均匀分布二维随机变量，其边缘分布均不服从均匀分布

六 二维正态分布

如果 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

其中 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 为常数，$\sigma_1>0$，$\sigma_2>0$，$-1<\rho<1$ 则称 (X,Y) 服从二维正态分布，记为 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$

Kira 支招：$f(x,y)$ 多看几眼，能认出，尽量找规律背下来。
背不下就算了，但要认出 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$
出题以考察 X、Y 独立时性质为主 $(\rho=0)$，
要知道，二维正态分布是很强的条件！

当 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ 有

① $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，$\rho$ 为 X 与 Y 的相关系数

② X、Y 的条件分布都是正态分布

③ $aX+bY$ $(a\neq0$ 或 $b\neq0)$ 服从正态分布

★④ X 与 Y 独立 $\Leftrightarrow$ X 与 Y 不相关，即 $\rho=0$

七 二维随机变量函数分布 $Z=g(X,Y)$

离散型 $P\{Z=z_k\}=\sum\limits_{g(x_i,y_j)=z_k}p_{ij}\quad(k=1,2,\cdots)$

（即 $P\{Z=z_k\}$ 是函数值为 z_k 的 (X,Y) 取值点对应概率之和）

连续型 $F_Z(z)=P\{g(X,Y)\le z\}=\iint\limits_{D_z}f(x,y)\,dx\,dy$

解题套路 (各解法框架见附录P6－P10)

● 常见题型依次如下：

一、判别是否为二维随机变量联合分布函数/分布率/概率密度

二、求二维随机变量联合分布的未知参数

三、求二维随机变量的联合分布函数 (难点：如何分段定限)

四、求离散型联合分布律

五、已知联合分布，求边缘分布 (题目给什么联合函数，就直接用该函数求边缘)

六、已知联合分布，求条件分布 (求完条件分布表达式再代值 "特别地，"…)

七、已知边缘、条件等相关条件，求联合分布 (知二求一)

八、独立性判别

★ 九、随机变量函数的概率分布

十、有限个相互独立随机变量最大值与最小值的概率分布

一、判别是否为二维随机变量联合分布函数/分布率/概率密度

[套路] ① 一般情况下，判F(x,y)是否为某(X,Y)分布函数，用P48性质，全部满足即是，有一条不满足即否

② 判是否为离散型r.v.分布律：考虑非负性 $P_{ij} \geq 0$，加规范性 $\sum\sum P_{ij}=1$，同时具备即是。

③判定是否为连续型r.v.联合概率密度，考虑非负性 $f(x,y)\geq 0$ 和规范性 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$，同时具备即是

（kira备注：该题型单独出题计算麻烦且意义不大，通常以题型三方式考察并作为大题第一问（送分））

三 求二维随机变量联合分布的未知参数

[套路] 同题型一.

真题1 2005 数一、三 13

设二维随机变量(X, Y)的概率分布为

X \ Y	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知随机事件 $\{X=0\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 相互独立，则 $a=?$, $b=?$

解：

由规范性 $0.4+a+b+0.1=1 \Rightarrow a+b=0.5$ ①

$P\{X=0\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=0,Y=1\}=0.4+a$

$P\{X+Y=1\}=P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}=a+b$

由独立 $P\{X=0,X+Y=1\}=P\{X=0,Y=1\}=a=(0.4+a)(a+b)$ ②

联立①② $\Rightarrow$ $a=0.4$, $b=0.1$

（kira备注：对于基础不太好的同学，我再教下这个表的用法和如何理解这些式子，第二行 $P\{X=0\}$ 就是把所有 $X=0$ 的概率加起来（边缘分布），即第一行 $0.4+a$；第三行求 $P\{X+Y=1\}$，即找全所有 $X+Y=1$ 的格子，显然 $X=0,Y=1$ 或 $X=1,Y=0$；第四行 $P\{X=0,X+Y=1\}$，事件同时满足 $X=0$, $X+Y=1$ 显然将推出 $Y=1$

同理，对于混合型变量来说，这样理解本质的思想非常重要
假如有 $P\{X+Y\le 3 \mid X=1\}$，要会写成 $P\{Y\le 3-1 \mid X=1\}$，
因为X就是等于1啊～ 这就是抓住本质了。)

例1

设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} A(6-x-y), & 0<x<2,\ 2<y<4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 确定常数 A

(2) 求 $P\{X<1,Y<3\}$，$P\{X+Y<4\}$

解：

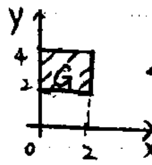
(1) 由联合概率密度的规范性有

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy$$

只有这一行用到概率论，剩下全是高数功底！

$$=A\int_0^2\int_2^4 (6-x-y)\,dy=8A$$

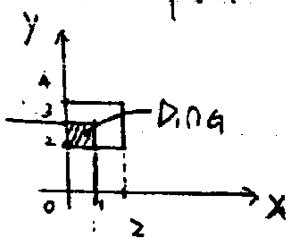
解得 $A=1/8$



读完题立刻画正概率区域G

(2) $P\{X<1,Y<3\}=\iint\limits_{x<1,y<3} f(x,y)\,dx\,dy$

闭眼套用下方公式

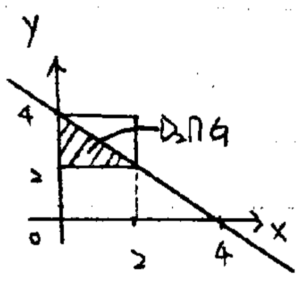


$$=\iint\limits_{D_1\cap G}\frac{1}{8}(6-x-y)\,dx\,dy$$ （其中 $D_1=\{(x,y)\mid x<1,y<3\}$）

$$=\frac{1}{8}\int_0^1 dx\int_2^3 (6-x-y)\,dy=\frac{3}{8}$$

$P\{X+Y<4\}=\iint\limits_{x+y<4} f(x,y)\,dx\,dy$

和上一个一样



$$=\iint\limits_{D_2\cap G}\frac{1}{8}(6-x-y)\,dx\,dy$$

此行之后是高数功底！

$$=\frac{1}{8}\int_0^2 dx\int_2^{4-x}(6-x-y)\,dy=\frac{2}{3}$$

☆ $\boxed{\text{Kira 重大讲解（把 } P\{(X,Y)\in D\} \text{ 题型说透）}}$ 如 $P\{X>2Y\}$ $P\{X+Y<4\}$

▶ ① 首先，再次强调本书不负责教二重积分计算，找区域，列二重积分，化累次积分，计算方法与技巧请自行解决或寻求《Kira高数考前宝典》的帮助（「大识编」之不定积分定积分，「4A编」之二重积分）

▶ ② 第(2)问我的计算步骤严格分三步走，考试卷面只留此三步即可：

Step 1. 列原始公式 $P\{(X,Y)\in D\}=\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$

（注意：此时积分区域D是 $f(x,y)$ 定义域，被积函数也须且只须写 $f(x,y)$，$f(x,y)$ 是包括正概部分和0概部分的！）

Step 2. 抓取正概部分，锁定积分区域（区域找法P69"Kira再讲解"）

（注意："抓取"和"锁定"二词我认为自己表达得十分精准✓

此处的 $f(x,y)$ 已被换成 $\frac{1}{8}(6-x-y)$ 了！

注意 $\frac{1}{8}(6-x-y)$ 并不是 $f(x,y)$，而是 $f(x,y)$ 的正概部分，所以对应区域也是正概区域（$D\cap G$），0全部扔掉!!!）

Step 3. 把粗略的二重积分式写成准确的累次积分式

（这是二重积分高手找区域和列式是重点，写出这一步一方面便于阅卷人给分，另一方面主要是为自己计算提供便利，这一步写对题目十之八九就已做出来了！100

③ 请仔细结合P36例1阅读②，深刻体会其中的道理，其对于深刻理解后续题型，尤其一步步排出见所未见的题是十分有帮助的。术有万千，而道不变！

三 求二维随机变量的联合分布函数（已知分布律/已知$f(x,y)$）

离散型 ·（作图过程看起来复杂，但其实有理有条，思想很全面，有序）

·（考试不太考，意思不大，但思想性十分有借鉴意义）

【套路】已知分布律：①画图，把所有取值点点出来

②再跟据分段点画┐口矩形，求套住点的和

例2.

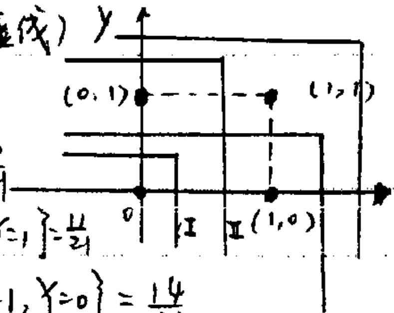
设二维随机变量(X,Y)的联合分布律为

X \ Y	0	1
0	7/21	4/21
1	7/21	3/21

求(X,Y)的联合分布函数$F(x,y)$

解：画出所有可能取值点$(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)$，

因此将平面划分为五个区域（虚线）



① 当$x<0$或$y<0$时，$F(x,y)=0$；

② 当$0\le x<1,\ 0\le y<1$时，$F(x,y)=P\{X=0,Y=0\}=\frac{7}{21}$

③ 当$0\le x<1,\ y\ge 1$时，$F(x,y)=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=0,Y=1\}=\frac{11}{21}$

④ 当$x\ge 1,\ 0\le y<1$时，$F(x,y)=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=1,Y=0\}=\frac{14}{21}$

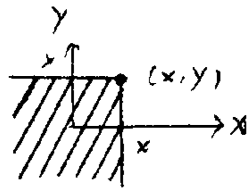
⑤ 当$x\ge 1,\ y\ge 1$时，$F(x,y)=1$

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0\text{或}y<0\\ \frac{7}{21}, & 0\le x<1,\ 0\le y<1\\ \frac{11}{21}, & 0\le x<1,\ y\ge 1\\ \frac{14}{21}, & x\ge 1,\ 0\le y<1\\ 1, & x\ge 1,\ y\ge 1\end{cases}$$

☆

（kira讲解：由$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}$，画在平面直角坐标系中

即是以(x,y)为顶点的左下矩形



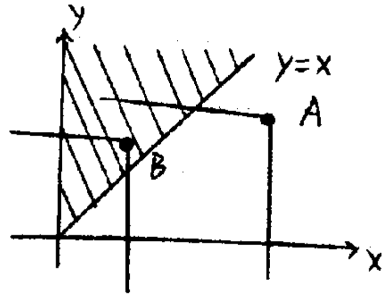
我们处理该问题的$\boxed{\text{合理依据}}$为
该左下矩形(阴影部分)套住的取值点的情况分几种

务必要依次全面考虑，对于连续情形也是如此。
比如，$x<0$，或$y<0$时，左下矩形套不住任何点，$F(x,y)=0$。
当$0\le x<1$，$0\le y<1$时，左下矩形Ⅰ套住左下角$(0,0)$点，$F(x,y)=\frac{7}{21}$.
当$0\le x<1$，$y\ge 1$时，左下矩形Ⅱ套住左边两个点$(0,0)$和$(0,1)$，$F(x,y)=\frac{7+4}{21}$
依此类推，熟练画图，熟练查表。)

▶ $\boxed{\text{连续型}}$ (以离散型和P门讲解为讨论铺垫)

[套路] 已知概率密度$f(x,y)$
① 画出正概区域(边界线画清楚，阴影标清楚)
将平面分割成N个区域
② 在每个区域内利用定义$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}ds\int_{-\infty}^{y}f(s,t)\,dt$.
(注意：画正概区域画的是区域，不要管$f(x,y)$函数式，不要被它吓住，被它混淆视听！)

例3
已知二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为
$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(x+y)}, & 0<x<y\\ 0, & 其他\end{cases}$$
求(X,Y)的联合分布函数$F(x,y)$



解：画出正概区域如图。
① 当$x<0$，或$y<0$时，显然，$F(x,y)=0$
② 当$0\le y\le x$时，(如图中A)
$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}ds\int_{-\infty}^{y}f(s,t)\,dt$ ← $\boxed{\text{套路②的原始公式}}$

$$=2\int_0^y e^{-t}dt\int_0^t e^{-s}ds=1-2e^{-y}+e^{-2y},$$

高数功底
敢于克服二重积分
Be Brave!

③ 当 $0\le x<y$ (如图中B)，有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}ds\int_{-\infty}^{y}f(s,t)dt=2\int_0^x e^{-s}ds\int_s^y e^{-t}dt$$
$$=1-2e^{-y}-e^{-2x}+2e^{-(x+y)}$$

综上，(X,Y) 的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0 \text{ 或 } y<0\\ 1-2e^{-y}+e^{-2y}, & 0\le y<x\\ 1-2e^{-y}-e^{-2x}+2e^{-(x+y)}, & 0\le x<y\end{cases}$$

Kira帮帮忙：

- ① 如何自信有序地分类讨论？秘诀：先画图再写字。自己先好好把这图象，移动了D矩形，再照着图把 x、y 的分段取值"抄"上
- ② $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}ds\int_{-\infty}^{y}f(s,t)dt$ （相当于P57 step1）
  $=2\int_0^x e^{-s}ds\int_s^y e^{-t}dt$ （相当于P57 step2 和3.）
  最终计算二重积分的区域是"$f(x,y)$ 的正概率区域与了D矩形的公共部分"在这个公共区域上关于 $f(x,y)$ 算二重积分.
- ③ 先确定顶点 (x,y) 再顺势画了D矩形，再思考一下为何 A 代表 $0\le y\le x$，B代表 $0\le x<y$（提示：代特值）.
- ④ 为什么要以 $0\le x<y$ 和 $0\le y\le x$ 为划分？因为它们的区域完全不同，天壤之别。A（即 $0\le y<x$）确定的区域是三角形，$t=y$ 确定而 s 上限受边界 $y=x$ 限制而变，所以积分限为 $\int_0^y dt\int_0^t \cdots ds$（解释后积 t，因为 y 确定（y 相当常数），先积 s，且 s 从0积到 t……二重积分知识点到为止）；B（即 $0\le x<y$）确定的区域是梯形，$s=x$ 确定，而 t 的积分下限受边界 $y=x$ 限制，有 $t=s$，所以积分限 $\int_0^x ds\int_s^y \cdots dt$. 结合P59图象和二重积分知识好好理解！

四 求二维离散型随机变量的联合分布律

[套路] ①先确定 (X,Y) 的可能取值

②再由题设确定 (X,Y) 在各个可能值的概率 ←做真题大题的重要思想.

例4

设事件 A.B 满足 $P(A)=\frac{1}{4}$, $P(B|A)=P(A|B)=\frac{1}{2}$, 令

$X=\begin{cases}1, & A\text{发生}\\0, & \bar{A}\text{发生}\end{cases}$　　$Y=\begin{cases}1, & B\text{发生}\\0, & \bar{B}\text{发生}\end{cases}$

试求 (X,Y) 的联合分布律.

解: 由题设有

$P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{8}$,

$P(B)=P(AB)/P(A|B)=\frac{1}{4}$

←(X,Y) 取值一目了然, 直接进入②确定概率环节, 一上手先充分梳理已知条件得出尽可能多的结论.

(X,Y) 的可能取值点为 $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$

$P\{X=0,Y=0\}=P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)=\frac{5}{8}$

$P\{X=0,Y=1\}=P(\bar{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{8}$

$P\{X=1,Y=0\}=P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{8}$

$P\{X=1,Y=1\}=P(AB)=\frac{1}{8}$

故 (X,Y) 的联合分布律为

X \ Y	0	1
0	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Kira备注:

离散型确定概率时, 一定要考虑实际意义与随机变量 X, Y 之间的联系

如 X=1 等同于 A发生 ——

做"离散及连续"真题大题的重要思想! ★

五 已知联合分布, 求边缘分布

题目给出联合函数就直接用该函数求边缘. (最快)

[套路] ① 由联合分布函数. $F_X(x)=F(x,+\infty)$, $F_Y(y)=F(+\infty,y)$

② 由联合分布律：$p_{i\cdot}=\sum_j p_{ij}$ $(i=1,2,\cdots)$，$p_{\cdot j}=\sum_i p_{ij}$ $(j=1,2,\cdots)$

③ 由联合概率密度：$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$

▶ 离散型

把每行每列的 p_{ij} 加到边边就是边缘分布律啦~

例如 例4 中的分布律

X \ Y	0	1	$P\{X=x_i\}$
0	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
$P\{Y=y_j\}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

（Y的边缘分布律）

（X的边缘分布律）

▶ 连续型

例5

设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(1+\sin x\sin y)\quad(-\infty<x,y<+\infty)$$

求关于X和关于Y的边缘概率密度

解：

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$$

常见错误，"求谁不积谁" "不积先定限 $\int_{-\infty}^{+\infty}$"

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(1+\sin x\sin y)dy$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}dy+\sin x\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}\sin y\,dy\right)$$

因为 $|\sin y\,e^{-\frac{y^2}{2}}|\le e^{-\frac{y^2}{2}}$ 而 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}dy=\sqrt{2\pi}$ 收敛，

所以 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}\sin y\,dy$ 绝对收敛，又 $e^{-\frac{y^2}{2}}\sin y$ 为奇函数，

所以 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}\sin y\,dy=0$，有

$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ $(-\infty<x<+\infty)$，即 $X\sim N(0,1)$

同理 $f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$ $(-\infty<y<+\infty)$，即 $Y\sim N(0,1)$

★ Kira备注：

① 本题中 $f_Y(y)$ 不需另求，照着 $f_X(x)$ 抄写即可，因为由 $f(x,y)$，x 和 y 的地位完全相同

② $\int_{-\infty}^{+\infty}$ 不是对称区间，千万千万不要试图用奇偶性，判断后若收敛则可以用奇偶性。

③ 计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$ 时用到了重要结论 $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$ 背

所以 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 2\sqrt{2}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} d\frac{y}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{2\pi}$

（由收敛 + 偶函数 + 重要结论）

六 已知联合分布，求条件分布（P51 ②再看看）

[套路] ① 已知联合分布律，对于固定 x_i，若 $P\{X=x_i\}>0$，则在 $X=x_i$ 条件下，Y的条件分布律为

$$P\{Y=y_j \mid X=x_i\} = \frac{P\{X=x_i, Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}} \quad (j=1,2,\cdots)$$

同理 X 的条件分布律为

$$P\{X=x_i \mid Y=y_j\} = \frac{P\{X=x_i, Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}} \quad (i=1,2,\cdots)$$

（Kira备注：以上公式不必死记，会看着分布律表格求数值即可，so easy！）

② 已知联合概率密度，对于固定 x，$f_X(x)>0$，则在 $X=x$ 条件下，Y的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

同理，Y的条件分布律为（在 $Y=y$ 条件下）

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

（Kira备注：该公式在 $X=x$（$Y=y$）的条件下使用，必须严格等于，$P\{X=1 \mid Y\le\frac{1}{2}\}$ 这种要用定义

积分来求，见例6）

▶ 离散型

例 如P6)分布律表格. 求在 $X=0$ 的条件下，Y 的条件分布律.

[分析]

因为 $P\{X=0\}=\frac{3}{4}>0$ 所以

$$P\{Y=0|X=0\}=\frac{P\{X=0,Y=0\}}{P\{X=0\}}=\frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{4}}=\frac{5}{6}$$

$$P\{Y=1|X=0\}=\frac{P\{X=0,Y=1\}}{P\{X=0\}}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{6}$$

即在 $X=0$ 条件下，Y 的条件分布律为

Y	0	1
$P\{Y=y_i\|X=0\}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

（☺ kira备注：其实就是把第一行的概率 $\frac{5}{8}$，$\frac{1}{8}$ 按比例调整一下，使之和为1）

▶ 连续型

有一道非常全面非常好的习题，尤其(3)(4)两问对于弄清概念十分有帮助 ↓ （第(4)问求法在P68有"kira再讲解"）

例6 【拿下了做真题一点问题没有，如2009.数三 22】

设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}k, & 0<x^2<y<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

(1) 确定常数 k (2) 求边缘概率密度 $f_X(x)$，$f_Y(y)$

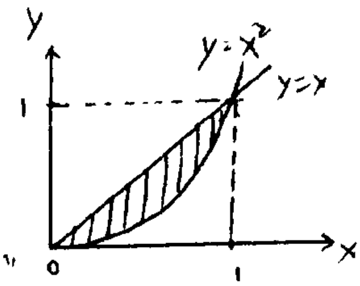
(3) 求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$ 及 $f_{Y|X}(y|x=\frac{1}{2})$，$f_{X|Y}(x|y)$ 及 $f_{X|Y}(x|y=\frac{1}{4})$

(4) 求条件概率 $P\{Y\le\frac{1}{3}|X=\frac{1}{2}\}$，$P\{Y\le\frac{1}{3}|X\ge\frac{1}{2}\}$

(1) 由规范性

$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = k\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} dy = \frac{k}{6}$

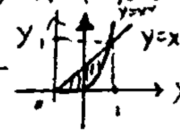
$\Rightarrow k=6.$



(2) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$ → "求谁不积谁"

$=\begin{cases}\int_{x^2}^{x} 6dy, & 0<x<1 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ → "不积先定限"（$0<x<1$ 先写上）

"限内画条线，先交写下限，后交写上限"（先交 x^2，后交 x，所以 $\int_{x^2}^{x}$）



$=\begin{cases}6(x-x^2), & 0<x<1 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$

$=\begin{cases}\int_{y}^{\sqrt{y}} 6dx, & 0<y<1 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$=\begin{cases}6(\sqrt{y}-y), & 0<y<1 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

你看，永远先一步
将标准式 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$，
再拉大括号写开，雷打不动
标准步骤就这么写！

(3) 当 $0<x<1$ 时，$f_X(x)=6(x-x^2)>0$，则在 $X=x$ $(0<x<1)$ 条件下，Y的条件概率密度为

$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{1}{x-x^2}, & x^2<y<x \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

特别地，在 $X=\frac{1}{2}$ 条件下

$f_{Y|X}(y|X=\frac{1}{2})=\begin{cases}4, & 1/4<y<1/2 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

Kira备注：

① 任何时候写概率密度和分布函数都要随手讨论范围，拉大括号

② $f_{Y|X}(y|x)$ 的正概率区域为 $f(x,y)$ 和 $f_X(x)$ 正概率区域之交

③ $f_{Y|X}(y|x)$ 的最终表达式本质上是关于y的一元函数，X的值固定在 $(0,1)$ 上的某处，$f_X(x)$ 为定值

▲ ④ 在求形如 $f_{Y|X}(y|X=\frac{1}{2})$ 时，应先求出 $f_{Y|X}(y|x)$ 的函数式，再将 $X=\frac{1}{2}$ 代入。

当 $0<y<1$，$f_Y(y)=6(\sqrt{y}-y)>0$，则在 $Y=y$ $(0<y<1)$ 条件下，
X 的条件概率密度为

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{y}-y}, & y<x<\sqrt{y}\\ 0, & 其他\end{cases}$$

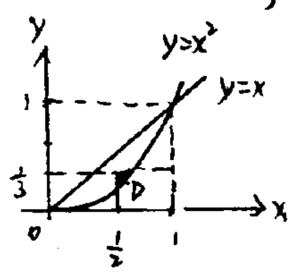
特别地，在 $Y=\frac14$ 条件下

$$f_{X|Y}(x|y=\tfrac14)=\begin{cases}4, & \frac14<x<\frac12\\ 0, & 其他\end{cases}$$

(4) $P\{Y\le\frac13|X=\frac12\}=\int_{-\infty}^{\frac13}f_{Y|X}(y|x=\frac12)\,dy$ ← 闭眼套公式

$$=\int_{\frac14}^{\frac13}4\,dy=\frac13$$

$$P\{Y\le\tfrac13|X\ge\tfrac12\}=\frac{P\{X\ge\frac12,Y\le\frac13\}}{P\{X\ge\frac12\}}=\frac{\iint\limits_D 6\,dx\,dy}{\int_{\frac12}^{+\infty}f_X(x)\,dx}$$



$$=\frac{\int_{\frac14}^{\frac13}dy\int_{\frac12}^{\sqrt{y}}6\,dx}{\int_{\frac12}^{1}6(x-x^2)\,dx}=\frac{\frac{4\sqrt3}{9}-\frac34}{\frac12}=\frac{8\sqrt3}{9}-\frac32$$

★ Kira 备注：(4)是一道非常好的条件概率辨析题
$P\{Y\le\frac13|X=\frac12\}$ 和 $P\{Y\le\frac13|X\ge\frac12\}$ 都是条件概率
但前者因为是严格等于"$X=\frac12$"而可以利用 $f_{Y|X}$ 积分来求，而后者不可用 $f_{Y|X}$ 积分求，从定义下手

[6] 已知边缘分布 or 条件分布及相关条件，求联合分布

[套路] ① 离散型，根据已知条件不同，可由以下公式确定

联合分布 $P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{Y=y_j|X=x_i\}P\{X=x_i\}$ $(i,j=1,2,\cdots)$

$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i|Y=y_j\}P\{Y=y_j\}$ $(i,j=1,2,\cdots)$

② 连续型，根据已知条件不同，可由以下公式确定

$f(x,y)=f_{Y|X}(y|x)f_X(x)$；$f(x,y)=f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)$

(😊 Kira备注：本质上就是乘法公式 或利用 $f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$
"知二求一")

真题1 2013 数三 22 —— (注意做题的标准而严谨的步骤

设 X, Y 是二维随机变量, X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

在给定 $X=x\ (0<x<1)$ 的条件下，

Y 的条件概率密度为 $f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{3y^2}{x^3}, & 0<y<x\\ 0, & 其他\end{cases}$

(I) 求 (X,Y) 的概率密度 $f(x,y)$

(II) 求 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)$

(III) 求 $P\{X>2Y\}$.

解：

(I) 已知公式 $f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$ 当 $f_X(x)>0$ 时成立

所以，当 $f_X(x)>0$ 时，即 $0<x<1$ 时，

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{9y^2}{x}, & 0<y<x\\ 0, & 其他\end{cases}$$

这样得到的 $f(x,y)$ 只是定义在 $0<x<1$, $-\infty<y<+\infty$ 上的 $f(x,y)$

但实际上 $f(x,y)$ 必须定义在全平面上

由于 $\int_0^1\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1dx\int_0^x\frac{9y^2}{x}dy=\int_0^1 3x^2dx=1$

因此，我们有理由确定在 $0<x<1$, $-\infty<y<+\infty$ 以外的平面上 $f(x,y)=0$，最后得到

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{9y^2}{x}, & 0<y<x,\ 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

😊 Kira备注：以上步骤为李永乐真题解析的标准步骤，我看到后大为惊叹，非常严谨！你必须能够自己把这些叙述自己写出来，才能得到无愧的满分，才说明

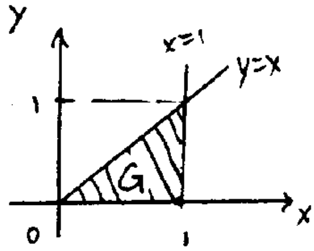
你真正把这块内容吃透了. 如果没有波浪线的叙述而直接解成

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{9y^2}{x}, & 0<y<x,\ 0<x<1\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

其等号本质上不成立（没写出适用范围），因为第一个等号仅限 $0<x<1$，而第二个等号中的"其他"则是对全平面而言.

Kira叮嘱：对答案不要只对"答案"，一定要观察思考全步骤，有时你以为你结果对了，但实际上基本概念都不明白，根上是烂的，整道题想法漏洞百出.

<Ⅱ> $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx$



$$=\begin{cases}\int_y^1\dfrac{9y^2}{x}\,dx, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-9y^2\ln y, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

Kira再讲解：

求 $f_Y(y)$ 平稳分三步走

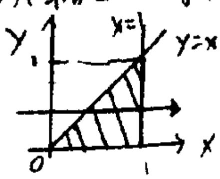
step1 闭眼写原始公式，且"求谁不积谁"，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx$

step2 ① 拉大括号，分出正概部分和0概部分.

"不积先定限" → $0<y<1$

② "限内画条线" 在 $0<y<1$ 间画条与x轴正方向相同的带箭头直线，先交 $x=y$，后交 $x=1$

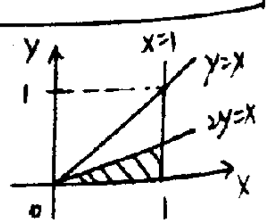
所以写 $\int_y^1\dfrac{9y^2}{x}\,dx$



step3. 视y为常数，把关于x的积分解出来.

<Ⅲ> $P\{X>2Y\}=\iint\limits_{x>2y}f(x,y)\,dx\,dy$

$=\int_0^1dx\int_0^{\frac{x}{2}}\dfrac{9y^2}{x}\,dy=\dfrac{1}{8}$



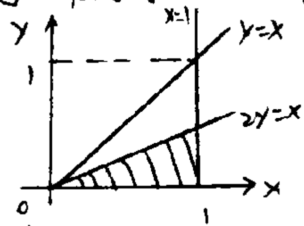
☺ kira再讲解:

P57 5步已讲解十分详细，此处再说一下如何确定积分区域

step1. 画直线 $2y=x$

step2. 找 $\{(x,y)|0<y<x<1\}$ 和

$\{(x,y)|2y<x\}$ 的公共部分



(数学天份好的同学大概看一眼就知道 $2y<x$

取直线下方，或者代个点试试，如取 $x=100, y=0$,

显然，是直线下方的点，故 $\{(x,y)|2y<x\}$ 在直线下方)

step3. 在区域 $D=\{(x,y)|0<2y<x<1\}$ 上对 $f(x,y)=\frac{9y^2}{x}$ 积分

由二重积分知识有 $\int_0^1 dx\int_0^{\frac{x}{2}}\frac{9y^2}{x}dy$

八 独立性判别

利用P52 充要条件 及kira备注

▶ 离散型

—— 真题2 数三 2013 8 ——

设随机变量 X 和 Y 相互独立，且 X 和 Y 的概率分布为

$$X\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8}\end{pmatrix}\qquad Y\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

则 $P\{X+Y=2\}=$

A. $\frac{1}{12}$　B. $\frac{1}{8}$　C. $\frac{1}{6}$　D. $\frac{1}{2}$

[分析]

$P\{X+Y=2\}=P\{X=1,Y=1\}+P\{X=2,Y=0\}+P\{X=3,Y=-1\}$

(用充要条件) $=P\{X=1\}P\{Y=1\}+P\{X=2\}P\{Y=0\}+P\{X=3\}P\{Y=-1\}$

$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$　　选C.

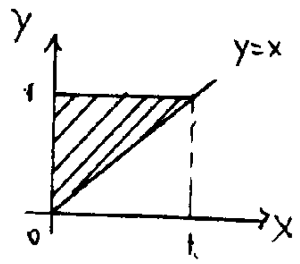
连续型

例7

若二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0<x<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

问 X 与 Y 是否相互独立.



解: $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$

$$=\begin{cases}\int_x^1 8xy\,dy, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}8x\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2}\right), & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$

$$=\begin{cases}\int_0^y 8xy\,dx, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}4y^3, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

显然在 $0<x<y<1$ 内, $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$, 因此不独立. ※

(☺ Kira备注: 用概率密度判独立性时, 要指明区域, 不可以用个别点的概率密度值.)

★ **九 随机变量函数的概率分布 $Z=g(X,Y)$.**

联
- 离散型 r.v.
- 连续型加、差、积、商 {分布函数法 ▲; 卷积公式法 ▲}
- 连续型其它函数
- 离散型 r.v. 与连续型 r.v. 的函数. (2016 真题 数一、三 22)

离散型

[套路]·列表确定 Z 的全部可能取值及其概率，写出分布律即可

- 若 X, Y 独立且均为非负整数，且分布律分别为 $P\{X=k\}=p_k$, $P\{Y=k\}=q_k$ $(k=0,1,2,\cdots)$，则 X+Y 的分布律为
  $P\{X+Y=k\}=p_0q_k+p_1q_{k-1}+\cdots+p_kq_0$ $(k=0,1,2\cdots)$
  (离散卷积公式)

例8

设二维随机变量 (X, Y) 的联合分布律为

X \ Y	-1	1	2
-1	5/20	2/20	6/20
2	3/20	3/20	1/20

求 $Z=X+Y$, $W=XY$, $U=\max\{X,Y\}$ 的分布律.

解：将联合分布律如下表达

P	5/20	2/20	6/20	3/20	3/20	1/20
(X,Y)	(-1,-1)	(-1,1)	(-1,2)	(2,-1)	(2,1)	(2,2)
X+Y	-2	0	1	1	3	4
XY	1	-1	-2	-2	2	4
max{X,Y}	-1	1	2	2	2	2

对相等函数值并项后得如下分布律

$$Z=X+Y\sim\begin{pmatrix}-2&0&1&3&4\\ \frac{5}{20}&\frac{2}{20}&\frac{9}{20}&\frac{3}{20}&\frac{1}{20}\end{pmatrix}$$

$$W=XY\sim\begin{pmatrix}-2&-1&1&2&4\\ \frac{9}{20}&\frac{2}{20}&\frac{5}{20}&\frac{3}{20}&\frac{1}{20}\end{pmatrix}$$

$$U=\max\{X,Y\}\sim\begin{pmatrix}-1&1&2\\ \frac{5}{20}&\frac{2}{20}&\frac{13}{20}\end{pmatrix}$$

※

清晰！

▶ $\boxed{\text{求连续型随机变量和、差、积、商分布}}$ $X\pm Y$, XY, X/Y

若已知二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$ ← 说明是连续型

① 分布函数法：则 X 与 Y 的函数 $Z=g(X,Y)$ 的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{g(X,Y)\le z\}=\iint_G f(x,y)\,dx\,dy$$

其中 $G=\{(x,y)\mid g(x,y)\le z\}$，若 Z 为连续型，则有 $f_Z(z)=F_Z'(z)$

[套路]

step1. 画出 $f(x,y)$ 的正概率区域 D，画出由 z 确定的区域 G

step2. 使 z 取遍 $(-\infty,+\infty)$，观察区域 $D\cap G$ 的变化，分段作二重积分求出 z.

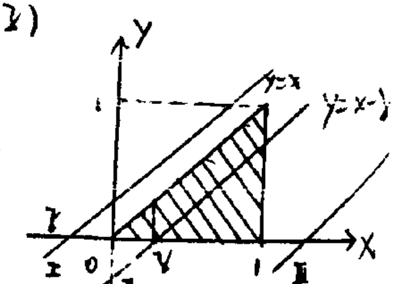
（Kira备注：找 $D\cap G$ 和关于 z 分段是重难点，但其思路仍是P57的三步，找区域的方法仍是P69上方。唯一的变动在于 z，在画图列式时把 z 视为常数，积分之后必然只剩下 z，即得 $F_Z(z)$）

例9

设 $(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<x<1,\ 0<y<x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

求随机变量 $Z=X-Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$

解：



→ Step 1. 画出 $f(x,y)$ 的正概率区域 D，画出由 z 确定的区域 G

$Z=X-Y$ 的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X-Y\le z\}=\iint_{x-y\le z} f(x,y)\,dx\,dy$$ ← 也是P57 step1

→ Step 2

① 当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$

② 当 $z\ge 1$ 时，$F_Z(z)=1$

③ 当 $0\le z<1$ 时，$F_Z(z)=\iint_{x-y\le z} f(x,y)\,dx\,dy$

$$=\int_0^z 3x\,dx\int_0^x dy+\int_z^1 3x\,dx\int_{x-z}^x dy=\frac{z}{2}(3-z^2)$$

故 $F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ \frac{z}{2}(3-z^2), & 0\le z<1\\ 1, & z\ge 1\end{cases}$

从而 $f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\frac{3}{2}(1-z^2), & 0<z<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

▶ Kira帮帮忙：

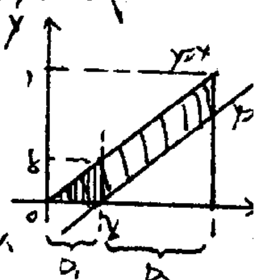
① $x-y\le z$ 的图象怎么找？ 先画出 $y=x-z$ 的图象，其与x轴交于 $(z,0)$，又由 $y\ge x-z$ 知其代表的区域G为 $y>x-z$ 上方的部分

② 如何根据 $D\cap G$ 分段？ $D=\{(x,y)\mid 0<y<x<1\}$ 为图2三角形阴影区域，$G=\{(x,y)\mid y\ge x-z\}$，由图中可以看出，

(a) 当 $z<0$ 时，$D\cap G$ 为空集，故 $F_Z(z)=0$（此时 $f(x,y)$ 为0，积分为0）

(b) 当 $z\ge 1$ 时，$D\cap G$ 为完整的三角形区域D，故 $F_Z(z)=1$（此时 $f(x,y)$ 在 $D\cap G$ 上积分为1） (c) 当 $0\le z<1$ 时，$D\cap G$ 随z的变化而变化，$D\cap G$ 直观上是 $y<x$ 和 $y\ge x-z$ 所夹的等腰梯形区域

③ 如何列式计算二重积分？ 当 $z\in[0,1)$ 时，直线 $y=x-z$ 位于如图位置，在阴影区域上对 $f(x,y)$ 积分有 $F_Z(z)=\iint 3x\,dxdy$（以下讲高数 ▽∧▽）



由区域形状我们以直线 $x=z$ 为分割线各自积分，所以

$$\iint\limits_{x-y\le z} 3x\,dxdy=\underbrace{\int_0^z dx\int_0^x 3x\,dy}_{D_1上积分}+\underbrace{\int_z^1 dx\int_{x-z}^x 3x\,dy}_{D_2上积分}=\frac{z}{2}(3-z^2)$$

▶ Kira很直地说：其实没有任何新东西，前面会了二重积分扎实了，这里看一眼自然就会写了。

---

② 卷积公式法：若已知二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x,y)$

和、差、积、商

(同类，必须精确！差一点都不行！)

(i) $U=X+Y$：$f_U(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,u-x)dx$ 或 $f_U(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(u-y,y)dy$

(ii) $V=X-Y$：$f_V(v)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,x-v)dx$ 或 $f_V(v)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(v+y,y)dy$

(iii) $W=X/Y$：$f_W(w)=\int_{-\infty}^{+\infty} |y| f(yw,y)dy$

(iv) $Z=XY$：$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|y|} f(\frac{z}{y},y)dy$ $(y\neq 0)$

或 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f(x,\frac{z}{x})dx$ $(x\neq 0)$

Kiru备注：

① 若 $U=X+Y$ 中 X 与 Y 独立，则 $f_U(u)$ 可进一步写成 $f_U(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(u-x)dx$

其它函数同理。

② 为什么用公式法更为简便？因为公式法可消去一元，使二重积分为一元积分，自然容易快速得多，且可绕过分布函数直接求 $f_Z(z)$。

③ 如何记忆这些公式？以 $U=X+Y$ 举例，据分布函数法本应对 $f(x,y)$ 积分，而因为 $y=u-x$，所以把其中 y 替换为 $u-x$ 即有 $f(x,u-x)$，视 u 为常数，对 x 积分即可。V、W、Z 同理。

• 特别记忆一下 $W=X/Y$ 要乘 $|y|$（与 $f(yw,y)$ 中 yw 一致）

$Z=XY$ 要乘 $\frac{1}{|y|}$（与 $f(\frac{z}{y},y)$ 中 $\frac{z}{y}$ 一致）所以其实这些公式都不用背，自己掌握规律直接写。（虽然 (i)~(iv) 各给了两个公式，挑一个顺手的用就可以了）

▲ 难点：被积函数 $f(x,u-x)$ 等的非 0 域的确定。（"将"替换进行到底）

还是例 9 <法二>

设二维随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为

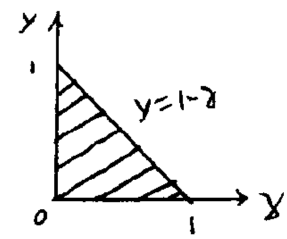
$$f(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<x<1,\ 0<y<x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

解：

由公式法 $Z=X-Y$ 的概率密度为 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z+y,y)dy$.

其中被积函数不为 0 的区域为

$\begin{cases} 0<y<1 \\ 0<y<x<1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<y<1 \\ 0<y<\underbrace{y+z}_{\boxed{\text{用}y+z\text{替换}x}}<1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<y<1 \\ 0<z<1-y \end{cases}$



$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(y+z,y)\,dy$$

$$=\begin{cases} \int_0^{1-z} 3(y+z)\,dy & ,0<z<1 \\ 0 & ,\text{其他} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \frac{3}{2}(1-z^2) & ,0<z<1 \\ 0 & ,\text{其他} \end{cases}$$

※

:) Kira 详解如何讨论 z 的范围 ★★★★★ （"把"替身进行到底）

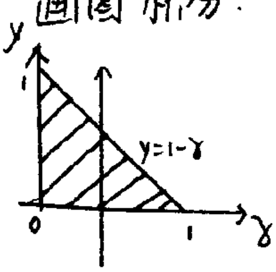
我们在 P74 中说，把 $f(x,y)$ 中的 y 替换为 $u-x$ 而得 $f(x,u-x)$。也可以说 $u-x$ 是 y 的"替身"，同理，在找范围过程中"替身"的身份要继续发挥。本题中 $z+y$ 是 x 的"替身"。

原题中，正概区域的取值由 x, y 表示，即 $\begin{cases} 0<x<1 \\ 0<y<x<1 \end{cases}$

下面，我们要做的是把 $z+y$ 替换进去，取代 x，即 $\begin{cases} 0<z+y<1 \\ 0<y<z+y<1 \end{cases}$

将以上不等式整理成关于 y, z 的区域有 $y>0$, $z>0$, $z+y<1$

画图积分：step 1. z 画横轴（永远把 z 画横轴，方便讨论）



step 2. 按 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(y+z,y)dy$ 积分。

过程类似于 P68 "Kira 再讲解" 求条件分布：

① "求 z 不积 z，不积先定限"，由图分 $0<z<1$ 和其他

② "限内画条线，先交写下限，后交写上限"，因此写 $\int_0^{1-z} d$

求出积分 $\int_0^{1-z} 3(y+z)\,dy$ 即可。

③ 更一般的卷积公式：设二维连续随机变量 (X, Y) 的概率密度 f(x, y)

则随机变量 $Z=aX+bY\ (ab\neq 0)$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{z-by}{a},y\right)dy$$ （$a=1$时会非常好用）

或 $$f_Z(z)=\frac{1}{|b|}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x,\frac{z-ax}{b}\right)dx$$

（Kira备注：由P74中间部分我的解释，这个公式也不必背，可以自然而然写出~）

真题2. 2005 数一、三. 22.

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\ 0<y<2x\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

求 $Z=2X-Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$

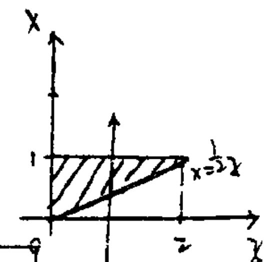
显然，换掉y比较顺眼

解：

由公式法，$Z=2X-Y$的概率密度为 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,2x-z)\,dx$

其中被积函数不为0的区域为

$$\begin{cases}0<x<1\\ 0<y<2x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}0<x<1\\ 0<2x-z<2x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}0<x<1\\ 0<z<2x\end{cases}$$



z画横轴

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,2x-z)\,dx$$
$$=\begin{cases}\int_{\frac{1}{2}z}^{1} 1\,dx, & 0<z<2\\ 0, & 其他\end{cases}$$

"不强先定限."写完入括号先写 $0<z<2$

$$=\begin{cases}1-\frac{1}{2}z, & 0<z<2\\ 0, & 其他\end{cases}$$

（Kira感叹道：公式法真心非常好用！对于直接求$f_Z(z)$等问这种东东，我个人能用公式法就用公式法）

- 层层深入：之前的z都是一段的，接下来一道例题，我们看一下多分几段的情况，其实都是P75的套路.

真题3 2007 数一、三、23

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1,\ 0<y<1\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

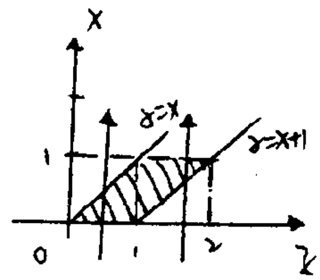
求 $Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$

解：

由公式法 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\,dx$

其中被积函数不为0的区域为

$$\begin{cases}0<x<1\\ 0<y<1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}0<x<1\\ 0<z-x<1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}0<x<1\\ x<z<x+1\end{cases}$$



$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\,d(x)$$

$$=\begin{cases}\int_0^z 2-x-(z-x)\,dx, & 0<z\le 1\\ \int_{z-1}^1 2-x-(z-x)\,dx, & 1<z\le 2\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

"先定限"
分三段

z画成横轴…
我都说烦了…
T.T

$$=\begin{cases}2z-z^2, & 0<z\le 1\\ 4-4z+z^2, & 1<z\le 2\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

（kira魔幻地笑着说：你看我这连着三道公式法例题做题步骤……真的就是复制粘贴啊……）

▶ 连续型随机变量其他函数的分布

型一 连续型 r.v. U 的概率密度为 $f(u)$，且离散型随机变量 $X=h(U)$ 与 $Y=g(U)$，确定 (X,Y) 分布：

[套路] 利用 X、Y 与 U 的函数关系，统一将 $P\{X=?,Y=?\}$ 化成 $P\{?<U<?\}$ 的形式以求得概率.

例10

设随机变量U在区间$[-3,3]$上服从均匀分布，随机变量

$$X=\begin{cases}-1, & U\le -2\\ 1, & U>-2\end{cases} \qquad Y=\begin{cases}-1, & U\le 2\\ 1, & U>2\end{cases}$$

求(X,Y)的联合分布.

解：

由题设随机变量U的概率密度为 $f_U(u)=\begin{cases}\frac{1}{6}, & -3<u<3\\ 0, & 其他\end{cases}$

(X,Y)的所有可能取值为$(-1,-1)(-1,1)(1,-1)(1,1)$

熟练台一阶搭→

$$P\{X=-1,Y=-1\}=P\{U\le -2,U\le 2\}=P\{U\le -2\}$$
$$=\int_{-3}^{-2}\frac{1}{6}du=\frac{1}{6}$$

$$P\{X=-1,Y=1\}=P\{U\le -2,U>2\}=0$$

$$P\{X=1,Y=-1\}=P\{U>-2,U\le 2\}=P\{-2<U\le 2\}=\int_{-2}^{2}\frac{1}{6}du=\frac{2}{3}$$

$$P\{X=1,Y=1\}=1-\frac{1}{6}-0-\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$$

于是X与Y的联合分布律为

X \ Y	-1	1
-1	1/6	0
1	2/3	1/6

☆

(台 kira留言：按门套路写就行了，非常好玩非常easy!)

型二　若二维连续型随机变量(U,V)的概率密度为$f(u,v)$，且离散型随机变量$X=h(U,V)$与$Y=g(U,V)$，确定(X,Y)分布：$P\{X=x_i,Y=y_j\}$

$$=P\{(U,V)\in D_{ij}=\{(u,v)\mid h(u,v)=x_i,g(u,v)=y_j\}\}$$
$$=\iint_{D_{ij}}f(u,v)\,du\,dv \quad (i,j=1,2,\cdots)$$

(台 kira备注：思路和型一相同，只是一维函数换成二维.)

例11

设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(0,1)$，记

$$U=\begin{cases}0, & X^2+Y^2\le 1\\ 1, & X^2+Y^2>1\end{cases},\quad V=\begin{cases}0, & X^2+Y^2\le 2\\ 1, & X^2+Y^2>2\end{cases}$$

求 $P\{U=1,V=0\}$ 和 $P\{U=0,V=0\}$

解：由题设知

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\quad(-\infty<x,y<+\infty)$$

$$P\{U=1,V=0\}=P\{X^2+Y^2>1,\ X^2+Y^2\le 2\}=P\{1<X^2+Y^2\le 2\}$$
$$=\iint\limits_{1<x^2+y^2\le 2}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^{\sqrt{2}}e^{-\frac{r^2}{2}}r\,dr=e^{-\frac{1}{2}}-e^{-1}$$

$$P\{U=0,V=0\}=P\{X^2+Y^2\le 1,\ X^2+Y^2\le 2\}=P\{X^2+Y^2\le 1\}$$
$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 e^{-\frac{r^2}{2}}r\,dr=1-e^{-\frac{1}{2}}$$

（kira备注：其实就是将 $U=?$，$V=?$ 翻译成它们背后的意义 $X^2+Y^2\le 1$ 等，由问题转回已知，不难，好玩～。）

▶ 离散型随机变量与连续型随机变量的函数 $Z=g(X,Y)$（X 连续，Y 离散）

已知取值有限的离散型随机变量 X 的分布律及连续型随机变量 Y 的概率密度，且 X 与 Y 相互独立，则 $X+Y$，$X-Y$，XY 的概率分布可依据分布函数的定义确定

真题4 2008 数一、三 22 （还记得我在P1的话和的分布分解

设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 的概率分布为 $P\{X=i\}=\frac{1}{3}$ $(i=-1,0,1)$，Y 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\le y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$，记 $Z=X+Y$

(I) 求 $P\{Z\le\frac{1}{2}\mid X=0\}$

(II) 求 Z 的概率密度 $f_Z(z)$

解：(I) 由 X 与 Y 相互独立，得

$$P\{Z\le \tfrac12 \mid X=0\} = P\{X+Y\le \tfrac12 \mid X=0\}$$ ← 把Z翻译成X+Y

$$= P\{Y\le \tfrac12 \mid X=0\}$$ ← X=0 代进去

$$= P\{Y\le \tfrac12\}$$ ← 因为 X、Y 独立。

$$= F_Y(\tfrac12) = \tfrac12.$$

(II) $X\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac13 & \frac13 & \frac13\end{pmatrix}$

X 离散，一共只有3种情况，全列出来再说

$$F_Z(z) \triangleq P\{Z\le z\} = P\{X+Y\le z\} = P\{X+Y\le z, \Omega\}$$

$$= P\{X+Y\le z, X=-1\} + P\{X+Y\le z, X=0\} + P\{X+Y\le z, X=1\}$$

$$= P\{X=-1\}P\{X+Y\le z\mid X=-1\} + P\{X=0\}P\{X+Y\le z\mid X=0\}$$

$$+ P\{X=1\}P\{X+Y\le z\mid X=1\}$$ ← 乘法公式闭着眼就能顺下来

$$= \tfrac13 P\{Y\le z+1\} + \tfrac13 P\{Y\le z\} + \tfrac13 P\{Y\le z-1\}$$ ← 厉害了！Y、X独立所以条件X可以全扔了

X值全代完后，P剩下Y，利用 $f_Y(y)$ 即可 → $= \tfrac13\left(F_Y(z+1) + F_Y(z) + F_Y(z-1)\right)$

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \tfrac13\left(f_Y(z+1) + f_Y(z) + f_Y(z-1)\right)$$

$$= \begin{cases} \frac13, & -1\le z<2 \\ 0, & \text{else}. \end{cases}$$

（☺ Kira总结：本题几大神器——独立，条件概率化无条件概率；全集分解思路与全概公式；死守定义！）

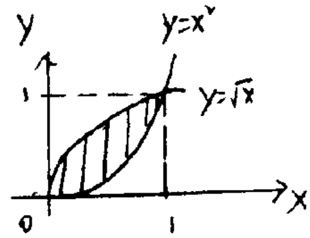
——真题5 2016 数一、三—— 来，再看这道你会不会~

设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\{(x,y)\mid 0<x<1, x^2<y<\sqrt{x}\}$ 上服从均匀分布。令 $U=\begin{cases}1, & X\le Y\\ 0, & X>Y\end{cases}$

(I) 写出 (X,Y) 的概率密度　(II) 问 U 与 X 是否相互独立？理由。

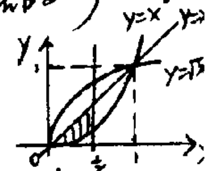
(III) 求 $Z=U+X$ 的分布函数 $F(z)$.

解：(I) 区域 D 的面积 $S_D=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\,dx=\frac{1}{3}$



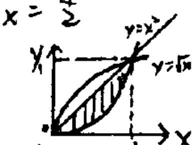
故 $(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases}3, & 0<x^2<y<\sqrt{x}<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

（kira备注：第(I)问套均匀分布定义 P52. 没什么好说的）



(II) $P\{U=0,X\le\frac{1}{2}\}=P\{X>Y,X\le\frac{1}{2}\}=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_{x^2}^{x}3\,dy=\frac{1}{4}$

$P\{U=0\}=P\{X>Y\}=\int_0^1dx\int_{x^2}^{x}3\,dy=3\int_0^1(x-x^2)\,dx=\frac{1}{2}$



$P\{X\le\frac{1}{2}\}=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}3\,dy=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{8}$

$\therefore P\{U=0,X\le\frac{1}{2}\}\ne P\{U=0\}\cdot P\{X\le\frac{1}{2}\}$

故 X 与 U 不独立.

★ kira备注：

① 此处的证明思路见 P52 kira备注②，选 $U=0$ 和 $X\le\frac{1}{2}$ 因为计算方便，考试时大胆尝试.

② $P\{U=0,X\le\frac{1}{2}\}=P\{X>Y,X\le\frac{1}{2}\}$ 用到的仍是 P79-P80 例题套路

③ $P\{X\le\frac{1}{2}\}$ 不需要特地求 X 的边缘分布，直接画图求二重积分即可，把 $X\le\frac{1}{2}$ 视为 $(X,U)\in G$ 的一种情形，再利用 P57）

(III) Z 的分布函数 $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{U+X\le z\}$

$=P\{U+X\le z,\Omega\}=P\{U+X\le z,U=0\}+P\{U+X\le z,U=1\}$

$=P\{X\le z,U=0\}+P\{X+1\le z,U=1\}$ ← 利用U值简化式子

$=P\{X\le z,X>Y\}+P\{X\le z-1,X\le Y\}$

① $z<0$, $F_Z(z)=0$　② $z\ge 2$, $F_Z(z)=1$

③ $0\le z<1$, $F_Z(z)=P\{X>Y,X\le z\}+P(\varnothing)$

$=\iint\limits_{\substack{x>y\\ x\le z}}f(x,y)\,dxdy=\int_0^z dx\int_{x^2}^{x}3\,dy=\frac{3}{2}z^2-z^3$

④ $1\le z<2$, $F_Z(z)=P\{X>Y\}+P\{X\le Y,X\le z-1\}$

$$= \frac{1}{2} + \iint\limits_{\substack{x \le y \\ x \le z-1}} f(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{2} + \int_0^{z-1} dx \int_x^{\sqrt{x}} 3\,dy$$

$$= \frac{1}{2} + 3\left[\frac{2}{3}(z-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}(z-1)^2\right]$$

故Z的分布函数为

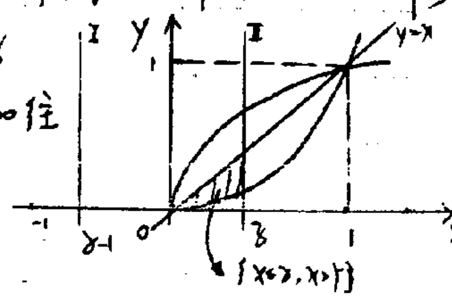
$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z<0 \\ \frac{3}{2}z^2 - z^3, & 0 \le z < 1 \\ \frac{1}{2} + 2(z-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(z-1)^2, & 1 \le z < 2 \\ 1, & z \ge 2 \end{cases}$$

★ kira备注:

① 此处全集分解思想，与P80题如出一辙，步骤就是ctrl+V的!

② $P\{X\le z, X>Y\}$ 和 $P\{X\le z-1, X\le Y\}$ 都视为 $P\{(X,Y)\in D\}$ 类型题，把z看作常数计算积分，讨论z时要把两个$P\{\}$一起看不要遗漏。

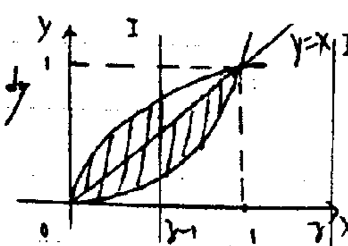
③ 分别作出原正概区域G，$D_1=\{X\le z, X>Y\}$和$D_2=\{X\le z-1, X\le Y\}$的图象，观察并思考如何分类讨论z。我们拿着I和II这两根铅垂线从$-\infty$往$+\infty$移动，可以看出:



(i) 当$z<0$时，I、II均在x负半轴，与正概区域G无交集

(ii) 当$0\le z<1$时，II进入G，$P\{X\le z, X>Y\} = \int_0^z dx\int_{x^2}^{x} 3\,dy$

$P\{X\le z-1, X\le Y\} = 0$



(iii) 当$1\le z<2$时，I进入G，II移出G，$P\{X\le z, X>Y\} = \frac{1}{2}$

$P\{X\le z-1, X\le Y\} = \int_0^{z-1} dx\int_x^{\sqrt{x}} 3\,dy$

(iv) 当$2\le z$时，I、II均从右侧移出G，$P\{X\le z, X>Y\} = \frac{1}{2}$，

$P\{X\le z-1, X\le Y\} = \frac{1}{2}$

以上分析过程呈现在卷面上便如我[解]中所示，本质上考察的……

是我P72-P73讲解的分布函数计算功底，不难，静下心来都能做，关键是沉住气，有序，按规矩分析。

▲除以上介绍过的求 $Z=g(X,Y)$ 的几种固定套路外，其他函数类型不犹豫，直接用分布函数法。

十 有限个相互独立随机变量最大值与最小值的概率分布

▶**离散型** 设随机变量 X_1, X_2 相互独立，且已知 $P\{X_i=x_{ij}\}=p_{ij}$ $(i=1,2;\ j=1,2,\cdots)$ 记 $Y=\max\{X_1,X_2\}$，先求 Y 的所有可能取值，再求概率分布即可（如P71例题8）

• 当 X_1, X_2 只取正整数值时有

$$P\{Y=k\}=P\{X_1=k,X_2=k\}+P\{X_1=k,X_2=k-1\}+\cdots+P\{X_1=k,X_2=1\}$$
$$+P\{X_1=k-1,X_2=k\}+\cdots+P\{X_1=1,X_2=k\}$$

（即先把所有 $P\{X_2\le X_1=k\}$ 加起来，再把所有 $P\{X_1<X_2=k\}$ 加起来。）

▶**已知分布函数** 背

• 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，$F_i(x)$ 为 X_i 的分布函数，$Y=\max\{X_1,\cdots,X_n\}$，$Z=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$，其分布函数分别为 $F_Y(y)$，$F_Z(z)$，则

$$F_Y(y)=F_1(y)F_2(y)\cdots F_n(y)$$
$$F_Z(z)=1-[1-F_1(z)][1-F_2(z)]\cdots[1-F_n(z)]$$

• 若 $X_1, X_2\cdots X_n$ 独立同分布于 $F(x)$，则

$$F_Y(y)=[F(y)]^n$$
$$F_Z(z)=1-[1-F(z)]^n$$

（Kira备注：以上结论非常有用，建议直接背下，有时我怕自己背混

不懂也会证推一遍，推起来非常快：

$F_Y(y)=P\{\max\{X_1,\cdots,X_n\}\le y\}=P\{X_1\le y,X_2\le y,\cdots,X_n\le y\}$ ← max ≤y 说明每个都≤y

$=P\{X_1\le y\}P\{X_2\le y\}\cdots P\{X_n\le y\}$

$=F_1(y)F_2(y)\cdots F_n(y)$

$F_Z(z)=P\{\min\{X_1,\cdots,X_n\}\le z\}=1-P\{\min\{X_1,\cdots,X_n\}>z\}$

$=1-P\{X_1>z,X_2>z,\cdots,X_n>z\}$ ← min >z 说明每个都>z

$=1-P\{X_1>z\}P\{X_2>z\}\cdots P\{X_n>z\}$

$=1-[1-F_1(z)][1-F_2(z)]\cdots[1-F_n(z)]$

真题6　2008 数一、三　7

设随机变量 X，Y独立同分布，且X分布函数为 F(x)，则 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布函数为

(A) $F^2(x)$　(B) $F(x)F(y)$　(C) $1-[1-F(x)]^2$　(D) $[1-F(x)][1-F(y)]$

[分析]

利用结论或自己推一遍，易知选A.

B和D这种同时出现 x 和y 的直接就能排掉了。$F_Z(z)$是一维~

最后，我们回到 P47「Kira 挑战」的问题

1. ① 能；能　② 否；否　③ 能；能（但其中一个是固定数）
2. ① 能；能
3. P_{74}-P_{77}
4. 对于联合、条件、边缘"知二求一"问题，多以概率密度为切入点。对于不能用概率密度的，再从分布函数和定义突破。
5. P_{72}-P_{73}.（+P_{80} 真题5 2016 数一、三的详解）
6. 可能. 如P79 真题4.（看一下附录框架 P_{10} 注）
7. P_{83}-P_{84}

是不是很简单了！

第四章 随机变量的数字特征

P87 kira挑战 先做自己一遍
答案在P103. 哪里不会点哪里.

与 空降点,

- P87 kira前言 (尤其最后5个字)
- P88 EX性质 DX性质 P89 cov(X,Y)性质
- P90 王
- P93 结论
- P94 连续型 两种思路
- P94-P97 求g(X,Y)的数字特征
- P102 两个拓展.

① kira 前言：

这部分没有难理解的概念，做题也不需像前面那样梳理图象，关键在于记准公式，动手运算。本章既需要硬的计算功底（积分运算），也需要较好的计算技巧（性质），多利用公式简化计算，促动背公式！

② kira 挑战

1. X与Y相互独立 $\overset{?}{\Leftrightarrow}$ X与Y不相关

若(X, Y)服从二维正态分布，则X与Y相互独立 $\overset{?}{\Leftrightarrow}$ X与Y不相关

若X、Y都服从0-1分布，则X与Y相互独立 $\overset{?}{\Leftrightarrow}$ X与Y不相关

2. $E(ax+b)=?$ ，$D(ax+b)=?$

3. 切比雪夫不等式写法时对比 $\frac{DX}{\varepsilon^2}$ 还是 $1-\frac{DX}{\varepsilon^2}$ ？

4. $X\sim N(0,\sigma^2)$ 则X的n阶原点矩 $E(X^n)=?$（背结论，必会★）

5. $E[(X+Y)^2]$ 怎么算？

6. $E[|X-Y|]$ 怎么算？

7. 求 $D(X+Y)$ 有哪些思路？哪个更好用？

8. 如何求有限个独立同分布r.v.最大值最小值和数学特征？

9. 会用户函数吗？（必会★）

基础概念&必备常识

数学期望EX，方差DX，协方差 $cov(X,Y)$，切比雪夫不等式

相关系数 ρ_{XY}

日 数学期望 EX

▲ 离散型 { 随机变量 { 有限型 $E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$ （分布律 $P\{X=x_i\}=p_i$）

无限型 $E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}x_ip_i$ （于 $\sum_{i=1}^{\infty}x_ip_i$ 绝对收敛）

随机变量函数 { 一维 $E(g(X))=\sum_{i=1}^{\infty}g(x_i)p_i$

二维 $E(Z)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}g(x_i,y_j)p_{ij}$，其中 $Z=g(X,Y)$

* 特别地 $E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}(x_i\underbrace{\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}}_{先求边缘})$，$E(Y)=\sum_{j=1}^{\infty}(y_j\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij})$

▲ 连续型（部分绝对收敛）
- 随机变量 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$
- 随机变量函数
  - 一维：$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\,dx$，其中 $Y=g(X)$
  - 二维：$E(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f(x,y)\,dx\,dy$
    其中 $Z=g(X,Y)$

（Kira 备注：
随机变量函数的期望只需把随机变量期望中的 x 换 $g(x)$
其它完全不变，做题不要犹豫！）

性质

① 线性性：$E(a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n+c)=a_1EX_1+a_2EX_2+\cdots+a_nEX_n+c$
自然有以下成立：$E(c)=c$（c 为常数）；$E(X+c)=EX+c$（"常数可拿出来"）

② 若 $X_1,X_2\cdots X_n$ 相互独立，则 $E(X_1X_2\cdots X_n)=EX_1EX_2\cdots EX_n$

三 方差 DX

公式：$DX=E(\underset{\text{r.v.}}{X}-\underset{\text{常数}}{EX})^2=EX^2-(EX)^2$

▲ 离散型一维 $DX=E(X-EX)^2=\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-EX)^2p_i$

▲ 连续型一维 $DX=E(X-EX)^2=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-EX)^2 f(x)\,dx$

（Kira 备注：方差很少用积分或级数来求，多先求期望，
再用 $DX=E(X-EX)^2$ 或 $DX=EX^2-(EX)^2$ 求出，
性质要熟练掌握。）

性质

① $D(aX+b)=a^2DX$ ←"常数不要了"

② $D(X\pm Y)=DX+DY\pm 2\operatorname{cov}(X,Y)$ ←"±都是 $DX+DY$"

③ $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 独立 则 $D(X_1+X_2+\cdots+X_n)=DX_1+DX_2+\cdots+DX_n$

④ 若 $c\neq E(X)$，则 $DX<E(X-c)^2$（其中 c 为常数）

⑤ 如果X,Y独立,则 $D(aX+bY)=a^2DX+b^2DY$.

★常用分布的数学期望与方差

分布	期望	方差
① 0-1分布	p	$p(1-p)$
② 二项分布 $B(n,p)$	np	$np(1-p)$
③ 泊松分布 $P(\lambda)$	λ	λ
④ 超几何分布	$n\frac{M}{N}$	$\frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$
⑤ 几何分布 $Ge(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
⑥ 正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$	μ	σ^2
⑦ 均匀分布 $U(a,b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
⑧ 指数分布 $E(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
⑨ $\chi^2(n)$分布	n	$2n$

(kira备注:其中除④外,其它均需熟练记忆 EX和DX)

三 协方差 $cov(X,Y)$

$$cov(X,Y)=E[(X-EX)(Y-EY)]=E(XY)-EXEY$$

▲离散型 $cov(X,Y)=\sum_i\sum_j[(x_i-EX)(y_j-EY)]p_{ij}$

▲连续型 $cov(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-EX)(y-EY)f(x,y)dxdy$

(kira备注:这俩个基本上不用,主要靠性质,利用 $EXY-EXEY$)

性质

① 对称性 $cov(X,Y)=cov(Y,X)$, $cov(X,X)=DX$

② 线性性 ▲ $cov(aX+b,cY+d)=ac\,cov(X,Y)$ (a.b.c.d为常数)

$cov(X,c)=0$

$cov(X+Y,Z)=cov(X,Z)+cov(Y,Z)$

③ $[\mathrm{cov}(X,Y)]^2 \le DX\,DY$

④ 若 X 与 Y 相互独立，则 $\mathrm{cov}(X,Y)=0$.

四 相关系数 ρ_{XY}

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} \quad (\text{其中} DX\neq 0,\ DY\neq 0)$$

（Kira备注：$\mathrm{cov}(X,Y)$ 和 ρ_{XY} 研究 X 与 Y 之间的线性相关性，ρ_{XY} 相当于将 $\mathrm{cov}(X,Y)$ 的量纲化为1，故 $|\rho_{XY}|$ 越大，线性相关性越强）

性质

① 有界性 $|\rho_{XY}|\le 1$

② 如果 $Y=aX+b$，则 $\rho_{XY}=\begin{cases}1, & a>0 \quad X\text{与}Y\text{完全正相关}\\ -1, & a<0 \quad X\text{与}Y\text{完全负相关}\end{cases}$

（已经可写出线性表达式了！$|\rho_{XY}|$ 肯定是1～是最大～）

五 不相关与独立

若 $\rho_{XY}=0$，称随机变量 X 与 Y 不相关.

▶ 等价命题：$\rho_{XY}=0 \Leftrightarrow \mathrm{cov}(X,Y)=0 \Leftrightarrow EXY=EX\cdot EY$
$\Leftrightarrow D(X\pm Y)=DX+DY$ （没有独立！）

▶ X 与 Y 相互独立 $\overset{\Rightarrow}{\nLeftarrow}$ X 与 Y 不相关

▶ 若 (X,Y) 服从二维正态分布，则 X 与 Y 独立 $\Leftrightarrow \rho_{XY}=0 \Leftrightarrow \cdots\cdots$

▶ 若 X 与 Y 都服从 0-1 分布，则 X 与 Y 独立 $\Leftrightarrow \rho_{XY}=0 \Leftrightarrow \cdots$

六 切比雪夫不等式

若 DX 存在，则对任意 $\varepsilon>0$，有 $P\{|X-EX|\ge\varepsilon\}\le\frac{DX}{\varepsilon^2}$ 或

$P\{|X-EX|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{DX}{\varepsilon^2}$

(小k小a备注：这个公式背下来，做题会有出EX、DX，求EX、DX，会取适合的ε，就可以了，两个挑一个记，建议记第一个，有木有发现"≥ε≤"这个表情很萌吖！)

解题套路

● 常见题型依次如下

一、求一维随机变量(函数)的期望和方差

▲二、求二维随机变量函数的期望和方差

三、求有限个独立同分布随机变量最大值、最小值的期望和方差

四、利用切比雪夫不等式估计概率

五、求随机变量协方差、相关系数，相关性与独立性判别

六、二维正态分布数字特征相关问题

一 求一维随机变量(函数)的期望和方差

▶ **离散型**　　分布律 $P\{X=x_i\}=p_i\ (i=1,2,\cdots,n)$

$EX=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$ → 全加起来，看着表格加即可

x_i：X取值　　p_i：对应概率

$DX=EX^2-(EX)^2$

例1

设随机变量X的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0\\ \frac{1}{2}, & 0<x<1\\ \frac{1}{2x^2}, & 1\leq x\end{cases}$

则随机变量 $Y=\begin{cases}0, & X<\frac{1}{2}\\ 1, & \frac{1}{2}\le X<2\\ 2, & 2\le X\end{cases}$ 的数学期望、方差分别为？

[分析] 第一步确定Y的分布律，再求Y的数字特征

解：$P\{Y=0\}=P\{X<\frac{1}{2}\}=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{4}$

$P\{Y=1\}=P\{\frac{1}{2}\le X<2\}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{2}dx+\int_1^2\frac{1}{2x^2}dx=\frac{1}{2}$

$P\{Y=2\}=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

有 $Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$

于是 $EY=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}=1$ （上下对应相乘再相加）

$EY^2=0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$ （只对X平方而概率不变）

$DY=EY^2-(EY)^2=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$

所以 $EY=1,\ DY=\frac{1}{2}$

☆

▶ 连续型

判断部分 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$ [先求f(x)]

$EY=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx$，其中 $Y=g(x)$.

（只换x为g(x)，f(x)不变）.

真题1 2014数一、三.22

设随机变量X的概率分布为 $P\{X=1\}=P\{X=2\}=\frac{1}{2}$，在给定 $X=i$ 条件下，随机变量Y服从均匀分布 $U(0,i)$ $(i=1,2,\cdots)$

(1) 求Y的分布函数 $F_Y(y)$

(2) 求EY.

解：(1)（与P39真题6等之间N多涉及条件分布和全集分解的例题相同套路，又开始复制粘贴）

记 $U(0,i)$ 的分布函数为 $F_i(x)$ $(i=1,2)$，则

$F_i(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{x}{i}, & 0\le x<i,\quad i=1,2.\\ 1, & i\le x\end{cases}$

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{Y\le y,\Omega\}$$
$$=P\{X=1\}P\{Y\le y|X=1\}+P\{X=2\}P\{Y\le y|X=2\}$$
$$=\frac{1}{2}P\{Y\le y|X=1\}+\frac{1}{2}P\{Y\le y|X=2\}$$
$$=\frac{1}{2}[F_1(y)+F_2(y)]=\begin{cases}0, & y<0\\ \frac{3}{4}y, & 0\le y<1\\ \frac{1}{2}+\frac{y}{4}, & 1\le y<2\\ 1, & 2\le y\end{cases}$$

(2) $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{4}, & 0<y<1\\ \frac{1}{4}, & 1\le y<2\\ 0, & 其他\end{cases}$

$$EY=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy=\int_0^1\frac{3}{4}ydy+\int_1^2\frac{1}{4}ydy=\frac{3}{4}$$ ☆

（☺ kira备注：要求 EY，先求 $f_Y(y)$，套原始公式 $\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy$ 随着 $f_Y(y)$ 的分段而分段积分即可）

● 随机变量函数的期望 $E(g(X))$ 一例：

真题2 2013 数三 14

设随机变量 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$，则 $E(Xe^{2X})=$ ____.

解：

$$E(Xe^{2X})=\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{xe^{2x}}_{\boxed{g(x)}}\underbrace{\varphi(x)}_{\boxed{f(x)}}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{2x}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2-4x+4}{2}}dx\cdot e^2 \quad \leftarrow \boxed{\text{配方}}$$
$$=e^2\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}dx=2e^2$$

其中，

$\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}dx$ 看作正态分布 $N(2,1)$ 的数学期望.

★ 一个非常好用的结论：（P94 举例）（应用：P102 例6）

若 $X\sim N(0,\sigma^2)$，则 X 的 n 阶原点矩为

$$E(X^n)=\begin{cases}(n-1)!!\sigma^n, & n\text{为偶数}\\ 0, & n\text{为奇数}\end{cases}$$

(🙂 Kim 备注：其中 $(n-1)!!=(n-1)(n-3)\cdots 3\cdot 1$ (n 为偶数)
很多题可以直接秒杀，比如 $X\sim N(0,\sigma^2)$，则
$EX^2=\sigma^2\ (n=2)$；$EX^3=0\ (n=3)$；$EX^4=3\sigma^4\ (n=4)\cdots$
▽_▽ (小题直接写结果，大题假装列一下式子积分，并直接写结果))

三 求二维随机变量函数的期望和方差

▶ **离散型** • $E(Z)=\sum_j\sum_i g(x_i,y_j)P_{ij}$ $(Z=g(X,Y))$

step 1. 求 (X,Y) 联合分布律

step 2. 求 Z 的分布律 (最快的方法)

step 3. 消消 Z 的分布律求 $E(Z)$

• $DZ=EZ^2-(EZ)^2$

例 2

已知 (X,Y) 的联合概率分布为

X \ Y	-1	1
-1	1/4	0
1	1/2	1/4

求 $D(X+Y)$.

解：由 (X,Y) 联合分布律，$X+Y$ 的全部取值为 $-2,0,2$.

分布律为 $X+Y\sim\begin{pmatrix}-2 & 0 & 2\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$

所以 $E(X+Y)=-2\times\frac{1}{4}+0\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}=0$

$E(X+Y)^2=(-2)^2\times\frac{1}{4}+0^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{4}=2$

$D(X+Y)=E(X+Y)^2-[E(X+Y)]^2=2$ ✲

▶ **连续型** • $E(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)\,dx\,dy$ $(Z=g(X,Y))$

通常有两种思路 $\begin{cases}\text{I. 先求 Z 的分布，再当成一维问题求 EZ}\\ \text{II. 不求 Z 的分布，直接用性质间接求 EZ}\end{cases}$

✲ (🙂 Kim 强调：两种思路都走得通，都对，不必太纠结！

建议优先考虑第二种，略快一些（毕竟求Z的分布$F_Z(z)$已经够烦了，还要再积一步EZ，那简直要烦死了）

● 举例：

求$D(X+Y)$两个思路

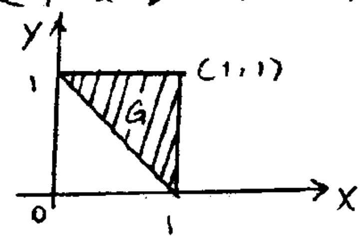
$$\begin{cases} ① \text{ 利用分布函数法或公式法，求 } Z=X+Y \text{ 的 } f_Z(z)\text{，再求 } EZ,\ EZ^2 \\ ② \text{ 利用P94下方公式，求 } E(X+Y),\ E(X+Y)^2 \\ \quad (\text{直接对 } (x+y)f(x,y) \text{ 和 } (x+y)^2 f(x,y) \text{ 积分}) \end{cases}$$

例3

设二维随机变量(X,Y)在以点$(0,1),(1,0),(1,1)$为顶点的三角形区域G内服从均匀分布，试求随机变量$X+Y$的方差。

解：由题意，(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in G\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

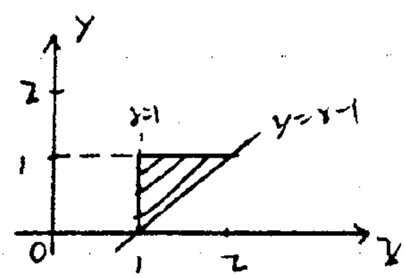


〈法I〉（根据P74–P77的讲解）

设$Z=X+Y$，则$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\,dy$

其中被积函数不为0的区域为

$$\begin{cases}0<y<1\\ 1-y<z-y<1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}0<y<1\\ 1<z<1+y\end{cases}$$



于是

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\,dy$$

$$=\begin{cases}\int_{z-1}^{1} 2\,dy, & 1<z<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases} = \begin{cases}2(2-z), & 1<z<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$EZ=\int_{-\infty}^{+\infty} z f_Z(z)\,dz=\int_1^2 2z(2-z)\,dz=\frac{4}{3}$$

$$EZ^2=\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 f_Z(z)\,dz=\int_1^2 2z^2(2-z)\,dz=\frac{11}{6}$$

$$DZ=EZ^2-(EZ)^2=\frac{1}{18}$$

〈法II〉

$$E(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x,y)\,dx\,dy$$

$$=\int_0^1 dy\int_{1-y}^{1} 2(x+y)\,dx=\frac{4}{3}$$

$$E[(X+Y)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)^2 f(x,y)\,dx\,dy$$
$$= \int_0^1 dy\int_{1-y}^{1} 2(x+y)^2 dx = \frac{33}{18}$$
$$D(X+Y) = E[(X+Y)^2] - [E(X+Y)]^2 = \frac{1}{18}$$

(kira备注：

① 依照公式法求Z的概率密度也很快，但两相比较，还是法二更为简便。

② 积分求EX比积分求分布简单，因为不需分段也不需考虑变量，直接在整个Ω概率区域上大大方方积分，把常数求出就可以了)

· 再如 $E(|X-Y|)$ 一例

(kira定心丸：遇到绝对值"| |"不要害怕，我们要做的是把它去掉，方法是分类讨论(分段积分)。很简单的，形式也很好看的。同理，对于 $E(\min\{X,1\})$ 也按分段思想，分 $X<1$ 和 $X\geq1$ 两段分别用X和1积分)

例4

设随机变量X, Y都服从区间(0,1)上的均匀分布，且相互独立，求 $E(|X-Y|)$，$D(|X-Y|)$

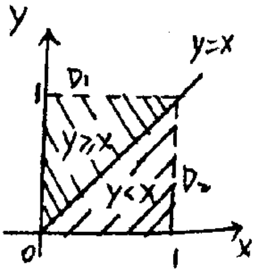
[分析][套路] 永远先求(X,Y)的联合概率密度，然后用P74法Ⅱ积分求特征函数。唯一的小变化是分段积分以去掉绝对值符号。

解：

由题设知 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

又由X与Y独立，得X与Y的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\ 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$



$$E(|X-Y|)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|x-y|f(x,y)\,dx\,dy$$

$$=\int_0^1\int_0^1 |x-y|\,dx\,dy$$
$$=\int_0^1 dx\int_0^x (x-y)\,dy+\int_0^1 dy\int_0^y (y-x)\,dx \qquad \left(=\iint_{D_2}+\iint_{D_1}\right)$$
$$=2\int_0^1 dx\int_0^x (x-y)\,dy$$
$$=2\int_0^1 \left(x^2-\frac{x^2}{2}\right)dx=\frac{1}{3}$$

$$E(|X-Y|^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|x-y|^2 f(x,y)\,dx\,dy$$ ← 平方就不用分y-x和x-y啦
$$=\int_0^1\int_0^1 |x-y|^2\,dx\,dy=\int_0^1\int_0^1 (x-y)^2\,dx\,dy=\frac{1}{6}$$
$$D(|X-Y|)=E(|X-Y|^2)-[E(|X-Y|)]^2=\frac{1}{6}-\frac{1}{3^2}=\frac{1}{18}$$

☆

· 对于具有可加性的常见分布，若Z可秒求，则先求 $f_Z(z)$

例5

设X，Y独立，$X\sim N(0,\frac{1}{2})$，$Y\sim N(0,\frac{1}{2})$，求 $D|X-Y|$

解：令 $Z=X-Y\sim N(0,1)\Rightarrow EZ=0,\ DZ=1$

$$D|Z|=EZ^2-(E|Z|)^2$$
$$EZ^2=(EZ)^2+DZ=1$$
$$E|Z|=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$
$$=2\int_0^{+\infty}z\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\Big|_{+\infty}^{0}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$
$$\Rightarrow DZ=1-\frac{2}{\pi}$$

☆

★ kira补充：常见分布的可加性

相互独立且服从同类型分布的随机变量，其和分布也是同类型的，设随机变量X与Y相互独立，则

① 若 $X\sim B(n,p)$，$Y\sim B(m,p)$，则 $X+Y\sim B(n+m,p)$
（注意：二项分布需p相同）

② 若 $X\sim P(\lambda_1)$，$Y\sim P(\lambda_2)$，则 $X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$

③ 若 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，则 $X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$

④ 若 $X\sim \chi^2(n)$，$Y\sim \chi^2(m)$，则 $X+Y\sim \chi^2(n+m)$

三 求有限个独立同分布随机变量最大值，最小值的期望和方差

设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立同分布于 $F(x)$ $(f(x))$

令 $Y=\min\{X_1,\cdots,X_n\}$，$Z=\max\{X_1,\cdots,X_n\}$ 则由P83公式

$$\begin{cases} F_Y(y)=1-[1-F(y)]^n, & f_Y(y)=n[1-F(y)]^{n-1}f(y) \\ F_Z(z)=[F(z)]^n, & f_Z(z)=n[F(z)]^{n-1}f(z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} EY=\int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\,dy, & DY=EY^2-(EY)^2 \\ EZ=\int_{-\infty}^{+\infty} z f_Z(z)\,dz, & DZ=EZ^2-(EZ)^2 \end{cases}$$

（没有新东西，自己就可以推出来）

● 此类型题常用的好结论：

$$\begin{cases} ① & \max\{X,Y\}=\frac{1}{2}(X+Y+|X-Y|) \\ ② & \min\{X,Y\}=X+Y-\max\{X,Y\}=\frac{1}{2}(X+Y-|X-Y|) \\ ③ & \max\{X,Y\}+\min\{X,Y\}=X+Y \end{cases}$$

→"横竖都是它俩…"

真题3 2012 数三23

设随机变量 X 与 Y 相互独立，且都服从参数为1的指数分布，记 $U=\max\{X,Y\}$，$V=\min\{X,Y\}$

<I> 求 V 的概率密度 $f_V(v)$

<II> 求 $E(U+V)$

解：由题 $X\sim f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$，$EX=EY=1$.

<I> $F_V(v)=P\{V\le v\}$ ← 复习

$=P\{\min(X,Y)\le v\}=1-P\{\min(X,Y)>v\}$

$=1-P\{X>v,Y>v\}=1-e^{-2v}$，$v>0$.

当 $v\le 0$ 时，$F_V(v)=0$，所以

$$f_V(v)=\begin{cases} 2e^{-2v}, & v>0 \\ 0, & v\le 0 \end{cases}$$

<II> $E(U+V)=E(X+Y)=EX+EY=1+1=2$. ※

—— 真题4　2011 数一 8 ——

设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 EX、EY 存在，记 $U=\max\{X,Y\}$，$V=\min\{X,Y\}$ 则 $E(UV)=$

(A) $EU\cdot EV$　(B) $EX\cdot EY$　(C) $EU\cdot EY$　(D) $EX\cdot EV$

[分析] 由 P98 结论

$$UV=\frac{1}{2}(X+Y+|X-Y|)\cdot\frac{1}{2}(X+Y-|X-Y|)=\frac{1}{4}[(X+Y)^2-|X-Y|^2]$$

$$=\frac{4XY}{4}=XY$$

故 $EUV=EXY=EX\cdot EY$　选B

四 利用切比雪夫不等式估计概率

公式见 P90 下方

—— 真题5　2001·4 ——

设 X、Y 为随机变量，数学期望都是2，方差分别为1和4，相关系数为0.5，试用切比雪夫不等式估计概率 $P\{|X-Y|\geq 6\}$

解：利用不等式 $P\{|X-EX|\geq\varepsilon\}\leq\frac{DX}{\varepsilon^2}$

$E(X-Y)=EX-EY=2-2=0$

$D(X-Y)=DX+DY-2\mathrm{cov}(X,Y)=1+4-2\times0.5\times2=3$

取 $\varepsilon=6$ 由切比雪夫不等式，得

$$P\{|X-Y|\geq6\}\leq\frac{D(X-Y)}{6^2}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$$

*

(Kira 备注：通常利用切不等式做估计时我们的任务是"发现 ε"（此题为6），"挪出 EX"（此题为0），和"计算 DX"（此题为3，真正的任务）)

五 求协方差，相关系数；判相关性与独立性

利用公式 $\begin{cases}\mathrm{cov}(X,Y)=EXY-EXEY\\ \rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}\end{cases}$ 和 P90 五 等价命题

离散型 把所需的分布律依次列出，求出所需数字特征，代入协方差公式（由 $\mathrm{cov}(X,Y)=EXY-EXEY$，通常需写出 X，Y 和 XY 的分布律

真题6 2012 数一、三 22

设二维离散型随机变量 (X,Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

先看需要啥

求 $\mathrm{cov}(X-Y,Y)$

解： $\mathrm{cov}(X-Y,Y)=\mathrm{cov}(X,Y)-\mathrm{cov}(Y,Y)=EXY-EXEY-DY$

求分布律如下 $X\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}$ $Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$

$$XY\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 4\\ \frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{12}\end{pmatrix}$$

求得 $EXY=0\cdot\frac{7}{12}+1\cdot\frac{1}{3}+4\cdot\frac{1}{12}=\frac{2}{3}$

$EX=0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

$\left.\begin{aligned}EY&=0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{3}=1\\ EY^2&=0^2\cdot\frac{1}{3}+1^2\cdot\frac{1}{3}+2^2\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{3}\end{aligned}\right\}DY=EY^2-(EY)^2=\frac{2}{3}$

所以 $\mathrm{cov}(X-Y,Y)=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\cdot1-\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}$ #

（Kira总结：第一步上来先把 $\mathrm{cov}(\cdot,\cdot)$ 全打开，看看需要什么东西，一个个排着求就好，难度系数0）

连续型 思路与离散型完全相同，只是 $E(g(X))$ 通过积分来求，而不用分布律.

真题7 2006 数三 22

设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1<x<0\\ \frac{1}{4}, & 0\le x<2\\ 0, & 其他.\end{cases}$

令 $Y=X^2$，$F(x,y)$ 为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数，求 $cov(X,Y)$

解.

$cov(X,Y)=cov(X,X^2)=EX^3-EXEX^2$ ← 先看看需要啥

$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx=\int_{-1}^{0}\frac{x}{2}dx+\int_{0}^{2}\frac{x}{4}dx=\frac{1}{4}$ ← 根据 $f_X(x)$ 的分段而分段积分

$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_X(x)dx=\int_{-1}^{0}\frac{x^2}{2}dx+\int_{0}^{2}\frac{x^2}{4}dx=\frac{5}{6}$

$EX^3=\int_{-\infty}^{+\infty}x^3f_X(x)dx=\int_{-1}^{0}\frac{x^3}{2}dx+\int_{0}^{2}\frac{x^3}{4}dx=\frac{7}{8}$

所以 $cov(X,Y)=cov(X,X^2)=\frac{7}{8}-\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{6}=\frac{2}{3}$.

- P90 ρ_{XY} 的性质常被拿来做文章.

真题8 2008 数一、三 8

设随机变量 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(1,4)$ 且相关系数 $\rho_{XY}=1$.

则 (A) $P\{Y=-2X-1\}=1$ (B) $P\{Y=2X-1\}=1$

(C) $P\{Y=-2X+1\}=1$ (D) $P\{Y=2X+1\}=1$

[分析] $\rho_{XY}=1$ 说明 X 与 Y 正线性相关，排除 A.C.

设 $Y=aX+b$，$a>0$.

$1=EY=aEX+b=b$ 所以 $b=1$ 所以选 D.

(P.S 可借用 $\rho_{XY}=1=\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$ 求 $a=2$，但作为选择没必要)

真题9 2001 5

将一枚硬币重复掷 n 次，以 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数，则 X 和 Y 的相关系数等于___.

[分析] 掷硬币只有正面向上和反面向上 2 种结果.

关键一步 → 故 $X+Y=n$，由 $Y=-X+n$，Y 与 X 负线性相关

所以 $\rho_{XY}=-1$ (写完了~)

如果是大题 $\rho_{XY}=\dfrac{cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\dfrac{cov(X,n-X)}{\sqrt{DX}\sqrt{D(n-X)}}=\dfrac{-DX}{\sqrt{DX}\sqrt{DX}}=-1$ ☆

- 欲判 X 与 Y 是否独立，用上一章判别式或由"相关 ⇒ 不独立"
- 欲判 X 与 Y 是否相关，用看 EXY 是否等于 EXEY，若相等则不相关
  或由"独立 ⇒ 不相关"（独立说明 X 与 Y 毫无关系，当然没有线性相关性）

$\boxed{两个重要技能 ◇_0◇ !}$

例 6

设 $X\sim N(0,\sigma^2)$，$Y=X^3$，则 X 与 Y 是否相关？是否独立？

解：$X\sim f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{\sigma})^2}$，$f(x)$ 为 x 的偶函数，故

$$EY=EX^3=\int_{-\infty}^{+\infty}x^3f(x)dx=0 \quad (\text{显然积分为奇})$$

$$EXY=EX^4=\int_{-\infty}^{+\infty}x^4\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{\sigma})^2}dx$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_0^{+\infty}x^4e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{\sigma})^2}dx$$

$$\overset{令\frac{1}{2}(\frac{x}{\sigma})^2=t}{=}\frac{4\sigma^4}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}t^{\frac{3}{2}}e^{-t}dt=\frac{4\sigma^4}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\tfrac{5}{2})$$

$$=\frac{4\sigma^4}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\tfrac{5}{2})=\frac{4\sigma^4}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=3\sigma^4\neq EXEY=0$$

故 X, Y 相关 ⇒ X, Y 不独立 ☆

△ kira 开始教两个重要技能：

① $\boxed{P93.结论}$ 若 $X\sim N(0,\sigma^2)$，则 $EX^n=\begin{cases}(n-1)!!\,\sigma^n, & n 为偶数\\ 0, & n 为奇数\end{cases}$

所以本题可以口算 $EY=EX^3=0$，$EXY=EX^4=3\sigma^4$!

做大题可以简单列式，直接出结果，且结果必对！

② $\boxed{\Gamma 函数}$（《高数辨析宝典》P77）

def：Γ 函数 $\triangleq\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx=\Gamma(\alpha)$

运算性质：$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$，$\Gamma(n+1)=n!$，$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$

- 看实例：

1) $\int_0^{+\infty}\sqrt{x}e^{-x}dx=\Gamma(\frac{1}{2}+1)=\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

2) $\int_0^{+\infty}x^2e^{-2x}dx=\frac{1}{8}\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx$（手法！）$=\frac{1}{8}\Gamma(3)=\frac{1}{4}$

（接下页）

(kira解释：第一个"="用了统一手法，把 e^{-2x} 换成 e^{-x}
详细是 $\frac{1}{8}\int_0^{+\infty}(2x)^2e^{-2x}d(2x)$ 而将 $2x$ 换成 x 后积分限仍是 $0\sim+\infty$，所以呈现出 $\frac{1}{8}\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx$)

3) $\int_0^{+\infty}x^2e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\sqrt{x}\,e^{-x}\,dx=\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}+1)=\frac{\sqrt{\pi}}{4}$

(kira再次强调：Γ函数在高数反常积分和概统特征函数计算中非常好用，可大大简化计算，一定要会！不难！)

六 二维正态分布数字特征相关问题

利用P53性质.(命题多有 $\rho=0$，即 X,Y 独立).

——真题10 2011 数一、三 14——

设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$

则 $E(XY^2)=$ ___.

解：由 $\rho_{XY}=0\Rightarrow X,Y$ 独立. 且 $EX=EY=\mu$. $DX=DY=\sigma^2$

(由P88 EX性质) $EXY^2=EX\cdot EY^2=EX\cdot((EY)^2+DY)$

$=\mu\cdot(\mu^2+\sigma^2)=\mu^3+\mu\sigma^2$ ☆

(kira备注：只要能读懂题干就能做，另外，还需掌握当 X_1,X_2 独立，$EX_1X_2=EX_1EX_2$ 这一性质. 关键不要被形式吓住.)

❗最后，我们回到P87「kira挑战」的问题：

1. $\nRightarrow$；$\Leftrightarrow$；$\Leftrightarrow$
2. $aEX+b$；a^2DX
3. P90.

4. P93. ≥, ≤ =

5. P95

6. P96.

7. P95 Ⅰ. Ⅱ.

8. P98

9. P102 - P103.

勤背公式勤练题，道不变，思路务必有理有条！

第五章

大数定律和中心极限定理

☆ 重难点：

读读P108 指导，了解定理本质

kira 前言：

本章看似公式庞杂，其实背后的思想是十分一致而深刻的。事实上，中心极限定理被认为是（非正式的）概率论中的首席定理。本章不作为考试重点，理解好内涵，以不变应万变，考前背背公式即可。

基础概念 & 必备常识

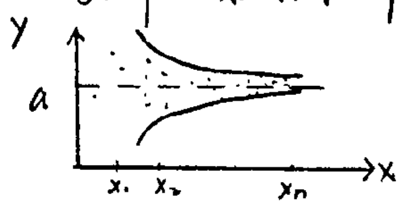
一 依概率收敛

▶定义：设随机变量序列 $\{X_n\}$，$n=1,2,3\dots$，随机变量 X（或常数 a）如果对任意 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|X_n-X|<\varepsilon\}=1 \quad 或 \quad \lim_{n\to\infty} P\{|X_n-a|<\varepsilon\}=1$$

则称随机变量序列 $X_n \xrightarrow{P} X$ 或 $X_n \xrightarrow{P} a$

读作"X_n 依概率收敛于 X"或"X_n 依概率收敛于 a"



（归于 a 附近的极窄小条）

▶性质：设 $X_n \xrightarrow{P} X$，$Y_n \xrightarrow{P} Y$，$g(x,y)$ 是二元连续函数，

则 $g(X_n,Y_n) \xrightarrow{P} g(X,Y)$.

二 大数定律（大数即大样本，$n\to\infty$）

① 切比雪夫："$\{X_n\}$ 相互独立"+"$DX_k\,(k\geq 1)$ 存在"+"DX_k 一致有上界"

则 $\{X_n\}$ 服从大数定律 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} EX_i\right)$

② 伯努利：μ_n 是 n 重伯努利试验中事件 A 发生次数，在每次试验中 A 发生概率为 $p\ (0<p<1)$，则 $\frac{\mu_n}{n} \xrightarrow{P} p$.

③ 辛钦："$X_i \overset{iid}{\sim} F$" + "$EX_k=\mu$ 存在"，则有 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} \mu$.
（备注：$X_i \overset{iid}{\sim} F$ 即 X_i 独立同分布于某分布 F）

（☺ 大数定律研究的是平均值的稳定性，结论是：样本均值依概率收敛于平均值的数学期望.）

三 中心极限定理（"中心"指其在概率论中的重要地位，古式不误）

▲① 列维－林德伯格（独立同分布中心极限定理）

设 $X_1,\cdots,X_n \overset{iid}{\sim} F$，若 $EX_n=\mu$，$DX_n=\sigma^2>0$（即 $X_i \overset{iid}{\sim} F(\mu,\sigma^2)$）
则

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \underset{\text{近似服从}}{\overset{n\to\infty}{\sim}} N(n\mu, n\sigma^2)$$

② 棣莫弗－拉普拉斯（二项分布以正态分布为极限分布定理）
设 $X_1,\cdots,X_n \overset{iid}{\sim} B(1,p)$，则

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \underset{\text{近似服从}}{\overset{n\to\infty}{\sim}} N(np, np(1-p))$$

（备注：其实②是①的特别情况. ①是非常具有一般性的好结论. "独立同分布"是不可缺少的重要条件）

（☺ 中心极限定理研究的是独立随机变量和的极限分布为正态分布，所以中心极限定理比大数定律揭示的现象更深刻，成立的条件也更苛刻，即要求 DX_i 存在，大数定律只要求 EX_i 存在）

解题思路

以上公式重在理解，把握好 $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$
再根据题意推导即可.

真题1　2005 数一、三 14

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 为独立同分布的随机变量列，且均服从于参数 λ $(\lambda>1)$ 的指数分布，记 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则

(A) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\lambda}{\lambda\sqrt{n}} \le x\right\} = \Phi(x)$

(B) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \le x\right\} = \Phi(x)$

(C) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\lambda\sum_{i=1}^{n} X_i - n}{\sqrt{n}} \le x\right\} = \Phi(x)$

(D) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \lambda}{\sqrt{n\lambda}} \le x\right\} = \Phi(x)$.

[分析] 根据我们之前学过的内容，本题要求我们具备以下知识。

① $\Phi(x) = P\{X \le x\}$，换言之，我们需从 A、B、C、D 这四坨分式中，挑出哪一坨是服从 $N(0,1)$ 的随机变量。

② $X_i \sim E(\lambda)$，则 $EX_i = \dfrac{1}{\lambda}$，$DX_i = \dfrac{1}{\lambda^2}$，背 P89 表格。

③ $\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{n\to\infty}{\sim} N\left(\dfrac{n}{\lambda}, \dfrac{n}{\lambda^2}\right)$，标准化有

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{n}{\lambda}}{\sqrt{\frac{n}{\lambda^2}}} \overset{n\to\infty}{\sim} N(0,1)$$

即 $$\frac{\lambda\sum_{i=1}^{n} X_i - n}{\sqrt{n}} \overset{n\to\infty}{\sim} N(0,1) \quad 选 C.$$

（☺ kira备注：

你必须看到一道题能像这样，瞬间抓出所有考点，并依次定位在本书的确切章节（或自己书的确切章节）且各种公式清清楚楚，一步步有条不紊地完成题目，才敢说已做好准备去考试了！）

第六章

数理统计的基本概念

先看Kira前言. Kira挑战（P121答案）

考察点

- P113 三个概念，真心理解了
- P114 下分性质
- P117 别三大分布之心机方法
- P119 若型题你懂掌握

kira前言：

本章公式较多，做题折腾式子需要有较为扎实的计算功底和对公式深刻的理解。只需熟记以下内容，做题便够用：一个总体的 $\bar{X}$，S^2，$E\bar{X}$，$D\bar{X}$，ES^2 和 χ^2 分布，t 分布，F 分布。

有的同学跟我说，判断分布和自由度太难了，想放弃。千万别！这种题出出来，有一个算一个都是送分的！其实答案都刻在原题中了。

kira挑战

1. 什么是总体？什么是样本？什么是统计量？数理统计到底在干嘛？意义何在？
2. 当总体 X 有 $EX=\mu$，$DX=\sigma^2$，则其容量为 n 的样本 $X_1,\cdots,X_n$ 有：$EX_i=$__，$DX_i=$__，$E\bar{X}=$__，$D\bar{X}=$__，$ES^2=$__，$DS^2=$__。
3. 取自单正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本 $X_1,\cdots,X_n$，$\bar{X}$ 和 S^2 各自服从什么分布？
4. 如何判断统计量服从于 χ^2，t，F 三大分布中的哪个？

基础概念 & 必备常识

一 概念与术语

① 总体：研究对象全体对应的某一随机变量（指标）

② 样本（只研究"简单随机样本"）：对总体 X 的 n 次观察得到的 n 个相互独立且同分布于 X 的随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 称为来自总体 X 的样本，称 n 为样本容量。

▲③ 统计量：若样本函数 $g(X_1,\cdots,X_n)$ 中不含分布的未知参数，

则称 $g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为统计量.（统计量是随机变量）

（kira备注：统计之于概率论，相当于现实之于理想，我们做概率论题目时分布都给好，其实都是纸上谈兵，现实是我们根本不知道总体是什么分布，有什么特征，而只能从抽取的样本和样本统计量来推断总体，是为估计。抽样分布是统计推断的理论基础）

二 样本的分布

若总体 X 的分布函数为 $F(x)$，则 $(X_1, \cdots, X_n)$ 的联合分布函数

$F(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F(x_i)$ ，相应地，我们有

- 离散型：$P\{X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n\} = \prod_{i=1}^{n} P\{X_i = x_i\}$
- 连续型：$f(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$

三 常用统计量

① 样本均值 $\bar{X}$：$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

② 样本方差 S^2：$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2\right)$

③ 顺序统计量：将样本 $(X_1, \cdots, X_n)$ 的 n 个观测量按取值从小到大顺序排列，得 $X_{(1)} \le X_{(2)} \le \cdots \le X_{(n)}$

$X_{(k)}$ 称第 k 顺序统计量，其中 $X_{(1)} = \min\{X_1, \cdots, X_n\}$

$X_{(n)} = \max\{X_1, \cdots, X_n\}$

> kira备注：由我们前面提过无数次的 max, min 分布：
>
> $X_{(n)}$ 的分布函数为 $F_{(n)}(x) = [F(x)]^n$
>
> $X_{(1)}$ 的分布函数为 $F_{(1)}(x) = 1 - [1 - F(x)]^n$

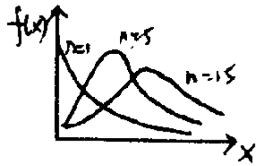
性质 设总体 X 的期望 $EX = \mu$，方差 $DX = \sigma^2$，则 背

① $EX_i = \mu$，$DX_i = \sigma^2$ ② $E\bar{X} = \mu$，$D\bar{X} = \frac{\sigma^2}{n}$ ③ $ES^2 = \sigma^2$，$DS^2 = \frac{2\sigma^4}{n-1}$

四 三大抽样分布 (以下都隐含标准正态分布；X_i间、X,Y间独立)

χ^2分布 读"卡方"

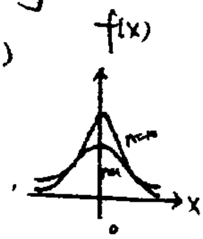
• 若随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立，且都服从于标准正态分布，
则 $X=\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 服从自由度为n的χ^2分布，记为 $X\sim\chi^2(n)$
特别地 $X_i^2\sim\chi^2(1)$.



• 性质：① 若 $X_1\sim\chi^2(n_1)$，$X_2\sim\chi^2(n_2)$，X_1与X_2独立，
则 $X_1+X_2\sim\chi^2(n_1+n_2)$
② 若 $X\sim\chi^2(n)$，则 $EX=n$，$DX=2n$ 背

t分布

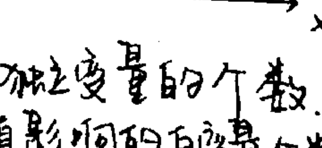
• 设随机变量 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim\chi^2(n)$，X与Y相互独立，则
$T=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 服从自由度为n的t分布，记为 $T\sim t(n)$



• 性质：① t分布的概率密度 $f(x)$ 图形关于$x=0$对称，
故 $ET=0$.
② 当$n\to\infty$时($n>45$时)，$T \overset{\text{近似}}{\sim} N(0,1)$

F分布

• 设随机变量 $X\sim\chi^2(n_1)$，$Y\sim\chi^2(n_2)$ 且X与Y独立，
则 $F=\frac{X/n_1}{Y/n_2}$ 服从自由度为 n_1和n_2的F分布，
记为 $F\sim F(n_1,n_2)$，其中n_1为第一自由度，n_2为第二自由度



• 性质：① 若 $F\sim F(n_1,n_2)$，则 $\frac{1}{F}\sim F(n_2,n_1)$

(kira备注：所谓"自由度"是指和式中独立变量的个数，
或通俗说，不受其它变量取值影响的自变量个数)

三 单正态总体统计量分布

设 $X_1, \cdots, X_n$ 都是取自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本，则

(1) $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ 有 $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1)$

背　　自己推

(2) $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ ，$\bar{X}$ 与 S^2 独立

背　　重要结论

(3) $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

(4) $F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(m-1, n-1)$

（kira备注：一定要 X_i 取自正态总体才有以上分布，不要记混，其中(1)(2)非常重要，应作为基本常识。）

解题套路

一 判断分布问题

判断正态分布

例1

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, X_{n+1}$ 为来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，求：

(1) $X_{n+1} - \bar{X}$ 服从的分布　　(2) $X_1 - \bar{X}$ 服从的分布

解：

(1) $X_{n+1} \sim N(\mu, \sigma^2)$，$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 与 X_{n+1} 独立，所以 $X_{n+1} - \bar{X}$ 服从正态分布

有 $E(X_{n+1} - \bar{X}) = EX_{n+1} - E\bar{X} = 0$

$D(X_{n+1} - \bar{X}) = DX_{n+1} + D\bar{X} = \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n} = \frac{n+1}{n}\sigma^2$

综上 $X_{n+1} - \bar{X} \sim N(0, \frac{n+1}{n}\sigma^2)$

(2) 因 $X_1-\bar{X}$ 是 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的线性函数，故 $X_1-\bar{X}$ 服从正态分布，$E(X_1-\bar{X})=EX_1-E\bar{X}=\mu-\mu=0$

下面求 $X_1-\bar{X}$ 的方差

〈法一〉 $X_1-\bar{X}=X_1-\frac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n)=\frac{n-1}{n}X_1-\frac{1}{n}X_2-\cdots-\frac{1}{n}X_n$

所以 $D(X_1-\bar{X})=D\left(\frac{n-1}{n}X_1-\frac{1}{n}X_2-\cdots-\frac{1}{n}X_n\right)$

$$=\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^2+(n-1)\frac{1}{n^2}\right]\sigma^2=\frac{n-1}{n}\sigma^2$$

〈法二〉 $D(X_1-\bar{X})=DX_1+D\bar{X}-2\operatorname{cov}(X_1,\bar{X})$

$$=\sigma^2+\frac{\sigma^2}{n}-2\times\frac{\sigma^2}{n}=\frac{n-1}{n}\sigma^2$$

其中因 X_1 与 $X_2,\cdots,X_n$ 均相互独立，所以

$$\operatorname{cov}(X_1,\bar{X})=\operatorname{cov}\left(X_1,\frac{1}{n}X_1+\frac{1}{n}X_2+\cdots+\frac{1}{n}X_n\right)$$

$$=\operatorname{cov}\left(X_1,\frac{1}{n}X_1\right)=\frac{1}{n}\operatorname{cov}(X_1,X_1)=\frac{1}{n}DX_1=\frac{\sigma^2}{n}$$

综上 $X_1-\bar{X}\sim N\left(0,\frac{n-1}{n}\sigma^2\right)$

☆

kira备注：

① 这是一道非常深刻的好题，必须掌握结论“有限个相互独立正态随机变量的线性函数仍服从正态分布”，因而将求分布的问题简化为求 EX 和 DX 的问题。

② 第(1)问和第(2)问在独立性判别上有方法差别。其中 X_{n+1} 与 $\bar{X}$ 显然独立；而(2)中 $\bar{X}$ 含有 X_1，但当我们把 $\bar{X}$ 展开，会发现 $X_1-\bar{X}$ 是关于 $X_1,\cdots,X_n$ 的线性函数，独立性隐含其中，依然成立。

③ (2)中求方差的两种方法，法一是彻底拆开 $\bar{X}$ 来求，法二将 $\bar{X}$ 视为整体来求，都可借存。

▶ $\boxed{\text{判断三大抽样分布}}$

考试十分爱考的送分题，要注意把握三种分布的特征

★① χ^2 分布：平方和 ★② t 分布：$\frac{\text{正态分布}}{\sqrt{\text{平方和}}}$ ★③ F 分布：$\frac{\text{平方和}}{\text{平方和}}$

◇ 比如，只要看到 $\dfrac{\text{正态分布}}{\sqrt{\text{平方和}}}$ 的形式，几乎可直接断定服从 t 分布，自由度与平方和的项数相同，而管分子是不是标准正态，自由度 n 有没有拿出来，结果都是明摆着的，凑式子只是表面功夫（当然，这点基本功要有）

▲ P.S. 关于 t 分布的心机考法：当分母平方和仅为一项时（自由度为1），整个式子会呈现出 $\dfrac{\text{正态分布}}{|\text{正态分布}|}$ 的形式，直接预判服从于 $t(1)$

—— 真题 2001 数一.三 5 ——

设总体 X 服从于正态分布 $N(0,2^2)$，而 $X_1,\cdots,X_{15}$ 来自总体 X 的简单随机样本，则随机变量 $Y=\dfrac{X_1^2+\cdots+X_{10}^2}{2(X_{11}^2+\cdots+X_{15}^2)}$ 服从 ___ 分布，参数为 ___。

[分析]

分子 10 项平方和，分母 5 项平方和，立即推服从 $F(10,5)$

再验证一下：$\dfrac{X_i}{2}\sim N(0,1)$，分子、分母独立。

$$Y=\frac{\left[\left(\frac{X_1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{X_{10}}{2}\right)^2\right]/10}{\left[\left(\frac{X_{11}}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{X_{15}}{2}\right)^2\right]/5}=\frac{X_1^2+\cdots+X_{10}^2}{2(X_{11}^2+\cdots+X_{15}^2)}\sim F(10,5)$$

果然！　填 F；$(10,5)$

—— 真题 2014 数三 8 ——

设 X_1,X_2,X_3 为来自正态总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，则统计量 $S=\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}|X_3|}$ 服从的分布为

A. $F(1,1)$　B. $F(2,1)$　C. $t(1)$　D. $t(2)$

[分析]

显然，连个平方都没有，A、B 直接排除，依我上面 P.S 所言

初步判断为 $t(1)$. 再验证一下：

$\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0,1)$，$\frac{X_3}{\sigma} \sim N(0,1)$，$\left(\frac{X_3}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(1)$

所以 $S = \frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}|X_3|} = \frac{\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}}{\sqrt{\left(\frac{X_3}{\sigma}\right)^2/1}} \sim t(1)$ 果然！

二 统计量数学期望与方差计算

熟记常用统计量分法. P114 下方 6 个特征函数. P115 χ^2 分布性质. 做题化来化去逃不出这个范围. 同时要把特征函数计算的功底打牢. (P87 性质)

—— 例 2 —— "小试牛刀"

设 $X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ 是来自总体 $X \sim \chi^2(n)$ 的样本，$\bar{X}$ 是样本均值，求 $E(\bar{X})$ 与 $D(\bar{X})$.

解：$EX = n$，$DX = 2n$

所以 $E\bar{X} = EX = n$，$D\bar{X} = \frac{\sigma^2}{10} = \frac{2n}{10} = \frac{n}{5}$.

(kira 备注：此题看似简单，实则很容易错，概念一点含糊都不行. ① "$X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ 是来自总体 $X \sim \chi^2(n)$" 的样本，是说 $X_i \sim \chi^2(n)$，自由度为常数 n，对 X_i 不需要再平方了 ② $D\bar{X} = \frac{\sigma^2}{n}$ 公式中的 n 是指样本容量 10. 与自由度 n 区分，不要混)

—— 真题 2010 数三. 14 ——

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ $(\sigma>0)$ 的简单随机样本，记统计量 $T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$，则 $ET =$ ___.

[分析]

$ET = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[DX_i + (EX_i)^2] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[\sigma^2+\mu^2]$

$= \sigma^2+\mu^2$ (本章内容都只是形式复杂，本质都是老东西，十分简单)

· BMDM ·

—— 真题 2011 数三 8 ——

设总体服从参数为 λ $(\lambda>0)$ 的泊松分布，$X_1, \cdots, X_n$ $(n\geq 2)$ 为来自该总体的简单随机样本，则对于统计量 $T_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 和 $T_2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}X_i+\frac{1}{n}X_n$，有

(A) $ET_1>ET_2$，$DT_1>DT_2$　　B. $ET_1>ET_2$，$DT_1>DT_2$

(C) $ET_1<ET_2$，$DT_1>DT_2$　　D. $ET_1<ET_2$，$DT_1<DT_2$

[分析]

$X\sim P(\lambda)$　所以 $EX=\lambda$，$DX=\lambda$，由 $X_i\overset{iid}{\sim}P(\lambda)$

$ET_1=E(\overline{X})=\lambda$，　$DT_1=D\overline{X}=\frac{\lambda}{n}$

而 $ET_2=E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}X_i\right)+E\left(\frac{1}{n}X_n\right)=\lambda+\frac{\lambda}{n}$

$DT_2=D\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}X_i\right)+D\left(\frac{1}{n}X_n\right)=\frac{\lambda}{n-1}+\frac{\lambda}{n^2}$

所以 $ET_1<ET_2$，$DT_1<DT_2$

(☺ Kira备注：①做出此题的前提是背好泊松分布等常见分布的特征函数 EX、DX。② $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 和 $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}X_{i}$ 都是 $\overline{X}$，都可用 $E\overline{X}$ 和 $D\overline{X}$ 公式，只是样本量不同；$\frac{1}{n}X_n$ 只是添加给 X_n 的系数而已，利用 EX 和 DX 的运算性质来求解)

—— 真题 2001 数三 12 ——

设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ $(\sigma>0)$，从该总体中抽取简单随机样本 $X_1, X_2, \cdots, X_{2n}$ $(n\geq 2)$，样本均值 $\overline{X}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}X_i$，求统计量 $Y=\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2$ 的数学期望 EY.

解：

<法一>（把括号全打开）（不推荐）

$Y=\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i^2+X_{n+i}^2+4\overline{X}^2+2X_iX_{n+i}-4X_i\overline{X}-4X_{n+i}\overline{X})$

$=\sum_{i=1}^{2n}X_i^2+2\sum_{i=1}^{n}X_iX_{n+i}-4n\overline{X}^2$

$EY=\sum_{i=1}^{2n}E(X_i^2)+2\sum_{i=1}^{n}EX_iEX_{n+i}-4nE(\overline{X}^2)$

$=2n(\sigma^2+\mu^2)+2n\mu^2-4n(\frac{\sigma^2}{2n}+\mu^2)=2(n-1)\sigma^2$

在以上步骤中用到了:

- $\sum_{i=1}^{n}(X_i^2+X_{n+i}^2)=\sum_{i=1}^{2n}X_i$;
- $\sum_{i=1}^{n}(4X_i\bar{X}+4X_{n+i}\bar{X})=4\bar{X}\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i})=4\bar{X}\cdot 2n\bar{X}=8n\bar{X}^2$;
- $\sum_{i=1}^{n}4\bar{X}^2=4n\bar{X}^2$

(要会在 $\sum_{i=1}^{n}$ 和 $\sum_{i=1}^{2n}$ 间灵活变换，要明白 X_i 和 X_{n+i} 各自的角色)

〈法二〉(观察，大胆猜测，构造新样本)(推荐)

把 $(X_1+X_{n+1}),(X_2+X_{n+2}),\cdots,(X_n+X_{n+i})$ 看成取自总体 $N(2\mu,2\sigma)$ 的简单随机样本.

样本均值 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i})=2\bar{X}$

样本方差 $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\bar{X})^2=\frac{Y}{n-1}$

所以 $EY=(n-1)E(\frac{Y}{n-1})=(n-1)\cdot 2\sigma^2=2(n-1)\sigma^2$

要学好此部分，需深刻理解独立同分布(即 $X_1,\cdots,X_{2n}$ 的关系)
深刻理解各统计量真正内涵及公式(即 $\bar{X}, S^2$ 等)
熟练运用 EX 和 DX 的运算性质(如线性性等)

该理解的都理解了，该有的自信也就有了.
做题慢慢来，沉住气，肯定能走出来.

最后，我们回到 P_{113}「Kira挑战」的问题

1. $P_{113}-P_{114}$
2. P_{114} 下方
3. P_{116}.
4. $P_{117}-P_{118}$

第七章

参数估计

突降点,

P126-P127　对矩估计的带实例全剖析
P130　"原始公式就像岸库中的提拳" ▽ ▽
P132　估计值 vs 估计量

Kira前言：

单纯从考试做题的角度来说，本章需要学的新内容仅是关于估计的一些概念和列式方法，关键考点还在于之前章节的特征函数计算，抽样分布计算。本章对数三要求较低，了解参数的点估计，估计量和估计值的概念，掌握矩估计法和最大似然估计法即可。而数一还需了解估计量的无偏性，有效性和一致性，并会验证估计量的无偏性（算期望）

基础概念&必备常识

一、点估计 （读一下这个概念并理解）

① **估计量** 设总体 X 的分布函数为 $F(x;\theta)$，其中 θ 是一个未知参数，$(X_1,\cdots,X_n)$ 是取自总体 X 的一个样本，由样本构造一个统计量 $T(X_1,\cdots,X_n)$ 作为参数 θ 的估计，则称统计量 T 为 θ 的估计量，记为 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$

② **估计值** 如果 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是样本的一个观察值，将其代入估计量 $\hat{\theta}$ 中得 $\hat{\theta}(x_1,\cdots,x_n)$ 以此作为未知参数 θ 的近似值，统计中称这个值为未知参数 θ 的估计值。

③ **点估计** 建立一个统计量作为未知参数 θ 的估计量，并以相应观察值作为未知参数估计值的问题，称为参数的点估计问题。

矩估计 以样本矩来估计总体矩，以样本矩的函数来估计总体矩的函数。

定义：

设总体 X 分布中有 k 个未知参数 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是来自总体 X 的样本，如果 X 的原点矩 EX^l $(l \geq k)$ 存在，令样本矩等于总体矩。

即

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^l = EX^l \quad (l=1,2,\cdots k)$$

解得 $\hat{\theta}_i = \hat{\theta}_i(X_1, \cdots X_n)$ $(i=1,2,\cdots k)$

从一阶矩列到k阶矩，一共k个方程

把k个未知 θ_i 全解出来

（😊 Kira 大白话时间：

总体矩 EX^l 是"大自然的"是这个世界上的客观存在"一定是真实的、准的；而样本是我们从整体中抽出来的，所以样本及其构造的统计量不可能反映总体的全部信息。$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^l$ 是估计量，不是真的，是粗略的）

◆ 趁热打铁，我们用一道例题翻译一下上面"乱七八糟"的定义：

例 1

设总体 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}, & x > \mu, \theta > 0 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

其中参数 μ, θ 均未知，$X_1, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的样本。求 μ, θ 的估计量。

[Kira 分析]

按本页上方定义的讲法来描述此题，即为"设总体 X 分布中有 2 个未知参数 μ 和 θ，$(X_1, \cdots, X_n)$ 是来自总体的样本，令样本矩等于总体矩即

$$\begin{cases} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = EX & ① \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = EX^2 & ② \end{cases}$$

指数在不断地同步，非常好记！

解得 $\begin{cases} \hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,\cdots X_n) \\ \hat{\mu}=\hat{\mu}(X_1,\cdots,X_n) \end{cases}$

（定义翻译完毕，有木有稍微形象一些 ◡̈ ）

▲ kira备注：求矩估计的问题，有n个未知参数，就列n个方程，求到n阶矩；多数考题只有一个未知参数θ所以用 $EX=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 这一个方程就够了。

解：用 μ_1 表示样本一阶矩 $\bar{X}$

用 μ_2 表示样本二阶矩 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$

由题，用样本矩替换总体矩

$$\begin{cases} \mu_1=EX=\int_{\mu}^{+\infty}x\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}dx=\mu+\theta \\ \mu_2=EX^2=\int_{\mu}^{+\infty}x^2\cdot\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}dx=\mu^2+2\mu\theta+2\theta^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mu=\mu_1-\sqrt{\mu_2-\mu_1^2},\quad \theta=\sqrt{\mu_2-\mu_1^2}$$

用样本一阶矩二阶矩分别替换 μ_1,μ_2

得 μ,θ 的矩估计

$$\hat{\mu}=\bar{X}-\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\bar{X}^2}$$

$$\hat{\theta}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\bar{X}^2}$$

☆

（◡̈ kira梳理：

撸一下此处用的知识 ①列式，定义，我和们详细解你们"翻译"了一遍，应该每个人都能get到会列了~

② 计算总体矩 EX，EX^2，用第四章知识，视 μ，θ 为常数。

③ 解 μ 和 θ 的二元一次方程组，高中技能。

④ 用样本矩换掉 μ_1，μ_2，体育老师也会，做完了。）

最大似然估计

（我觉得这真的是一种非常聪明的方法！~）

离散型 总体 $X\sim p(x,\theta)$，样本 $X_1,\cdots,X_n$ 的一组样本观察值为 $x_1,x_2,\cdots x_n$，称 $L(\theta)=P\{X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n\}=\prod_{i=1}^{n}p(x_i,\theta)$ 为样本 $X_1,\cdots,X_n$ 的<u>似然函数</u>　　（$\theta\in\Theta$ 未知）

连续型 总体 $X\sim f(x,\theta)$，样本 $X_1,\cdots X_n$ 的一组样本观察值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，称 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)$ 为样本 $X_1,\cdots X_n$ 的似然函数.

小写

若 $\hat\theta=\hat\theta(x_1,\cdots,x_n)$ 使得 $L(\hat\theta)=\max\limits_{\theta\in\Theta}L(\theta)$，则称 $\hat\theta=\hat\theta(x_1,\cdots x_n)$ 为 θ 的最大似然估计值，相应的估计量 $\hat\theta=\hat\theta(X_1,\cdots,X_n)$ 称为 θ 的最大似然估计量.

大写

kira 解释：

最大似然估计的想法是，从总体中抽取样本的试验E有很多种可能的结果，我随便抽样本，偏偏就抽中了A这组样本，则我们有理由认为A发生的概率最大。以此为前提，我们作估计的目标是，找出一个 θ 的值，使A这组样本出现的概率最大.

（例题后面细说）

三 参数点估计的评选标准

无偏性 若 $E(\hat\theta)=\theta$，则称 $\hat\theta$ 为 θ 的无偏估计量.

注 ① θ 的无偏估计量不唯一 ② $\bar X$ 是 EX 的无偏估计

. pmnm .

③ S^2 是总体方差的无偏估计

④ 样本K阶原点矩 $\frac{1}{n}\sum X_i^k$ 是总体相应原点矩 EX^k 的无偏一致估计

▶ **有效性** 对 θ 的两个无偏估计量 $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$，若对任意 $\theta\in\Theta$，有 $D(\hat{\theta}_1)\le D(\hat{\theta}_2)$，且至少对某一个 $\theta\in\Theta$ 有不等号成立，则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效.（无偏前提下才比较有效性）.

▶ **相合性** 若 $\hat{\theta}$ 依概率收敛到 θ，则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的相合估计量.

解题套路

● 常见题型依次如下：

一. 求总体未知参数的矩估计.

二. 求最大似然估计 { 离散型总体 / 连续型总体 }

三. 验证估计量的无偏性 （数一）

一 求总体未知参数的矩估计

P126 - P127 我们已详细讨论过，下面再梳理一下套路.

step 1. 求总体的矩 $\begin{cases}\mu_1=EX=g_1(\theta_1,\theta_2)\\ \mu_2=EX^2=g_2(\theta_1,\theta_2)\end{cases}$

step 2. 反解出参数 $\theta_1=h_1(\mu_1,\mu_2)$, $\theta_2=h_2(\mu_1,\mu_2)$

step 3. 替换：$\hat{\theta}_1=h_1(\bar{X},\frac{1}{n}\sum X_i^2)$, $\hat{\theta}_2=h_2(\bar{X},\frac{1}{n}\sum X_i^2)$

（☺ 最终结果一定是用估计量（样本观察值）来表示总体参数）

真题 2013 数一、三. 23.

设总体X的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{\theta^2}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x}}, & x>0\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

其中θ为未知参数且大于零. $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体X的简单随机样本.

(1) 求θ的矩估计量.

解:

$$令\ \bar{X}=EX=\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x;\theta)\,dx$$

$$=\int_0^{+\infty} x\cdot\frac{\theta^2}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x}}\,dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\left(\frac{\theta}{x}\right)^2 e^{-\frac{\theta}{x}}\,dx=\theta$$

除此公式就像凑出来的提升，给自己一个缓冲机会，慢慢来~

所以θ的矩估计量 $\hat{\theta}=\bar{X}$，其中 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

(二) 求最大似然估计

离散型总体

由分布律写似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)$，再取 $\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}\ln p(x_i;\theta)$ 求最大值点 θ.

（Kira 备注：其实写 $L(\theta)$ 有种写联合分布律的感觉，思路的确是类似的，即写出"取得当前这组样本值的概率"，但不同之处在于 $L(\theta)$ 的变量是θ）.

真题 2002. 12. 数一

设总体X的概率分布 $X\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ \theta^2 & 2\theta(1-\theta) & \theta^2 & 1-2\theta\end{pmatrix}$

其中 $\theta\ (0<\theta<\frac{1}{2})$ 是未知参数，利用总体X的如下样本值 3,1,3,0,3,1,2,3 求 θ 的最大似然估计值.

解：样本值：4个3　1个2　2个1　1个0

$$L(\theta)=(1-2\theta)^4\theta^2[2\theta(1-\theta)]^2\theta^2$$
$$=4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4$$

取 $\ln L(\theta)=\ln 4+6\ln\theta+2\ln(1-\theta)+4\ln(1-2\theta)$

令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{6}{\theta}-\frac{2}{1-\theta}-\frac{8}{1-2\theta}=0$

解得 $\hat\theta_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{13}}{12}$，由于 $\theta\in(0,\frac{1}{2})$

所以 θ 的最大似然估计为 $\hat\theta=\frac{7-\sqrt{13}}{12}$ ☆

▶ 连续型总体

$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)$
$\begin{cases}\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} & \text{有解 ok} \\ \frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} & \text{无解，看单调性求估计值.}\end{cases}$

真题2013 数一、三 23

设总体X的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{\theta^2}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x}}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中 θ 为未知参数且大于零. $X_1,\cdots,X_n$ 为来自总体X的简单随机样本

解 (Ⅱ) 求 θ 的最大似然估计量

设 $x_1,x_2,\cdots x_n$ 为样本观测值.,

似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\begin{cases}\frac{\theta^{2n}}{(x_1x_2\cdots x_n)^3}e^{-\theta\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}, & x_1,x_2,\cdots,x_n>0\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

提笔写"$L(\theta)=$"
慢慢就想起该怎么列式子了😊

当 $x_1,x_2,\cdots,x_n>0$ 时，$\ln L(\theta)=2n\ln\theta-\theta\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}-3\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{2n}{\theta}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}=0$ 求得θ的最大似然估计值

$$\hat{\theta}=\frac{2n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$$

所以θ的最大似然估计量为 $\hat{\theta}=\frac{2n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i}}$ ✲

Kira特别强调:
一定一定要看是求"估计值"还是"估计量",这是考点!!
估计值用小写字母 x_i,是用样本观测值表示的.
而估计量用大写字母 X_i,是用随机变量表示的.

我们写最大似然估计的 $L(\theta)$ 时,用到的是样本观测值 $(x_1,\cdots,x_n)$,如果最后问的是最大似然估计量一定记得换大写字母.

Kira备注:

① 连续型总体写 $L(\theta)$ 时不要忘记 $x_1,\cdots,x_n$ 的范围.需要根据 $x_1,\cdots,x_n$ 的范围来确定得到的估计是否符合题意.

② 求 $\ln L(\theta)$ 时看着θ写,把其他字母看作常数.有几种θ就写成几项,方便求导.

—— 真题 2000 数一 13 ——

设某种元件的使用寿命X的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)}, & x>\theta\\ 0, & x\le\theta\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 为未知参数,又设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是X的一组样本

观测值，求参数θ的最大似然估计值.

解.

似然函数 $L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\begin{cases}2^n e^{-2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)}, & x_i>\theta, i=1,\cdots,n\\ 0, & 其他.\end{cases}$

当 $x_i>\theta$, $i=1,2,\cdots n$时 $L(\theta)>0$. 取对数得

$$\ln L(\theta)=n\ln 2-2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)$$

而

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=2n>0.$$

所以 $L(\theta)$ 单增，要使$L(\theta)$最大，则θ越大越好，但θ必须满足 $\theta<x_i$，$i=1,2,\cdots,n$，因此当θ取$\min\{x_1,\cdots,x_n\}$ $L(\theta)$取最大值，所以θ的最大似然估计值为

$$\hat{\theta}=\min\{x_1,\cdots,x_n\}$$

☆

（☺ kira备注：

有的同学一看到$L(\theta)$单调就觉得无望踢了，其实正是你发挥推理能力大显身手的好机会. $\theta<x_i$ 所以 θ能取到的最大值便是$\{x_1,\cdots,x_n\}$的下界，即$\min\{x_1,\cdots,x_n\}$ 根据最大似然函数的原理分析即可.）

三 验证估计量的无偏性

利用 $E(\hat{\theta})=\theta$

—— 真题2008 数一.23 ——

设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是总体$N(\mu,\sigma^2)$的简单随机样本.

记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，$T=\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2$

(1) 证明T是μ^2的无偏估计量.

解.

$$E(T) = E\left(\bar{X}^2 - \frac{1}{n}S^2\right) = E(\bar{X}^2) - \frac{1}{n}E(S^2)$$
$$= D(\bar{X}) + [E\bar{X}]^2 - \frac{1}{n}ES^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \mu^2$$

所以 T 是 μ^2 的无偏估计量 ☆

（kira备注：到这基本可以看出本章的列式套路都是十分固定的，第四章数字特征，第六章抽样分布底子没打牢的请往回翻翻，重新扎实一下）

真题 2009 数一 14

设 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 为来自二项分布总体 $B(n,p)$ 的简单随机样本，$\bar{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差．若 $\bar{X}+kS^2$ 为 np^2 的无偏估计量，则 $k=$ ＿＿．

解：

根据无偏估计定义列式

二项分布的数字特征

$$E(\bar{X}+kS^2) = E\bar{X} + kES^2 = np + knp(1-p) = np^2$$

S^2是总体方差的无偏估计

$\Rightarrow np(1+k) - knp^2 = np^2$

解得 $k=-1$ ☆

（kira总结：统计每年必考一大题，我自己考生也是统计，很多同学觉得做得不顺手，我认为问题主要出在两点，一是概念不清，且不说估计部分相对复杂的概念，即使是总体、样本、统计量这些基本概念，很多人到最后也没搞明白，看题不犯怵才怪；二是计算弱，公式背得不熟，运算法则糊里糊涂，括号怎么打开，能不能打开都没有自信判断。考前务必要背好第四章和第六章的性质、公式，为做统计大题打下坚实基础！）

附录：

Kira考研期间

原版概念框架

（可借鉴：关注点，详与略，逻辑框架，不写废话）

（*注：看不进去就抄一遍，可以激发很多思考，想明白很多东西）

PS. 我在框架最上方曾这样写道：

记入　　概念框架、思路、套路！

（针对做题血崩点）

第一章 随机事件与概率

一、随机事件　1. 运算律：(1) 交换律 (2) 结合律

▲(3) 分配律　$A\cup(B\cap C)$，$A\cap(B\cup C)$，$A\cap(B-C)$

▲(4) De. Morgan　$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$；$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$

Kira后期批注：

做笔记建议根据自己情况详略得当来写，以一.1运算律为例，(1)(2)为常识，不必具体写公式，(3)我省略了"="右边的部分，因为我的关注点是哪些情形可以用分配律，右边自己推就可以了。(4)我并没有从A_1写到A_n，而只以A、B代表，因为"道不变"。

我在微博说过，为了追求"完整"誊写，是在制造垃圾时间。

(ps. 微博@kira考研信，搜索关键字"完整"，即可查看我于2016.11.30发布的微博，图1是辅导书的完整版，大家可更直观感受做笔记的处理方式～)

二、概率：

1. 加事件概率：$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}P(A_iA_j)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1\cdots A_n)$

差：$P(A-B)=\begin{cases}P(A)-P(AB)\\P(A)-P(B)&(A\supset B)\end{cases}$ →（很烦的条件

[天生成之]　积：$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1})$

2. 全概、贝叶斯（找完备事件组）

二. 常用等价变型

1. $A-B=A-AB$（化包含）$=A\bar{B}$
2. $A\cup B=A\cup\bar{A}B=B\cup A\bar{B}=AB\cup A\bar{B}\cup\bar{A}B$（化互斥）
3. $A=AB_1\cup AB_2\cup\cdots\cup AB_n$　　特 $A=AB\cup A\bar{B}$

三.* 常用推导

1. $B\subset A \Leftrightarrow B=AB$.

四. $\boxed{\text{条件}}$概率计算
$P(B|A)$
- ① 公式
- ② 本质含义：找到A发生后的样本空间，再确定 $P(B)$

* $P(B|A)$ 和 $P(AB)$ 的区别：样本空间不同

五. 事件$\boxed{\text{独立}}$性有关问题

1. $P\in(0,1)$. 互斥不独立，独立不互斥.
2. $A.B.C$ 互相独立 $\Rightarrow$ A 与 BC 和、差、积 独立.
3. $A.B$ 独立 $\Leftrightarrow P(B)=P(B|A)=P(B|\bar{A})$
（充要条件；右侧任一等号成立即可！）

六. 重要组合公式：

$$\sum_{i=0}^{k} C_m^i C_n^{k-i}=C_{m+n}^k$$（上面相加，下面也相加）

第二章 一维随机变量及其分布

一、综述

▲ 分布律、分布函数、概率密度

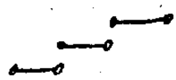
离散 X $\begin{cases} P\{X=a\}=F(a)-F(a-0) \\ P\{a<X\le b\}=F(b)-F(a) \end{cases}$

连续 X $\begin{cases} \text{任意点处 } P \text{ 为 } 0 \text{（否则一定不连续）} \\ F(x) \text{ 在 } (-\infty,+\infty) \text{ 连续} \end{cases}$

二、

1. 分布函数性质相关考点：单调不减，0-1之间 $(-\infty,+\infty)$，右连续 $F(x_0+)=F(x_0)$

2. (1) 分布律、分布函数 $\xRightarrow{\text{离散}}$ $\begin{cases} F \text{ 阶梯函数} \\ P\{X=x_k\}=F(x_k)-F(x_k-0),\ (k=1,2,\dots) \end{cases}$



(2) 概率密度、分布函数 $\xRightarrow{\text{连续}}$

$$f(x)=\begin{cases} g(x), & a\le x<b \\ 0, & else \end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<a \\ \int_a^x g(t)\,dt, & a\le x<b \\ 1, & x\le X \end{cases}$$

☺ Kira备注：
$f(x)=\{$
$F(x)=\{$
万年不变的标准格式

（＊分布函数随 $f(x)$ 的分段而分段）

3. 一维随机变量$\boxed{\text{函数}}$的分布

离散型：$P\{Y=y\}=P\{X=x_1\}+P\{X=x_2\}+\dots+P\{X=x_i\}$
（列出各值对应关系表↑）

▲ 连续型（从分布函数着手）
① 确定 Y 不为 0 的区间，把 $F_Y(y)=0$，$F_Y(y)=1$ 先写出
② $P\{g(X)\le y\}$ 中将 $X=?$ 从 $g(X)$ 中解出
③ 求导得 $f_Y(y)$

▲ 特　$y=g(x)$ $\begin{cases}\text{单增，反函数存在} \rightarrow F_X(g^{-1}(y)) \\ \text{单减，反函数存在} \rightarrow 1-F_X(g^{-1}(y))\end{cases}$

（即将反函数 y 的表达式套进 F_X 里面）

▲ 注 ① 原题给 $f_X(x)$，求 $f_Y(y)$，可先利用 F_X, F_Y 得 f_Y 关于 f_X 的表达式

② $Y=\min\{X,2\}$ 写成 $Y=\begin{cases}X, & X<2 \\ 2, & X\geq 2\end{cases}$

即表成"通俗"的函数.

第三章　多维随机变量及其分布

一、综述：三个分布……（即联合、边缘、条件）都有分布律、分布函数和概率密度.

1.（整体）联合分布

- * 单调性，有界性 $[0,1]$，右连续，非负（关于 x,y 单独或之）
- 离散型
  - 分布律 $P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}$
  - 分布函数 $F(x,y)=\sum\limits_{x_i\leq x}\sum\limits_{y_j\leq y} p_{ij}$
- 连续型
  - 联合概率密度
    - ▲ $P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy$
    - ▲ 连续点处 $\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$
  - 分布函数 $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dudv$

kira备注😊：此行"$(X,Y)\in G$"这儿 $X+Y>1$ 也算！

⇓ 开

2. (逐个)边缘分布

(有一维运算性质，但本质和二维有关)

- $F_X(x)=F(x,+\infty)$，联 ⇒ 边 ≠ 联

离散型：
- 分布律：加关于 X，$p_{i\cdot}=\sum_j p_{ij}$ (把 j 全加起)
- 分布函数：$F_X(x)=\sum_{x_i\le x} p_{i\cdot}$

连续型：
- 先求 概率密度：
  - $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$
  - $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$
- 后求 分布函数：
  - $F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx$
  - $F_Y(y)=\int_{-\infty}^{y} f_Y(y)\,dy$

3. 条件分布

(视一个为条件，研究另一变量)

固定 $X=x$ or $Y=y$

仅限等于！严格等于！

离散型：
- 分布律 $P\{Y=y_j \mid X=x_i\}=\dfrac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}$ $(j=1,2,\cdots)$
- 分布函数

连续型：
- 先 概率密度 $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$

  So easy 直接套表达式

- 后 分布函数 $F_{Y|X}(y|x)=P\{Y\le y \mid X=x\}$

  $=\int_{-\infty}^{y} f_{Y|X}(y|x)\,dy$

※ 虽然很烦 But：(▽_▽ 我的原话……)

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

其中，$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 为常数，且 $\rho\in(-1,1)$，$\sigma_1>0,\sigma_2>0$

称 (X,Y) 服从二维正态分布，记 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$

边缘 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，$X,Y$ 独立 ⇔ $\rho=0$

二. 解题套路

1. 问是否为联合分布函数:

考虑 单调, 有界, 右连续 ($F(x+0,y)=F(x,y)$), 非负 (那两个)

p.s. 此处非负即 $P\{x_1\le X\le x_2,\ y_1\le Y\le y_2\}=F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)\ge 0$

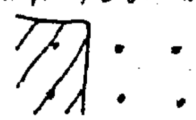
2. 求未知参数 (利用规范性)

- 离散型 $\sum p_{ij}=1$
- 连续型 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy=1$

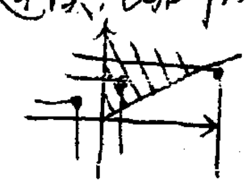
(😊 Be Brave! 敢于克服二阶积分! 自信!)

3. 求联合分布函数 (考点: 累次积分 积分限的确定)

- 离散, 已知分布律
  ① 描出所有取值点
  ② 画广义矩阵
  ③ 看套住点的 $\sum p_{ij}$



- 连续, 已知 $f(x,y)$
  ① 画非零区域 (用边界线将区间划分)
  ② 每个区域 $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}ds\int_{-\infty}^{y}f(s,t)\,dt$



4. 求联合分布律 (应用题)

5. 求联合分布, 已知边缘分布或条件分布等条件

- 由分布律 $P\{X=x_i, Y=y_j\}=P\{Y=y_j\mid X=x_i\}P\{X=x_i\}$
- 由密度 $f(x,y)=f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)=f_{Y|X}(y|x)f_X(x)$

6. 求边缘分布，已知联合分布

- 由联合分布函数 $F_X(x)=F(x,+\infty)$
- 由联合分布律 ： $p_{i\cdot}=\sum_j p_{ij}$
- 由联合密度 ： $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$

题目给的什么联合（分布函数/…律/…密度）
就直接求什么边缘（分布函数/…律/…密度）

7. 求条件分布，已知联合分布

- 由分布律 $P\{Y=y_i \mid X=x_i\}=\dfrac{P\{X=x_i,Y=y_i\}}{P\{X=x_i\}}$
- 由密度 $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$

$\boxed{\text{求完}}$表达式再$\boxed{\text{代条件值}}$求出最终结果 （"特别地"）

8. 独立性判别

随机变量 X,Y 独立 $\Leftrightarrow F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$
- 离散 $\Leftrightarrow p_{ij}=p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j}$
- 连续 $\Leftrightarrow f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

* $f(x)$ 与 $g(y)$ 独立 $\overset{\Leftarrow}{\nRightarrow}$ X 与 Y 独立

[例如：X^2 与 Y^2 独立但 X 与 Y 不独立（受取值区域限制）]

☆9. 随机变量函数的概率分布

① 离散型 { · 列表 写出全部可能取值及概率
· X 与 Y 独立. $P\{X+Y=K\}=P_0q_K+P_1q_{K-1}+\cdots+P_Kq_0$
(卷积公式)

② ▲ 连续型（公式法）

> ① 分布函数法 找出概率密度交集 AND，再二重积分.
> ② 用卷积公式最简洁. 但注意积分限!

1. 和，差，积，商
(四类，形式必须标准!)

① $U=X+Y$: $f_U(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,u-x)\,dx$

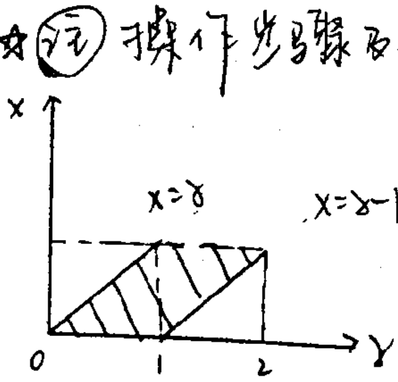
② $V=X-Y$: $f_V(v)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,x-v)\,dx$

③ $W=X/Y$: $f_W(w)=\int_{-\infty}^{+\infty} |y|\,f(yw,y)\,dy$

④ $Z=XY$: $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|y|} f(\frac{z}{y},y)\,dy$ $(y\neq0)$

> ☺ Kira 公式记忆法:
> 非常好记!!! 以①为例 $U=X+Y$，移项即得 $Y=U-X$，替换 $f(x,y)$ 中 y 的位置，即有 $f(x,u-x)$，③④ 在前面补 $|y|$ 和 $\frac{1}{|y|}$ 即可~

☆☆☆☆☆ 注 操作步骤及注意事项.



1. z 画横轴.
2. 按 z 分段 $0<z<1$，$1<z<2$，else.
3. 最后表达式只有 z，范围中也只有 z.

2° 其他函数

① 连续 $U\sim f(u)$，离散 $X=h(U)$，$Y=g(U)$，试确定 (X,Y) 分布
$P\{X=x_i, Y=y_j\} = \int_{D_{ij}} f(u)\,du$

法 先写出 (X,Y) 全部取值，$P\{X=, Y=\}=P\{U\in, U\in\}=P\{U\in\}$
最后化成仅求 U 的问题!

典型题如 $X=\begin{cases}0, & 当u\cdots \\ 1, & 当u\cdots\end{cases}$ $Y=\begin{cases}0, & 当u\cdots \\ 1, & 当u\cdots\end{cases}$

② 二维连续 $U,V\sim f(u,v)$，离散 $X=h(U,V)$，$Y=g(U,V)$，
试确定 (X,Y) 分布

法 $P\{X=, Y=\}=P\{某(U,V)\in\}=\iint_{D\cap G} f(u,v)\,du\,dv$

③ $(X,Y)\sim f(x,y)$，求 $Z=g(X,Y)$ 用 $\boxed{分布函数法}$
法 把 (X,Y) 锁定在 D_z，求 $\iint_{D_z\cap G} f(x,y)\,dx\,dy$

④ $(X,Y)\sim f(x,y)$，求 $Z=aX+bY$，$ab\neq 0$（否则是一维）
$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|a|}f\left(\frac{z-by}{a},y\right)dy$ … 用 b.

(p.s. 当 $a=1$ 时会非常好用.)

3° 再其他不能分辨，用分布函数法.

10. 离散型 X 和 连续型 Y 函数的分布

$\begin{cases} 须 X, Y 独立：全概公式 + 独立性 = 大大简化条件概率计算 \\ 若不独立（不考虑） \end{cases}$

如——

$$F_Z(z) = P\{X+Y \le z\} = P\{X+Y \le z \mid X=-1\} P\{X=-1\} + \cdots$$
$$= P\{Y \le z+1 \mid X=-1\} P\{X=-1\} + \cdots$$
$$= P\{Y \le z+1\} P\{X=-1\} + \cdots$$

（^▽^ 好有趣了!!! 去 X 化，独立去尾巴）

☆注：① 离 + 连 $\overset{\vee}{\Rightarrow}$ 连，离 · 连 $\overset{\times}{\Rightarrow}$ 连

② (X, Y) 二维连续 $\Rightarrow$ X, Y 分别连续，$X \pm Y$ 连续

而 X, Y 各自连续 $\not\Rightarrow$ $X+Y$ 连续，也 $\not\Rightarrow$ (X, Y) 连续

（若 X, Y 独立，则 $\Rightarrow$ 均成立）

11. 有限个相互独立 X_i 最大，最小值分布

① X_1, X_2，$Y = \max\{X_1, X_2\}$ （如 X_1, X_2 取正整数）

则 $P\{Y=k\} = P\{X_1=k, X_2=k-1\} + \cdots + P\{X_1=k, X_2=1\}$
$+ P\{X_1=1, X_2=k\} + \cdots + P\{X_1=k-1, X_2=k\}$

（体会 ~v~）

② $X_1, X_2 \cdots X_n$ 独立同分布

$\begin{cases} \bullet\ \max : F_Y(y) = [F(y)]^n \\ \bullet\ \min : F_Z(z) = 1 - [1 - F(z)]^n \end{cases}$

· BMDM ·

第四章数字特征

「多想利用公式简化计算」

「选定一种方法走下去，没有可不可以之别，都对！」

一 综述

1. 数学期望

▲ 离散
- ① 有限 $E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$
- 无限 $E(X)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$
- ② 函数
  - 一维：$E(g(X))=\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p_i$
  - 二维：$E(g(X,Y))=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} g(x_i,y_j)p_{ij}$
  - (边缘) $EX=\sum_{i=1}^{\infty} x_i \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}$

▲ 连续
- 变量 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$
- 函数
  - 一维 $E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\,dx$
  - 二维 $E(g(X,Y))=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)\,dx\,dy$

注 ① $E(c)=c$ ，$E(aX+b)=aE(X)+b$ 别丢常数！

2. 方差

$$D(X)=E[X-E(X)]^2=EX^2-(EX)^2$$

$$=\begin{cases} \text{离散} & \sum_{i=1}^{\infty}[x_i-E(X)]^2 p_i \\ \text{连续} & \int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)\,dx \end{cases}$$

注 ① $D(aX+b)=a^2D(X)$.

② $D(X\pm Y)=DX+DY\pm 2\mathrm{cov}(X,Y)$

③ X,Y 独立 $\Rightarrow D(XY)=D(X)D(Y)+D(X)(EY)^2+DY(EX)^2$

④ $C\neq E(X)$，有 $DX<E(X-C)^2$ （其中C为常数）.

$\boxed{常识}$ 均匀分布 $EX=\frac{a+b}{2}$，$DX=\frac{(b-a)^2}{12}$

3. 协方差 $E[(X-EX)(Y-EY)]=\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-EXEY$.

注 ① $\mathrm{cov}(aX+b,cY+d)=ac\,\mathrm{cov}(X,Y)$

② $[\mathrm{cov}(X,Y)]^2\leq DXDY$

▲ (X,Y) 服从二维正态分布 or 0-1分布 则

X与Y不相关 $\Leftrightarrow$ X与Y相互独立.

4. 切比雪夫不等式

对 $\forall\varepsilon>0$，$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\frac{DX}{\varepsilon^2}$ or $P\{|X-\mu|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{DX}{\varepsilon^2}$

kira 助记：“$\geq$”是本命，$\geq\varepsilon\leq$ 用 $\frac{DX}{\varepsilon^2}$

看到 < 别扭，所以 $1-\frac{DX}{\varepsilon^2}$

三 解题思路.

1. 求 EX, DX < 离散 < 变量 / 变量的函数

连续 < (同上)

EX, DX < 一维

二维 { 连续：可不必确定分布，利用公式!

离散：先确定分布

一个结论：$X\sim N(0,\sigma^2)$ X的n阶原点矩

$$E(X^n)=\begin{cases}(n-1)!!\sigma^n, & n\text{为偶数}\\ 0, & n\text{为奇数}\end{cases}$$

如：① $E[(X+Y)^2]$ 先展开，再求解。

② $E[|X-Y|]$ 积分，注意用 $y=x$ 分区

③ 求 $D(X+Y)$ 有两个思路 $\begin{cases}(-) \text{ 求 } E(X+Y), E(X+Y)^2 \text{ 直接积分} \\ (=) \text{ 求 } Z=X+Y \text{ 分布，再求 } EZ, EZ^2\end{cases}$ ✓

2. 求 max, min 的 EY, DY

$$F_Y(y)\Rightarrow f_Y(y)\Rightarrow\begin{cases}EY=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)\,dy\\ EY^2=\int_{-\infty}^{+\infty}y^2f_Y(y)\,dy\end{cases}\Rightarrow DY$$

注 X, Y 独立同分布于 $N(\mu,\sigma^2)$ 求 $\max\{X,Y\}$, $\min\{X,Y\}$

· 用以下特别的方法

$$\begin{cases}① \; U=\frac{X-\mu}{\sigma},\; V=\frac{Y-\mu}{\sigma},\; U,V\sim N(0,1)\\ ② \; \max\{X,Y\}=\sigma\max\{U,Y\}+\mu\\ ③ \; \max\{U,V\}=\frac{1}{2}(U+V+|U-V|)\\ ④ \; U-V\sim N(0,2)\\ ⑤ \; E(|U-V|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|f(z)\,dz \quad \text{“只用一处积分”}\\ ⑥ \; \min\{X,Y\}=X+Y-\max\{X,Y\}\end{cases}$$

能否想到！

第五章 大数定律和中心极限定理

一 综述

1. 依概率收敛

$X_n \xrightarrow{P} a$ ：$\forall \varepsilon>0$，$\lim_{n\to\infty} P\{|X_n-a|<\varepsilon\}=1$

$\left.\begin{array}{l} X_n \xrightarrow{P} a \\ Y_n \xrightarrow{P} b \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} g(X_n) \xrightarrow{P} g(a) \\ g(X_n,Y_n) \xrightarrow{P} g(a,b) \end{array}\right.$

2. 大数定律

① 切："X_i 两两无关" + "DX_i 存在" + "DX_i 有界" $\Rightarrow \frac{1}{n}\sum X_i \xrightarrow{P} \frac{1}{n}\sum E(X_i)$

独立 ② 辛："X_i iid F" + "$E(X_k)=\mu$" $\Rightarrow \frac{1}{n}\sum X_i \xrightarrow{P} \mu_i$

③ 伯：n次伯努利试验中 μ_n（次数），p（概率）$\Rightarrow \frac{\mu_n}{n} \xrightarrow{P} p$

3. 中心极限定理

林一莱：$X_1,\cdots,X_n \overset{iid}{\sim} F(\mu,\sigma^2) \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} X_k \sim N(n\mu, n\sigma^2)$

拉棣：$X_1,\cdots,X_n \overset{iid}{\sim} B(1,p) \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} X_k \sim N(np, np(1-p))$

二 方法技巧

1. 如 $P\{|Y_n-a|\geq\varepsilon\} = P\{Y\leq a-\varepsilon\}+P\{Y\geq a+\varepsilon\}$

$= P\{X_1\geq\cdots\}\cdot P\{X_2\geq\cdots\}\cdots P\{X_n\geq\cdots\}$

$= f(\varepsilon)\to 0$

· 未知转已知 · 去掉绝对值

第六章 抽样分布

一、综述

1. $P\{X \geq a\} = \alpha$ 称 a 为上 α 分位数

2. 常用统计量

① $\bar{X}$，$E\bar{X} = \mu$

▲ ② $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum(X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1}(\sum X_i^2 - n\bar{X}^2)$

$ES^2 = \sigma^2$，$DS^2 = \frac{2\sigma^4}{n-1}$

3. 常用分布

独立

① $X_1, \cdots X_n \overset{iid}{\sim} N(0,1)$，$\chi^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \sim \chi^2(n)$

$E\chi^2 = n$，$D\chi^2 = 2n$ 有 $X + Y = \chi^2(m+n)$

独立

② $t(n)$ 分布

$X \sim N(0,1)$，$Y \sim \chi^2(n)$，X与Y独立

则 $T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$

(自由度)

（上 分子就一个 $N(0,1)$）

独立

③ $F(m,n)$ 分布

$U \sim \chi^2(m)$，$V \sim \chi^2(n)$，U，V 独立，称 $F = \frac{U/m}{V/n} \sim F(m,n)$

有 $\frac{1}{F} \sim F(n,m)$

4. 正态总体统计量分布

① $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

② $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$，$\boxed{\bar{X} \text{ 与 } S^2 \text{ 独立}}$

③ $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

④ $F=\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(m-1,n-1)$

三 方法技巧

1. 判断分布：有限个相互独立同服从正态分布的变量的线性函数仍服从正态分布.

故有 $\begin{cases} X_{n+1}-\bar{X} & \text{显独立} \\ X_1-\bar{X} & \text{展开}\bar{X}\text{，隐独立} \end{cases}$

（其中 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$）

2. 计算统计量均值方差

用以下结论：$E\bar{X}=\mu$，$\boxed{ES^2=\sigma^2}$，$E\chi^2=n$

$D\bar{X}=\frac{\sigma^2}{n}$，$\boxed{DS^2=\frac{2\sigma^4}{n-1}}$，$D\chi^2=2n$.

（题中间接给出需要整理）

第七章 参数估计

一 综述

1. 点估计 $\begin{cases} \text{· 矩估计} \\ \text{· 极大似然估计（最）} \begin{cases} \text{离散：用分布律 } L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i,\theta) \\ \text{连续：} L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta) \end{cases} \end{cases}$

求使 $L(\theta)$ 最大的 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1,\cdots,x_n)$

2. 标准 $\begin{cases} \text{无偏性} : E(\hat{\theta})=\theta \\ \text{有效性} : D(\hat{\theta}_1) \le D(\hat{\theta}_2) \ \text{(以无偏为前提)} \\ \text{相合性(一致性)} : \hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta \end{cases}$

三 方法技巧

1. 总体未知参数的矩估计 θ_1, θ_2

▲ 两个未知参数
① 求总体矩 $\begin{cases} EX=\mu_1=g_1(\theta_1,\theta_2) \\ EX^2=\mu_2=g_2(\theta_1,\theta_2) \end{cases}$
↓
② 反解，$\theta_1=h_1(\mu_1,\mu_2)$，$\theta_2=h_2(\mu_1,\mu_2)$
↓
③ 替换：用 $\bar{X}$ 和 $\frac{1}{n}\sum X_i^2$ 替换 μ_1, μ_2

2. 求最大似然估计

离散：用 $p(x_i,\theta)$　　若无明显分布律，用含义、逻辑求分布律
连续：用 $f(x_i,\theta)$，利用 $\ln L(\theta)$ $\begin{cases} \frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} \text{ 有解} \\ \frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} \text{ 无解，看单调性 "}>0\text{" "}<0\text{"} \end{cases}$

3. 证相合性

· 估计量为样本矩函数，则 $\xrightarrow{P}$ 总体矩的函数（ok!）

· 切比雪夫（EX 已知），$\Rightarrow P\{|\hat{\theta}-E(X)|\ge\varepsilon\}\le\frac{D(\hat{\theta})}{\varepsilon^2}=\frac{1}{n}\to 0$（当 $n\to\infty$）