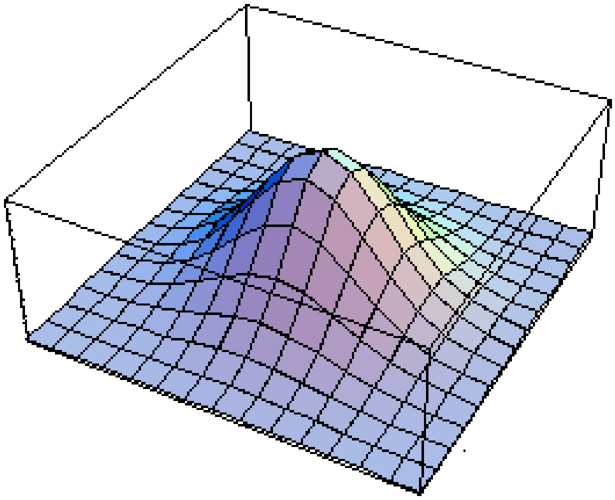
概率论与数理统计及其应用

习题参考解答



西安邮电大学理学院

概率论与数理统计及其应用

习题参考解答

编者　李昌兴　张素梅　林椹尠
赵美霞　邢务强

西安邮电大学理学院

前 言

“概率论与数理统计”是高等学校的一门重要的数学基础课，也是考研数学的重要组成部分。概率统计的数学思想和计算方法已经成为科学技术、经济管理和人文社会等各个领域中分析问题和解决问题的有效手段，因而备受广大科技工作者的重视。但这门课程的理论体系抽象，概念难以理解、方法难以掌握、思维难以展开、问题难以入手和习题难以作对等。为教学之方便，我们组织相关人员对人民邮电出版社出版的《概率论与数理统计及其应用》一书的全部习题做了较为详细的解答.

全书共分 12 章，其中第 3、9 章由张素梅编写，第 4 章由林椹尠编写，第 5、6 章由赵美霞编写，第 7、8 章由邢务强编写，其余各章由李昌兴编写，最后由李昌兴统纂定稿.

我们恳切希望本书能对广大读者朋友有所帮组。但我们水平有限，书中疏漏不妥之处，恳请读者不吝赐教。

编者

2012.07.6

目　录

第一章　随机事件与概率

1.1 写出下列随机试验的样本空间.

(1) 生产某种产品直到生产出 10 件正品为止，描述总生产的产品件数的样本空间.

(2) 某人射击一个目标，若击中目标，射击就停止，记录射击的次数的样本空间.

(3) 在半径为 1 的圆内任取一点，描述该点位置的坐标的样本空间.

(4) 记录一个班一次数学考试的平均分数(设以百分制记分).

(5) 对某工厂出厂的产品进行检查，合格品的记上“正品”，不合格品的记上“次品”，如连续查出了 2 件次品就停止检查，或检查了 4 件产品就停止，记录检查的结果.

解　(1) 设生产产品的总数为 n，那么这一试验的样本空间 S 应该是从 10 开始的一切整数，即 $S=\{n\,|\,n\geq 10$ 的整数$\}$. 这是有限型的样本空间.

(2) 因为射击是一次一次的进行下去，若击中目标，不再进行下次射击，若未击中目标，射击就要继续进行. 所以射击进行的次数就是一切正整数，即样本空间为 $S=\{1,2,3,\cdots\}$. 这是无限可列型的样本空间.

(3) 设圆心与原点重合，该点的坐标为 (x,y)，那么这一试验的样本空间为 $S=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<1\}$. 这是无限不可列型的样本空间.

(4) 以 n 表示该班级的学生数，总成绩的可能取值为 0，1，2，3，…，$100n$，样本空间为 $S=\{\frac{i}{n}\,|\,i=0,1,2,\cdots,100n\}$.

(5) 我们用 0 表示检查到一件次品，用 1 表示检查到一件正品，如 0110 表示第一次与第四次检查到次品，而第二次与第三次检查到的是正品，样本空间可表示为

$$S=\{00,100,0100,0101,0110,1100,1010,1011,0111,1101,1110,1111\}.$$

1.2 一批产品中有合格品和废品，从中有放回地抽取三次，每次取一件，设 A_i 表示事件“第 i 次抽到废品”，$i=1,2,3$, 试用 A_i 表示下列事件：

(1) 第一次、第二次中至少有一次抽到废品.

(2) 只有第一次抽到废品.

(3) 三次都抽到废品.

(4) 至少有一次抽到合格品.

(5) 只有两次抽到废品.

解 (1) $A_1\cup A_2$.　　(2) $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$.　　(3) $A_1A_2A_3$.

(4) $\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\overline{A_3}$.　　(5) $A_1A_2\overline{A_3}\cup A_1\overline{A_2}A_3\cup\overline{A_1}A_2A_3$.

1.3 袋中有 10 个球，分别编有号码 1 至 10，从中任取 1 球，设 A 表示事件“取得球的号码是偶数”，B 表示事件“取得球的号码是奇数”，C 表示事件“取得球的号码小于 5“，问下列运算表示什么事件：(1) $A\cup B$；(2) AB；(3) AC；(4) $\overline{AC}$; (5) $\overline{A}\,\overline{C}$ (6) $\overline{B\cup C}$; (7) $A-C$.

解　(1) $A\cup B=S$ 是必然事件；

(2) $AB=\varnothing$ 是不可能事件；

(3) $AC=\{$取得球的号码是 2，4$\}$；

(4) $\overline{AC}=\{$取得球的号码是 1，3，5，6，7，8，9，10$\}$；

(5) $\overline{A}\,\overline{C}=\{$取得球的号码是奇数，且不小于 5$\}=\{$取得球的号码为 5，7，9$\}$；

(6) $\overline{B\cup C}=\overline{B}\cap\overline{C}=\{$取得球的号码是不小于 5 的偶数$\}=\{$取得球的号码为 6，8，10$\}$；

(7) $A-C=A\overline{C}=\{$取得球的号码是不小于 5 的偶数$\}=\{$取得球的号码为 6，8，10$\}$.

1.4 若 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.4$，$P(A-B)=0.3$，求 $P(A\cup B)$ 和 $P(\overline{A}\cup\overline{B})$.

解 由于

$$P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)$$

那么由已知条件

$$P(AB)=P(A)-P(A-B)=0.5-0.3=0.2$$

于是

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5+0.4-0.2=0.7$$

$$P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0.2=0.8$$

1.5 设 A,B 为两事件且 $P(A)=0.6$，$P(B)=0.7$，问(1) 在什么条件下 $P(AB)$ 取到最大值，最大值是多少？(2) 在什么条件下 $P(AB)$ 取到最小值，最小值是多少？

解 (1) 因为 $AB\subset A$，$AB\subset B$，所以 $P(AB)\leq P(A)$，$P(AB)\leq P(B)$，即 $P(AB)\leq \min\{P(A),P(B)\}=0.6$，从而当 $P(AB)=P(A)$ 时，$P(AB)$ 取得值最大，其值等于 $P(A)=0.6$.

(2) 由概率加法公式

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

得

$$\begin{aligned}P(AB)&=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.6+0.7-P(A\cup B)\\&=1.3-P(A\cup B).\end{aligned}$$

因为 $0\leq P(A\cup B)\leq 1$，$P(S)<P(A)+P(B)$. 所以当 $P(A\cup B)=P(S)=1$ 时，$P(A\cup B)$ 取最大值，从而 $P(AB)$ 取最小值，且最小值为 0.3.

1.6 设 A,B,C 为三事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=P\left(BC\right)=\frac{1}{8}$，$P(AC)=0$，求(1) A,B,C 都发生的概率；(2) A,B,C 至少有一个发生的概率；(3) A,B,C 都不发生的概率.

解 (1) 由于且 $ABC\subset AC$，那么 $0\leq P(ABC)\leq P(AC)$. 又 $P(AC)=0$，所以 A,B,C 都发生的概率为: $P(ABC)=0$；

(2) A,B,C 至少有一个发生的概率为

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}-0=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(3) A,B,C 都不发生的概率为

$$P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)=\frac{1}{2}$$

1.7 在一标准英语词典中有 55 个由两个不相同的字母所组成的单词，若从 26 个英文字母中任取两个字母予以排列，问能排成上述单词的概率是多少？

解 设 A 表示事件“从 26 个英文字母中任取两个字母的排列能组成单词”，那么 $V_S=A_{26}^2$，$V_A=55$，于是

$$P(A)=\frac{V_A}{V_S}=\frac{55}{A_{26}^2}=\frac{11}{130}.$$

1.8 某油漆公司发出 17 桶油漆，其中柏油期 10 桶、黑油漆 4 桶、红油漆 3 桶，在搬运过程中所有标签脱落，交货人随意将这些油漆发给顾客. 问一个订货 4 桶白漆、3 桶黑漆和 2 桶红漆的顾客能按顾客所定颜色如数到货的概率是多少?

解 设 A 表示事件“能按顾客所定颜色如数到货”. 不妨设已给这些油漆桶编号，则总的选法种数为 C_{17}^9，即 $V_S=C_{17}^9$，有 4 桶白漆，3 桶黑漆，2 桶红漆的总数为 $C_{10}^4\cdot C_4^3\cdot C_3^2$，即 $V_A=C_{10}^4\cdot C_4^3\cdot C_3^2$，则所求概率为 $P(A)=\frac{V_A}{V_S}=\frac{C_{10}^4\cdot C_4^3\cdot C_3^2}{C_{17}^9}=\frac{252}{2431}$.

1.9 在分别写有 2，3，4，5，7，8 的六张卡片中任取两张，把卡片上的数字组成一个分数，求所得分数是既约分数的概率？

解　设以 A 表示事件“所得分数为既约分数”．事件 A 相当于“所取两个数中至少有一个是奇数”，　A 的对立事件 $\overline{A}$ 是“所取两个数都不是奇数”，易见求 $P(\overline{A})$ 较为容易，而

$$P(\overline{A})=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{1}{5},$$

因此

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}.$$

1.10 一批产品有 10 件，其中有 3 件次品．(1)从中随机地取 3 件，求恰有 2 件次品的概率；(2)从中连续取三次，每次取 1 件，检查后不放回，求三次中恰好抽到 2 件次品的概率；(3)从中连续取三次，每次取 1 件，检查后放回，求三次中恰好抽到 2 件次品的概率．

解（1）设 A 表示“从中随机地取 3 件，恰有 2 件次品”．在 10 件产品中随机取 3 件的不同取法数就是从 10 件产品中随机取 3 件的组合数，即样本点总数为 $V_S=C_{10}^3$．对于事件 A，在 3 件产品中恰有 2 件次品共有 C_3^2 种取法，有 1 件正品共有 C_7^1 中取法．由乘法原理，A 包含 $C_3^2C_7^1$ 个样本点，即 $V_A=C_3^2C_7^1$．于是所求概率为

$$P(A)=\frac{V_A}{V_S}=\frac{C_3^2C_7^1}{C_{10}^3}=\frac{7}{40}$$

（2）设 B 表示“从中连续取三次，每次取 1 件，检查后不放回，三次中恰好抽到 2 件次品”．在 10 件产品中连续取三次，每次取 1 件，检查后放回的不同取法数就是从 10 件产品中随机取 3 件的排列数，即样点总数为 $V=A_{10}^3$．对于事件 B，在三次抽取中，恰有 2 次取到次品，1 次取到正品的取法数 $C_3^2C_7^1P_3^3$，即 $V_B=C_3^2C_7^1P_3^3$．于是所求概率为

$$P(B)=\frac{V_B}{V_S}=\frac{C_3^2C_7^1P_3^3}{P_{10}^3}=\frac{7}{40}$$

（3）设事件 C 表示“从中连续取三次，每次取 1 件，检查后放回，3 次中恰好抽到 2 件次品”．由于检查后放回，所以每次抽取都有 10 种不同的取法，根据乘法原理，连续取 3 次的不同取法数，即样本空间包含的样本点总数为 $V_S=10\times10\times10$．对于事件 C，我们设想把 3 件产品放在 3 位置上，在 3 个位置挑出 2 个位置放次品，共有 C_3^2 挑选法，再者次品有 3×3 种取法，正品有 7 种取法．由乘法原理，C 包含的样本点总数为 $V_C=C_3^2\times3^2\times C_7^1$.所求概率为

$$P(C)=\frac{V_C}{V_S}=\frac{C_3^2 3^2\cdot C_7^1}{10^3}=\frac{189}{1000}.$$

1.11 已知 10 个晶体管中有 7 个正品及 3 个次品，每次任意抽取一个进行测试，测试后不再放回，直至把 3 个次品都找到为止，求需要测试 7 次的概率.

解　测试 7 次，就是从 10 个晶体管中不放回地抽取 7 个晶体管，其样本空间所包含的样本点的总数为 $V_S=P_{10}^7$．设事件 A 表示“经过 7 次测试，3 个次品都已找到”，这就是说在前 6 次测试中有 2 次找到次品，而在第 7 次测试时找到了最后一个次品或者前 7 次测试均为正品，最后剩下的 3 个就是次品，由于 3 个次品均可在最后一次被测试到，所以事件 A 所包含的样本点数为 $V_A=C_6^2\cdot C_4^4\cdot P_7^4\cdot3!+C_7^7\cdot7!$．因此，所求概率为

$$P(A)=\frac{V_A}{V_S}=\frac{C_6^2\cdot C_4^4\cdot P_7^4\cdot3!+C_7^7\cdot7!}{P_{10}^7}=\frac{2}{15}.$$

1.12 三封信随机投向标号为 I、II、III、IV 的四个邮筒投寄，试求:(1) 第 II 邮筒内恰好被投入一封信的概率；(2) 前三个邮筒内均有信的概率；(3) 三封信平均被投入两个邮筒内的概率.

解　设 A 表示“第 II 邮筒内恰好被投入一封信”，B 表示“前三个邮筒均有信”，C 表示“三封

信平均被投入两个邮筒”．由题意每封信被投到每个邮筒的概率都是$\frac{1}{4}$，即每封信各自都有 4 种不同的分配方式，因此，3 封信有4^3种不同的分配方法，每一种分法对应着一个样本点，因而样本空间所包含的样本点总数为$V_S=4^3=64$；第 II 邮筒内恰好被投入一封信可以分为两步:先从三封信中任选一封信被投入第 II 邮筒，共有C_3^1中选法，而后再把剩下的两封信随机投入其余的三个邮筒，共有3^2种方式，从而A所包含的样本点总数为$V_A=C_3^1\cdot 3^2=27$；同样可知B所包含的样本点总数是 3 的全排列，即$V_B=P_3^3=6$；事实上，我们不可能把三封信平均投入到两个邮筒，也就是说事件C是一个不可能事件，所以$V_C=0$.故所求概率分别为

$$P(A)=\frac{V_A}{V_S}=\frac{27}{64},\quad P(B)=\frac{V_B}{V_S}=\frac{3}{32},\quad P(C)=\frac{V_C}{V_S}=0.$$

1.13 在 1—2000 的整数中随机地取一个数，问取到的整数既不能被 6 整除，又不能被 8 整除的概率是多少?

解　设A={取到的数能被 6 整除}、B={取到的数能被 8 整除}、C={取到的整数既不能被 6 整除，又不能被 8 整除}，则$C=\overline{A\cup B}$．所以

$$P(C)=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)].$$

下面分别计算事件A,B,C的概率.

由于$333<\dfrac{2000}{6}<334$，故A所包含的样本点总数为 333，因此$P(A)=\dfrac{333}{2000}$；

由于$\dfrac{2000}{8}=250$，故B所包含的样本点总数为 250，因此$P(B)=\dfrac{250}{2000}$.

又因为一个数同时能被 6 与 8 整除,就相当于被它们的最小公倍数整除.注意到$83<\dfrac{2000}{24}<84$，

AB所包含的样本点总数为 83，于是$P(AB)=\dfrac{83}{2000}$．那么，所求概率

$$P(C)=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]$$
$$=1-[\frac{333}{2000}+\frac{250}{2000}-\frac{83}{2000}]=\frac{3}{4}.$$

1.14 某人午休醒来，发现表已停止，他打开收音机，想听电台报时，设电台是整点报时一次，求他等待报时的时间短于 10min 的概率．

解　以分钟为单位，记上一次报时的时刻为 0，则下一次报时的时刻为 60，于是这个人打开收音机的时刻必在$(0,60)$内，即$S=\{x\,|\,0<x<60\}$．记A表示“等待时间短于 10min”，则$A=\{x\,|\,50<x<60\}$．于是

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(S)}=\frac{60-50}{60-0}=\frac{1}{6}.$$

1.15 在$(0,1)$中随机地取两个数，求它们乘积不大于$\mathbf{\frac{1}{4}}$的概率．

解　设x,y在$(0,1)$中随机地取两个数，那么$S=\{(x,y)\,|\,0<x<1,0<y<1\}$，

$A=\{(x,y)\,|\,0<x<1,0<y<1,xy\le\dfrac{1}{4}\}$．

从而所求概率

$$P=\frac{A\text{的面积}}{S\text{的面积}}=\frac{1}{4}+\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{1}{x}dx=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\ln 4\approx 0.597.$$

1.16　将长为L的细棒随机截成三段，求三段构成三角形的概率．

解　设棒的左端点为数轴上的原点，两折点的坐标分别为x,y，且$x<y$，如图 1-2 所示，则这

是的样本空间

$$S=\{(x,y)\,|\,0<x,y,z<L,x+y+z=L\}$$

注意到三段长度依次为 $x,y-x,L-y$ ，于是

$$A=\{(x,y)\,|\,x<\frac{L}{2},\frac{L}{2}<x+\frac{L}{2},x,y\in S\}.$$

S 是直角边为 L 的直角三角形， A 是直角边为 $L/2$ 的直角三角形. 由几何概率的定义，所求概率为 $P(A)=\dfrac{1}{4}$.

1.17 已知 $P(A)=0.7$ ， $P(B)=0.4$ ， $P(A\overline{B})=0.5$，求 $P(B\,|\,A\cup\overline{B})$.

解 $$P(B\,|\,A\cup\overline{B})=\frac{P(B(A\cup\overline{B}))}{P(A\cup\overline{B})}=\frac{P(BA\cup(B\overline{B}))}{P(A\cup\overline{B})}$$

$$=\frac{P(BA)}{P(A\cup\overline{B})}=\frac{P(A)-P(A\overline{B})}{P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})}$$

$$=\frac{1-P(\overline{A})-P(A\overline{B})}{1-P(\overline{A})+1-P(B)-P(A\overline{B})}=\frac{1}{4}.$$

1.18 已知 $P(A)=\dfrac{1}{4}$， $P(B\,|\,A)=\dfrac{1}{3}$， $P(A\,|\,B)=\dfrac{1}{2}$，求 $P(A\cup B)$.

解 $$P(AB)=P(A)\cdot P(B\,|\,A)=\frac{1}{12}，\quad P(B)=\frac{P(AB)}{P(A|B)}=\frac{1}{6}.$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{3}.$$

1.19 甲、乙两班共有 70 名同学，其中女同学 40 名，设甲班有 30 名同学，其中女同学 15 名. 问再碰到加班同学时，正好碰到一名女同学的概率.

解 设 A 表示事件“ 碰到甲班同学 ”， B 表示事件“ 碰到女同学 ”，由题意 $P(AB)=\dfrac{15}{70}$.

$P(A)=\dfrac{30}{70}$，所以

$$P(B\,|\,A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{15/70}{30/70}=\frac{1}{2}$$

1.20 从混有 5 张假钞的 20 张百元钞票中任意抽出 2 张， 将其中 1 张放到验钞机上检验发现是假钞，求抽出 2 张都是假钞的概率.

解 令 A 表示事件“抽到 2 张中至少有 1 张假钞”， B 表示事件“抽到 2 张都是假钞”. 由已知条件

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_{15}^2}{C_{20}^2}=\frac{17}{38}，\quad P(B)=\frac{C_5^2}{C_{20}^2}=\frac{1}{19}.$$

注意到 $B\subset A$ ，于是所求的概率为

$$P(B\,|\,A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{1/19}{17/38}=\frac{2}{17}$$

1.21 盒中装有 5 个球，其中有 3 个白球，2 个黄球，从中任意取两次，每次取 1 个球，观察之后不放回，设 A 表示“ 第 1 次取到的是白球 ”，B 表示“ 第 2 次取到的是白球 ”，求条件概率 $P(B\,|\,A)$ 及 $P(A\,|\,B)$.

解 由已知条件 $P(A)=\dfrac{3}{5}$， $P(AB)=\dfrac{C_3^2}{C_5^2}=\dfrac{3}{10}$，那么根据条件概率定义得

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{3/10}{3/5}=\frac{1}{2}.$$

又因为 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$ 及 $B=AB\cup\overline{A}B$，所以

$$P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B)=\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^1C_4^1}+\frac{C_2^1C_3^1}{C_5^1C_4^1}=\frac{6}{10}$$

因此

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1}{2}.$$

1.22 某地区一工商银行的贷款范围内有甲、乙两家同类企业，设一年内甲申请贷款的概率为 0.15，乙申请贷款的概率为 0.2，在甲不向银行申请贷款的条件下，乙向银行申请贷款的概率为 0.23，求在乙不向银行申请贷款的条件下，甲向银行申请贷款的概率.

解　设 A 表示“一年内甲向银行申请贷款”，B 表示“一年内乙向银行申请贷款”，由已知条件 $P(B)=0.2$，$P(A)=0.15$，$P(B|\overline{A})=0.23$．本题所求概率是 $P(A|\overline{B})$．由条件概率公式有 $P(A|\overline{B})=\dfrac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}$，又因为

$$P(AB)=P(B)-P(\overline{A}B)=P(B)-P(\overline{A})P(B|\overline{A})=0.0045,$$

$$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=0.1455,$$

故所求概率为

$$P(A|\overline{B})=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=0.181875.$$

1.23 某厂的产品中 4%的废品，在 100 件合格品种由 75 件是一等品，试求在该厂的产品中任取一件产品是一等品的概率.

解 设 A 表示事件“任取一件是合格品”，B 表示事件“任取一件是一等品”，依据题意 $P(AB)$．由于

$$P(A)=1-P(\overline{A})=0.96,\quad P(B|A)=0.75.$$

所以

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{96}{100}\times\frac{75}{100}=0.72.$$

1.24 设 50 件产品中有 5 见次品，每次取一件，不放回得取 3 件，A_i 表示事件“第 i 次抽取到次品”，其中 $i=1,2,3$．试求 $P(A_1)$，$P(A_1A_2)$，$P(A_1\overline{A}_2A_3)$．

解　由题意

$$P(A_1)=\frac{5}{50}=0.1;$$

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_3|A_1)=\frac{5}{50}\times\frac{4}{49}\approx0.0082;$$

$$P(A_1\overline{A}_2A_3)=P(A_1)P(\overline{A}_2|A_1)P(A_3|A_1\overline{A}_2)=\frac{5}{50}\times\frac{45}{49}\times\frac{4}{48}\approx0.0077$$

1.25 设有甲、乙两袋，甲袋中装有 n 只白球、m 只红球；乙袋中装有 N 只白球. M 只红球，今从甲袋中任意取一只球放入乙袋，再从乙袋中任意取一只球. 问取到白球的概率是多少？

解　设 B_1 为从甲袋中取到白球，B_2 为从甲袋中取到红球，A 为从乙袋中取到白球，由全概率公式

$$P(A)=P(A|B_1)\cdot P(B_1)+P(A|B_2)\cdot P(B_2)$$

$$=\frac{N+1}{M+N+1}\cdot\frac{n}{m+n}+\frac{N}{M+N+1}\cdot\frac{m}{m+n}$$

1.26 某种产品的商标为“MAXAM”，其中有两个字母脱落，有人捡起随意放回，求放回后仍为“MAXAM”的概率.

解 以事件 A_1，A_2，A_3，A_4，A_5 分表示事件“脱落 M、M”，“脱落 A、A”“脱落 M、A”“脱落 X、A”“脱落 X、M”以 B 表示“放回后仍为‘MAXAM’”，所求概率为 $P(B)$. 显然 A_1，A_2，A_3，A_4，A_5 两两互不相容，且 $A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5=\Omega$. 又由题意

$$P(A_1)=\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10}，P(A_2)=\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10}，P(A_3)=\frac{C_2^1C_2^1}{C_5^2}=\frac{4}{10}，$$

$$P(A_4)=\frac{C_1^1C_2^1}{C_5^2}=\frac{2}{10}，P(A_5)=\frac{C_1^1C_2^1}{C_5^2}=\frac{2}{10}$$

而

$$P(B|A_1)=P(B|A_2)=1，P(B|A_3)=P(B|A_4)=P(B|A_5)=\frac{1}{2}$$

由全概率公式得

$$P(B)=\sum_{i=1}^{5}P(A_i)P(B|A_i)=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{2}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{3}{5}$$

1.27 有朋自远方来，他坐火车、坐船、坐汽车和坐飞机的概率分别为 0.3，0.2，0.1，0.4，若坐火车，迟到的概率是 0.25；若坐船，迟到的概率是 0.3；若坐汽车，迟到的概率是 0.1；若坐飞机则不会迟到.求他最后可能迟到的概率.

解 设 B 表示“迟到”，A_1，A_2，A_3，A_4 分别表示乘“火车、船、汽车、飞机”，则 $B=\bigcup_{i=1}^{4}BA_i$，且按题意

$$P(B|A_1)=0.25，P(B|A_2)=0.3，P(B|A_3)=0.1，P(B|A_4)=0$$

由全概率公式有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B|A_i)=0.3\times0.25+0.2\times0.3+0.1\times0.1=0.145$$

1.28 已知男人中有 5%是色盲患者，女人中有 0.25%是色盲患者，今从男女人数相等的人群中随机地挑选一人，恰好是色盲患者，问此人是男性的概率是多少？

解 设事件 B_1 表示“选出的是男性”，事件 B_2 表示“选出的是女性”，事件 A 表示“选出的是色盲患者”. 因为 $B_1\cup B_2=S, B_1B_2=\varnothing$, 且由已知条件

$$P(A|B_1)=0.05，P(A|B_2)=0.0025，P(B_1)=\frac{1}{2}，P(B_2)=\frac{1}{2}.$$

所求概率为 $P(B_1|A)$. 由贝叶斯公式得

$$P(B_1|A)=\frac{P(A|B_1)\cdot P(B_1)}{P(A|B_1)\cdot P(B_1)+P(A|B_2)\cdot P(B_2)}=\frac{0.05\times0.5}{0.05\times0.5+0.0025\times0.5}=\frac{20}{21}$$

1.29 一道单项选择题列出了 5 个答案,一个考生可能正确理解而选对答案,也可能乱猜一个. 假设他知道正确答案的概率为 $\frac{1}{3}$，乱猜选对答案的概率为 $\frac{1}{5}$. 如果已知它选对了，试求他确实知道正确答案的概率.

解 设事件 A 表示“考生选对了”，事件 B 表示“考生知道正确答案”. 由题意可知 $P(A|B)=1$，

$P(A|\bar{B})=\dfrac{1}{5}$ ，$P(B)=\dfrac{1}{3}$. 由贝叶斯公式得所求概率为

$$P(B|A)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})}=\frac{\frac{1}{3}\times 1}{\frac{1}{3}\times 1+\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}}=\frac{5}{7}$$

1.30 设有两台机床加工同样的零件，第一台机床出废品的概率为 0.03，第二台机床出废品的概率是 0.02. 加工出来的零件混放在一起，并且已知第一台机床加工的零件比第二台机床多一倍. (1) 求任意取出的一个零件是合格品的概率；(2) 如果任意取出一个零件经过检验后发现是废品，求他是第二台机床加工的概率.

解 设事件 A 表示任取得一个零件是合格品，事件 B_i 表示零件是第 i 台机床加工的，$i=1,2$. 由题意知

$$P(B_1)=\frac{2}{3}，P(B_2)=\frac{1}{3}，P(A|B_1)=0.97，\quad P(A|B_2)=0.98$$

(1) 由全概率公式得

$$\begin{aligned}P(A)&=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)\\&=\frac{2}{3}\times 0.97+\frac{1}{3}\times 0.98=\frac{73}{75}\end{aligned}$$

(2) 由于

$$P(\bar{A})=1-P(A)=\frac{2}{75}，P(\bar{A}|B_2)=1-P(A|B_2)=0.02$$

于是由条件概率公式得

$$P(B_2|\bar{A})=\frac{P(B_2\bar{A})}{P(\bar{A})}=\frac{P(B_2)P(\bar{A}|B_2)}{P(\bar{A})}=\frac{\frac{1}{2}\times 0.02}{\frac{2}{75}}=\frac{1}{4}$$

1.31 有两箱同种类的零件，第一箱装 50 只，其中 10 只一等品；第二箱装 30 只，其中 18 只一等品，今从两箱中任挑出一箱，然后从该箱中取两次做不放回抽样.求:(1) 第一次取得零件是一等品的概率；(2) 已知第一次取的零件是一等品，第二次取到的零件也是一等品的概率.

解 设事件 A_i 表示“任挑一箱是第 i 条箱”，B_i 表示“第 i 次取到的零件是一等品”，其中 $i=1,2$. 因为“第一次取的零件是一等品”发生的原因有:此一等品可能是第一箱的零件，也可能是第二箱的零件，因此 A_1,A_2 是 B_1 发生的原因，故 A_1,A_2 是样本空间 S 的一个划分，且 $P(A_1)=P(A_2)=\dfrac{1}{2}$. 由题设有

$$P(B_1|A_1)=\frac{C_{10}^1}{C_{50}^1}=\frac{1}{5}，P(B_1|A_2)=\frac{C_{18}^1}{C_{30}^1}=\frac{3}{5}.$$

(1) 由全概率公式得第一次取得零件是一等品的概率为

$$P(B_1)=P(A_1)\cdot P(B_1|A_1)+P(A_2)\cdot P(B_1|A_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{2}{5}.$$

(2) 由条件概率及全概率公式有

$$\begin{aligned}P(B_2|B_1)&=\frac{P(B_1B_2)}{P(B_1)}=\frac{P(A_1)P(B_1B_2|A_1)+P(A_2)P(B_1B_2|A_2)}{P(B_1)}\\&=\frac{5}{2}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{C_{10}^2}{C_{50}^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{C_{18}^2}{C_{30}^2}\right]=\frac{690}{1241}\end{aligned}$$

1.32 甲、乙、丙三人同时独立地向同一目标各射击一次，命中率分别为 1/3，1/2，2/3，求目标被命中的概率.

解　记 B ={命中目标}, A_1 ={甲命中}, A_2={乙命中}, A_3={丙命中} ,则 $B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ ，因而

$$P(B) = 1 - P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) = 1 - \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

1.33 进行摩托车比赛，在地段甲、乙之间设立了 3 个障碍．设骑手在每一个障碍前停车的概率为 0.1，从乙地到终点丙地之间骑手不停车的概率为 0.7，假定骑手是否在各障碍及从乙地到终点丙地之间停车相互独立，试求在地段甲、丙之间骑手不停车的概率．

解 设 A 表示事件“骑手在甲、丙之间不停车”， B 表示“骑手在乙、丙之间不停车”， A_i 表示事件“骑手在甲、乙之间第 i 个障碍前停车”． $i = 1,2,3$ ，则

$$P(A_i) = 0.1，P(B) = 0.7，i = 1,2,3 .$$

又 $A = \bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3 B$ ，由独立性可得

$$P(A) = P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3 B) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)P(B) = (1-0.1)^3 \times 0.7 = 0.5103 .$$

1.34 甲、乙、丙三部机床独立工作，而由一名工人照管，某段时间内它们不需要工人照管的概率分别为 0.9，0.8 及 0.85. 求在这段时间内有机床需要工人照管的概率、机床因无人照管而停工的概率以及恰有一部机床需要工人照管的概率？

解　设事件 A,B,C 分别表示在这段时间内机床甲、乙、丙不需要工人照管. 有机床需要工人照管也就是至少有一部机床需要工人照管，另外我们应注意到三部机床由一名工人照管，即因无人照管而停工等价于在该段时间内至少有两部机床同时需要工人照管. 又已知条件， A,B,C 相互独立，且 $P(A) = 0.9$ ， $P(B) = 0.8$ ， $P(C) = 0.85$. 则有机床需要工人照管的概率

$$P(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}) = 1 - P(ABC) = 1 - P(A)P(B)P(C) = 0.388 .$$

因无人照管而停工的概率

$$P(\overline{A}\overline{B} + \overline{B}\overline{C} + \overline{C}\overline{A}) = P(\overline{A}\overline{B}) + P(\overline{B}\overline{C}) + P(\overline{C}\overline{A}) - 2P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = 0.059 .$$

恰有一部机床需要工人照管的概率

$$P(AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC) = P(AB\bar{C}) + P(A\bar{B}C) + P(\bar{A}BC)$$

$$= P(A)P(B)P(\bar{C}) + P(A)P(\bar{B})P(C) + P(\bar{A})P(B)P(C)$$

$$= 0.9 \times 0.8 \times 0.15 + 0.9 \times 0.2 \times 0.85 + 0.1 \times 0.8 \times 0.85 = 0.329 .$$

1.35 设六个相同的元件，如图 1-9 所示那样安置在线路中，设每个元件不通达的概率为 p ，求这个装置通达的概率.假定各个元件通达与否是相互独立的.

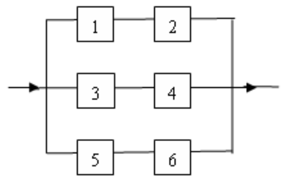


图 1-9

解　记 A ={通达}， A_i ={元件 i 通达}， $i = 1,2,3,4,5,6$　则 $A = A_1A_2 \cup A_3A_4 \cup A_5A_6$ ，所以

$$P(A) = P(A_1A_2) + P(A_3A_4) + P(A_5A_6) - P(A_1A_2A_3A_4) - P(A_3A_4A_5A_6)$$

$$- P(A_1A_2A_5A_6) + P(A_1A_2A_3A_4A_5A_6)$$

$$= 3(1-p)^2 - 3(1-p)^4 + (1-p)^6 .$$

1.36 有两个裁判组，第一组由 3 个人组成，其中两个人独立以概率 p 做出正确的裁定，而第三个人以掷硬币决定，最后结果根据多少人的意见决定．第二组由一人组成，他以概率 p 做出正确的裁定．试问这两个组哪一组做出正确的概率大？

解　只要把第一组的正确裁定概率计算出来，再与 p 比较即可，为此应先搞清楚“最后结果根据多数人意见决定”指的是什么，即指的是“第一组至少应该有两个人做出正确裁定”这个事件，为了计算这个事件的概率，不妨设 A,B,C 分别表示事件“第一组的三个人各自做出正确裁定”， D 表示“第一组做出正确裁定”，则 $D = ABC \cup AB\bar{C} \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC$ ，由题设 $P(A) = P(B) = p$ ， $P(C) = \frac{1}{2}$.

由于 A,B,C 是相互独立的，利用加法定理得

$$
\begin{aligned}
P(D) &= P(ABC \cup AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC) \\
&= P(A)P(B)P(C) + P(A)P(B)P(\overline{C}) + P(A)P(\overline{B})P(C) + P(\overline{A})P(B)P(C) \\
&= p \cdot p \cdot \frac{1}{2} + p \cdot p \cdot \frac{1}{2} + p \cdot (1-p) \cdot \frac{1}{2} + (1-p) \cdot p \cdot \frac{1}{2} \\
&= p,
\end{aligned}
$$

这样，两个裁判组正确裁定的概率一样大.

1.37 一份英语试卷，有 10 道选择题，每题由 4 个选项，其中只有一个是正确答安. 某同学投机取巧，随意填空，试问他至少填对 6 道题的概率.

解 设 A 表示事件 " 至少填对 6 道题 " . 这是一个伯努利概型，随意填对的概率为 $\frac{1}{4}$，即此处 $n=10, p=\frac{1}{4}$. 则

$$
\begin{aligned}
P(A) &= \sum_{k=6}^{10} P_{10}(k) = \sum_{k=6}^{10} C_{10}^{k} (\frac{1}{4})^{k} (\frac{3}{4})^{10-k} \\
&\approx 0.01622 + 0.00309 + 0.000389 + 0.00003 + 0 = 0.01973.
\end{aligned}
$$

第 2 章　随机变量及其分布

2.1 一个靶子是半径为 2m 的圆盘，设击中靶上任何一同心圆上点的概率与该圆盘的面积成正比，并设射击都能中靶，以 X 表示弹着点与圆心的距离. 试求随机变量 X 的分布函数.

解 设 X 的分布函数为 $F(x)$，即 $F(x)=P\{X\le x\}$. 由已知

当 $x<0$ 时，$\{X\le x\}$是不可能事件，从而 $F(x)=0$；

当 $x\ge 2$ 时，$\{X\le x\}$是必然事件，那末 $F(x)=1$；

当 $0\le x\le 2$ 时，由题意 $P\{0\le X\le x\}=kx^2$，k 是一常数，为了确定 k 的值，取 $x=2$，有 $P\{0\le X\le x\}=2^2k$，但已知 $P\{0\le X\le x\}=1$，故得 $k=\dfrac{1}{4}$，即

$$P\{0\le X\le x\}=\frac{1}{4}x^2 .$$

于是

$$F(x)=P\{X\le x\}=P\{X<0\}+P\{0\le X\le x\}=\frac{1}{4}x^2 .$$

综上所述，所求随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{1}{4}x, & 0\le x<2,\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

2.2 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=A+B\arctan x,\quad -\infty<x<+\infty ,$$

试求 (1) 常数 A,B；(2) 随机变量 X 落在区间 $(-1,1]$ 内的概率.

解 (1) 由分布函数的基本性质得

$$\begin{cases}F(+\infty)=A+\dfrac{\pi}{2}B=1,\\ F(-\infty)=A-\dfrac{\pi}{2}B=0.\end{cases}\Rightarrow A=\frac{1}{2},B=\frac{1}{\pi}.$$

(2) 所求概率为

$$P(-1<X\le 1)=F(1)-F(-1)=\frac{1}{2}.$$

2.3 已知随机变量随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=\dfrac{a}{3^k}$，$k=0,1,2,3$，试求 (1) 常数 a；(2) $P\{X\le 1\}$；(3) $P\{\dfrac{1}{2}<X<\dfrac{5}{2}\}$.

解 (1) 由于

$$P\{X=0\}+P\{X=1\}+P\{X=2\}+P\{X=3\}=a+\frac{a}{3}+\frac{a}{9}+\frac{a}{27}=\frac{40}{27}a ,$$

由概率分布的性质，得 $\dfrac{40}{27}a=1$，即 $a=\dfrac{27}{40}$.

(2) $P\{X\le 1\}=P\{X=0\}+P\{X=1\}=0.9$.

(3) $P\{\frac{1}{2} < X < \frac{5}{2}\} = P\{X=2\} + P\{X=1\} = 0.3$.

2.4 一箱中装有 6 件产品，其中 2 件是二等品，现从中随机取出 3 件，试求取出的二等品件数 X 的概率分布及其分布函数.

解 由题意随机变量 X 的所有可能取值为 0，1，2. 在 6 件产品中任取 3 件共有 C_6^3 种取法，从而

$$P\{X=0\} = \frac{C_4^3}{C_6^3} = \frac{1}{5},\quad P\{X=1\} = \frac{C_2^1 C_4^2}{C_6^3} = \frac{3}{5},\quad P\{X=2\} = \frac{C_2^2 C_4^1}{C_6^3} = \frac{1}{5}$$

所以，X 的概率分布为

X	0	1	2
p_k	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

当 $x<0$ 时，$F(x) = P(X \le x) = 0$；

当 $0 \le x < 1$ 时，$F(x) = P(X \le x) = P(X<0) + P(X=0) + P(0 < X \le x)$，又由已知 $P(X<0) = P(0 < X \le x) = 0$，所以 $F(x) = P(X=0) = \frac{1}{5}$.

当 $1 \le x < 2$ 时，$F(x) = P(X \le x) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{4}{5}$；

当 $x \ge 2$ 时，$F(x) = P(X \le x) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 1$.

综上所述，随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x<0, \\ \frac{1}{5}, & 0 \le x < 1, \\ \frac{4}{5}, & 1 \le x < 2, \\ 1, & x \ge 2. \end{cases}$$

2.5 已知离散型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x<-1, \\ 0.4, & -1 \le x < 1, \\ 0.8 & 1 \le x < 3, \\ 1 & x \ge 3. \end{cases}$$

写出随机变量 X 的概率分布.

解　由分布函数可看到随机变量 X 的取值为：-1，1，3. 再根据分布函数的性质可得

$$P(X=-1) = P(X \le -1) - P(X < -1) = F(-1) - F(-1-0) = 0.4 - 0 = 0.4$$

$$P(X=1) = P(X \le 1) - P(X<1) = F(1) - F(1-0) = 0.8 - 0.4 = 0.4$$

$$P(X=3) = P(X \le 3) - P(X<3) = F(3) - F(3-0) = 1 - 0.8 = 0.2$$

即 X 的概率分布为

X	-1	1	3
p_k	0.4	0.4	0.2

2.6 一汽车沿一街道行使到达一目的地，需要通过 4 个均设有红绿信号灯的路口，每个路口信号灯为红或绿与其它路口信号灯为红或绿相互独立，且红或绿两种信号显示的时间为 1:2，以 X 表示该汽车首次停下时已通过有红绿灯等的路口数，试求 X 的概率分布.

解　根据已知条件，随机变量 X 的所有可能取值为 0，1，2，3，4.设 $A_i=\{$汽车在第 i 个路口信号灯首次禁止通过$\}$，A_1, A_2, A_3, A_4 相互独立，且 $P(A_i) = \frac{1}{3}$，所以

$$P(X=0)=P(A_1)=\frac{1}{3}，\ P(X=1)=P(\overline{A_1}A_2)=P(\overline{A_1})P(A_2)=\frac{2}{9}，$$

$$P(X=2)=P(\overline{A_1}\ \overline{A_2}A_3)=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3)=\frac{4}{27}，$$

$$P(X=3)=P(\overline{A_1}\ \overline{A_2}\ \overline{A_3}A_4)=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})P(A_4)=\frac{8}{81}，$$

$$P(X=4)=P(\overline{A_1}\ \overline{A_2}\ \overline{A_3}\ \overline{A_4})=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})P(\overline{A_4})=\frac{16}{243}，$$

因此，所求概率分布为

X	0	1	2	3	4
p_k	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{16}{243}$

2.7 一个盒子中装有 4 个小球，球上分别标有 0，1，1，2 的号码数，有放回地取 2 个球，以 X 表示两次抽到球上号码数的乘积，求 X 的概率分布．

解 由题意随机变量 X 的所有可能取值为 0，1，2，4．设 X_1， X_2 分别表示两次抽取得号码数，则

$$P(X=0)=P(X_1=0\cup X_2=0)=P(X_1=0)+P(X_2=0)-P(X_1=0)P(X_2=0)$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{7}{16}.$$

$$P(X=1)=P(X_1=1,X_2=1)=P(X_1=1)P(X_2=1)=\frac{2}{4}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

$$P(X=2)=P\{(X_1=1,X_2=2)\cup(X_1=2,X_2=1)$$
$$=P(X_1=1)P(X_2=2)+P(X_1=2)P(X_2=1)=\frac{2}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{4}.$$

$$P(X=4)=P(X_1=2,X_2=2)=P(X_1=2)P(X_2=2)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}.$$

因此，所求概率分布为

X	0	1	2	4
p_k	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

2.8 设有 10 件产品,其中 7 件是正品,3 件是次品.每次从这批产品中任取一件,在下列三种情况下,求直到取到正品为止所需抽取次数的概率分布.(1) 每次取出的产品不再放回；(2) 每次取出的产品仍放回；(3) 每次取出一件后总是另取一件正品放回到这批产品中.

解　设直到取到正品为止所需抽取的次数为 X .

(1) 因为总共有 3 件次品,在不放回抽取的情况下,最多需 4 次就可取到正品,所以 X 的可能取值为$1,2,3,4$.且

$$P(X=1)=\frac{7}{10},\qquad P(X=2)=\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}=\frac{7}{30},$$

$$P(X=3)=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{7}{8}=\frac{7}{120},\qquad P(X=4)=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{1}{8}\times\frac{7}{7}=\frac{1}{120},$$

所以,X 的概率分布为

X	1	2	3	4
p_k	$\frac{7}{10}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{7}{120}$	$\frac{1}{120}$

(2) 由于是有放回的抽取,每次均在这 10 件产品中抽取,因此每次取到正品的概率为 $\frac{7}{10}$,取到次

品的概率是$\frac{3}{10}$,并且X的可能取值为 $1,2,\cdots,k,\cdots$,事件$(X=k)$表示前$k-1$次取到次品,第k次取到正品,故所求X的概率分布为

$$P(X=k)=(\frac{3}{10})^{k-1}\times\frac{7}{10},\ \ k=1,2,\cdots$$

即X服从几何分布.

(3) 类似(1) ,X的可能取值为$1,2,3,4$,且

$$P(X=1)=\frac{7}{10},\qquad P(X=2)=\frac{3}{10}\times\frac{8}{10}=\frac{6}{25},$$

$$P(X=3)=\frac{3}{10}\times\frac{2}{10}\times\frac{9}{10}=\frac{27}{500},\ \ P(X=4)=\frac{3}{10}\times\frac{2}{10}\times\frac{1}{10}\times\frac{10}{10}=\frac{3}{500},$$

即X的概率分布为

X	1	2	3	4
p_k	$\frac{7}{10}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{27}{500}$	$\frac{3}{500}$

2.9 将一枚硬币接连掷五次,假设至少有一次国徽不出现,试求国徽出现的次数与不出现的次数之比Y的概率分布.

解 设X表示国徽出现的次数,其可能取值为$0,1,2,3,4,5$, 显然它服从$B(5,\frac{1}{2})$,因此

$$P(X=k)=C_5^k\left(\frac{1}{2}\right)^k\times\left(\frac{1}{2}\right)^{5-k}=C_5^k\left(\frac{1}{2}\right)^5.$$

设A表示事件“ 至少有一次国徽不出现 ”则

$$P(A)=P(X\le 4)=1-P(X=5)=\frac{31}{32}.$$

设Z表示事件“ 至少有一次国徽不出现的条件下国徽出现的次数 ”则

$$P(Z=i)=\frac{P[(X=i)\cap A]}{P(A)}=\frac{P(X=i)}{P(A)},i=0,1,2,3,4.$$

由题意$Y=\frac{Z}{5-Z}$,其中$Z=0,1,2,3,4$.于是Y可能取值为$0,\frac{1}{4},\frac{2}{3},\frac{3}{2},4$,且

$$P(Y=0)=P(Z=0)=\frac{1}{31},\qquad P(Y=\frac{1}{4})=P(Z=1)=\frac{5}{31},$$

$$P(Y=\frac{2}{3})=P(Z=2)=\frac{10}{31},\qquad P(Y=\frac{3}{2})=P(Z=3)=\frac{10}{31},$$

$$P(Y=4)=P(Z=4)=\frac{5}{31},$$

那么所求Y的概率分布为

Y	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	4
p_k	$\frac{1}{31}$	$\frac{5}{31}$	$\frac{10}{31}$	$\frac{10}{31}$	$\frac{5}{31}$

2.10 设试验成功的概率为$\frac{3}{4}$。失败的概率为$\frac{1}{4}$。独立重复试验直到成功两次和三次为止，分别求所需试验次数的概率分布.

解 设X表示直到成功两次为止所需的试验次数，则是一个随机变量，且X的可能取值为$2,3$，$\cdots$.

事件“ $X=k$ ”即表示前$k-1$试验中只有一次成功，并且第k次试验成功，由于各次试验独立

进行，事件“前$k-1$试验中固定一次试验，并且第k次成功”的概率为$(\frac{1}{4})^{k-2}(\frac{3}{4})^2$.而前$k-1$次试验中有一次成功有$C_{k-1}^1$种情况，即可以是第一次成功、第二次成功，$\cdots$，或第$k-1$次成功，故$X$的概率分布

$$P\{X=k\}=C_{k-1}^1(\frac{1}{4})^{k-2}(\frac{3}{4})^2,\quad k=2,3,\cdots.$$

设Y表示直到成功三次为止所需的试验次数，则Y的可能取值为3,4，5，$\cdots$.. 事件“$Y=k$”即表示前$k-1$试验中只有两次成功，并且第k次试验成功，类似可求Y概率分布为

$$P\{Y=k\}=C_{k-1}^2(\frac{1}{4})^{k-3}(\frac{3}{4})^3,\quad k=3,4,5,\cdots.$$

2.11 设随机变量$X\sim B(6,p)$，已知$P(X=1)=P(X=5)$，求$P(X=2)$的值.

解　由于$X\sim B(6,p)$，因此

$$P(X=1)=6p(1-p)^5,\ P(X=5)=6p^5(1-p)$$

即$6p(1-p)^5=6p^5(1-p)$,解得$p=\frac{1}{2}$. 此时

$$P(X=2)=C_6^2(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})^{6-2}=\frac{6\times5}{2!}\times(\frac{1}{2})^6=\frac{15}{64}.$$

2.12 某商店出售某种物品，根据以往的经验，每月销售量是X服从参数为4的泊松分布，问在月初进货时，要进多少才能以99%的概率充分满足顾客的需要？

解　设至少要进n件物品，由题意n应满足

$$P(X\le n-1)<0.99,\quad P(X\le n)\ge 0.99$$

即

$$P(X\le n-1)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{4^k}{k!}e^{-4}<0.99,\quad P(X\le n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{4^k}{k!}e^{-4}\ge 0.99$$

查泊松分布表可求得$n=9$.

2.13 有一汽车站有大量汽车通过，每辆汽车在一天某段时间发生事故的概率为0.0001，在某天该段时间内有1000辆汽车通过，求事故数不少于2的概率.

解　设X为1000辆汽车中出事故的次数，依题意，X服从n=1000，p=0.0001的二项分布，即$X\sim B(1000,0.0001)$，由于n较大，p较小，因此也可以近似地认为X服从参数为0.1的泊松分布. 因此，所求概率为

$$\begin{aligned}P(X\ge 2)&=1-P(X=0)-P(X=1)\\&=1-\frac{0.1^0}{0!}e^{-0.1}-\frac{0.1^1}{0!}e^{-0.1}\approx 0.004679.\end{aligned}$$

2.14 一电话交换台每分钟收到呼唤的次数服从参数4的泊松分布，求：(1)每分钟恰有8次呼唤的概率；(2)每分钟的呼唤次数大于10的概率。

解 每分钟收到k次呼唤的概率为$P\{X=k\}=\frac{4^k}{k!}\cdot e^{-4}$，$k=0,1,2,\cdots$.

(1) 每分钟恰有8次呼唤的概率为

$$P\{X=8\}=\frac{4^k}{8!}\cdot e^{-4}\approx 0.02977.$$

(2) 每分钟的呼唤次数大于10的概率

$$P\{X\ge 10\}=1-P\{X<10\}=1-\sum_{k=0}^{9}\frac{4^k}{k!}\cdot e^{-4}=0.00284.$$

2.15 设X服从二项分布，其概率分布为

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\ k=0,1,2,\cdots,\ k=0,1,2,\cdots,$$

问当k取何值时$P\{X=k\}$为最大。

解 如果$P\{X=k\}$为最大，则

$$\begin{cases} P\{X=k\} \ge P\{X=k+1\}, \\ P\{X=k\} \ge P\{X=k-1\}. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \ge C_n^{k+1} p^{k+1} (1-p)^{n-k-1}, \\ C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \ge C_n^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k+1}. \end{cases}$$

也就是$(n+1)p- \le k \le (n+1)p$，故当$k=[(n+1)p]$时，$P\{X=k\}$为最大.

2.16 设X服从泊松分布，其分布规律为$P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$，$k=0,1,2,\cdots,$问当$k$取何值时$P\{X=k\}$为最大。

解 由于

$$\frac{P\{X=k\}}{P\{X=k+1\}}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}/k!}{\lambda^{k+1}e^{-\lambda}/(k+1)!}=\frac{k+1}{\lambda},$$

要使得$P\{X=k\}$为最大，只要

$$\begin{cases} \dfrac{P\{X=k\}}{P\{X=k+1\}} \ge 1, \\ \dfrac{P\{X=k-1\}}{P\{X=k\}} \le 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{k+1}{\lambda} \ge 1, \\ \dfrac{k}{\lambda} \le 1. \end{cases} \Rightarrow \lambda-1 \le k \le \lambda.$$

即当$k=[\lambda]$时，$P\{X=k\}$为最大.

2.17 某人上班，从自己里去办公楼要经过一交通指示灯，这一指示灯有 80%的时间亮红灯，此时他在指示灯旁等待直至绿灯亮。等待时间在区间$[0,30]$(以秒计)服从均匀分布．以X表示他的等待时间，求X的分布函数$F(x)$，并说明X是否为连续型随机变量，是否为离散型随机变量？

解　当他到达指示灯处时，若是亮绿灯，则等待时间为零，亮红灯则等待时间服从区间$[0,30]$上均匀分布．记A表示“ 指示灯亮绿灯 ”，由全概率公式有

$$P(X \le x)=P(A)P(X \le x \mid A)+P(\bar{A})P(X \le x \mid \bar{A})$$

其中

$$P(X \le x \mid A)=\begin{cases} 1, & x \ge 0, \\ 0 & x<0. \end{cases}, \quad P(X \le x \mid \bar{A})=\begin{cases} \dfrac{x}{30}, & 0 \le x \le 30 \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

从而由已知条件得

$$F(x)=P(X \le x)=\begin{cases} 0.2\times 0+0.8\times 0, & x<0, \\ 0.2\times 1+0.8\times\dfrac{x}{30}, & 0 \le x \le 30, \\ 0.2\times 1+0.8\times 1, & x>30. \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 0, & x<0, \\ 0.2+\dfrac{2x}{75}, & 0 \le x \le 30, \\ 1, & x>30. \end{cases}$$

因为$F(x)$在$x=0$处不连续，故X不是连续型随机变量.又因为不存在一个可列点集，使得X在这个点集上取值的概率之和等于 1，故随机变量X也不是离散型的，即X是混合型的随机变量.

2.18 已知连续型随机变量X的分布函数

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le -a, \\ A+B\arcsin\dfrac{x}{a}, & -a \le x < a, \\ 1 & x \ge a. \end{cases}$$

试求(1)常数 A 和 B 的值；(2) $P(-\frac{a}{2} < X < \frac{a}{2})$；(3) 随机变量 X 的概率密度.

解 (1) 由于 $F(x)$ 在 $x=-a$ 和 $x=a$ 处连续，所以

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -a+0} F(x)=F(-a), \\ \lim\limits_{x\to a+0} F(x)=F(a). \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} A-\dfrac{\pi}{2}B=0 \\ A+\dfrac{\pi}{2}B=1 \end{cases}$$

解得 $A=\frac{1}{2}$，$B=\frac{1}{\pi}$. 则其分布函数

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le -a, \\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\arcsin\dfrac{x}{a}, & -a \le x < a, \\ 1 & x \ge a. \end{cases}$$

(2) 所求概率

$$P(-\frac{a}{2} < X < \frac{a}{2}) = F(\frac{a}{2}) - F(-\frac{a}{2}) = (\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{1}{2}) - (\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{-1}{2}) = \frac{1}{3}$$

(3) 随机变量 X 的概率密度

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}, & |x|<a, \\ 0, & |x| \ge a. \end{cases}$$

2.19 设连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} c+x, & -1 \le x < 0, \\ c-x, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & |x|>1. \end{cases}$$

求(1) 常数 c；(2)概率 $P(|X| \le 0.5)$；(3) 分布函数 $F(x)$.

解 (1) 由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-1} 0dx + \int_{-1}^{0}(c+x)dx + \int_{0}^{1}(c-x)dx + \int_{1}^{+\infty} 0dx = 2c-1$$

那末由概率密度的性质 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ 得 $2c-1=1$，即 $c=1$.

(2) 所求概率

$$P(|X| \le 0.5) = \int_{-0.5}^{0.5} f(x)dx = \int_{-0.5}^{0}(1+x)dx + \int_{0}^{0.5}(1-x)dx = 0.75$$

(3) 当 $x<-1$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$；

当 $-1 \le x < 0$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{-1} 0dt + \int_{-1}^{x}(1+t)dt = \frac{1}{2}(1+x)^2$；

当 $0 \le x < 1$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{-1} 0dt + \int_{-1}^{0}(1+t)dt + \int_{0}^{x}(1-t)dt = 1-\frac{1}{2}(1-x)^2$；

当 $x \ge 1$时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{-1} 0dt+\int_{-1}^{0}(1+t)dt+\int_{0}^{1}(1-t)dt+\int_{1}^{x} 0)dt=1$.
故所求分布函数

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-1 \\ \frac{1}{2}(1+x)^2, & -1 \le x<0, \\ 1-\frac{1}{2}(1-x)^2, & 0 \le x<1, \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$$

2.20 设随机变量 X 概率密度 $f(x)=\begin{cases} ax+b, & 0<x<1, \\ 0 & \text{其他}, \end{cases}$ 且 $P(X<\frac{1}{3})=P(X>\frac{1}{3})$，求常数 a 和 b .

解　由于随机变量 X 是连续型随机变量，于是

$$P(X<\frac{1}{3})=1-P(X \ge \frac{1}{3})=1-P(X>\frac{1}{3})$$

那末由已知条件可得 $P(X<\frac{1}{3})=\frac{1}{2}$. 又

$$P(X<\frac{1}{3})=\int_{-\infty}^{\frac{1}{3}} f(x)dx=\int_{0}^{\frac{1}{3}}(ax+b)dx=\frac{1}{18}a+\frac{1}{3}b$$

从而 $\frac{1}{18}a+\frac{1}{3}b=\frac{1}{2}$.

又因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{0}^{1}(ax+b)dx=\frac{1}{2}a+b$$

根据概率密度的性质 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$ 得 $\frac{1}{2}a+b=1$.　于是可解得 $a=-\frac{3}{2}$，$b=\frac{7}{4}$.

2.21 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=Ae^{-|x|}$ ，$-\infty<x<+\infty$ ，求 (1) 系数 A ；(2) $P(0<X<1)$ ；(3) X 的分布函数.

解 (1)系数 A 必须满足 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$，由于 $f(x)=Ae^{-|x|}$ 为偶函数，所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-|x|}dx=2\int_{\infty}^{+\infty} Ae^{-|x|}dx=2\int_{0}^{+\infty} Ae^{-x}dx=1$$

解得 $A=\frac{1}{2}$ ；

(2) $P(0<X<1)=\int_{0}^{1}\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=\int_{0}^{1}\frac{1}{2}e^{-x}dx=\frac{1}{2}(1-e^{-1})$

(3) $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\begin{cases} \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{-|x|}dx, & x<0, \\ \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}e^{-|x|}dx+\int_{0}^{x}\frac{1}{2}e^{-|x|}dx, & x \ge 0. \end{cases}$

$$=\begin{cases} \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{x}dx, & x<0, \\ \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}e^{x}dx+\int_{0}^{x}\frac{1}{2}e^{-x}dx, & x \ge 0. \end{cases}=\begin{cases} \frac{1}{2}e^{x}, & x<0, \\ 1-\frac{1}{2}e^{-x}, & x \ge 0. \end{cases}$$

2.22 设随机变量 X 在区间 $(1,6)$ 服从均匀分布,则方程 $x^2+Xx+1=0$ 有实根的概率为多少？

解 由方程 $x^2+Xx+1=0$ 有实根,可知 $X^2-4\ge 0$,即 $|X|\ge 2$. 由 X 在区间 $(1,6)$ 上服从均匀分布,可知其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}, & 1\le x\le 6,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned}P(|X|\ge 2)&=1-P(|X|<2)=1-\int_{-2}^{2}f(x)dx\\&=1-\int_{-2}^{1}f(x)dx-\int_{1}^{2}f(x)dx\\&=1-\int_{-2}^{1}0dx-\int_{1}^{2}\frac{1}{5}dx=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}.\end{aligned}$$

2.23 某仪器装有三只独立工作的同型号电器元件,其寿命都服从同一指数分布,概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{600}e^{-\frac{x}{600}}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求在仪器使用的最初 200 小时内,至少有一个电子元件损坏的概率.

解 设 A_i 表示事件“在仪器使用的最初 200 小时内,第 i 个电子元件损坏”($i=1,2,3$),以 X_i 表示其寿命. 则

$$P(A_i)=P(X_i\le 200)=\int_0^{200}\frac{1}{600}e^{-\frac{x}{600}}dx=1-e^{-\frac{1}{3}}.$$

因此,所求概率为

$$P(A_1+A_2+A_3)=1-P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)=1-(e^{-\frac{1}{3}})^3=1-\frac{1}{e}.$$

2.24 某种型号的电子管的寿命 X （以小时计）具有以下的概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1000}{x^2}, & x>1000,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

若一架收音机上装有三个这样的电子管，1．求使用的最初 1500 小时内，至少有两个电子管被烧坏的概率；2．求在使用的最初 1500 小时内烧坏的电子管数 Y 的概率分布；3．求 Y 的分布函数．

解 每个电子管使用的最初 1500 小时内被烧坏的概率

$$P(X<1500)=\int_{-\infty}^{1500}f(x)dx=\int_{1000}^{1500}\frac{1000}{x^2}dx=\frac{1}{3}.$$

可认为进行了 3 次独立试验，那么在使用的最初 1500 小时内烧坏的电子管数 $Y\sim B(3,\frac{1}{3})$.

(1) 使用的最初 1500 小时内，至少有两个电子管被烧坏的概率

$$P(Y\ge 2)=1-P(Y=0)-P(Y=1)=1-(\frac{2}{3})^3-C_3^1(\frac{1}{3})(\frac{2}{3})^2=\frac{7}{27}.$$

(2) 使用的最初 1500 小时内烧坏的电子管数 Y 的概率分布

$$P(Y=k)=C_3^k(\frac{1}{3})^k(\frac{2}{3})^{3-k},\ k=0,1,2,3$$

或

Y	0	1	2	3

p_k	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

(3) 随机变量Y的分布函数

$$F(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ \frac{8}{27}, & 0\le y<1,\\ \frac{20}{27}, & 1\le y<2,\\ \frac{26}{27}, & 2\le y<3,\\ 1, & y\ge 3.\end{cases}$$

2.25 设顾客在某银行的窗口等待服务的时间X （以分计)服从指数分布，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}, & x>0,\\ 0, & 其它\end{cases}$$

某顾客在窗口等待服务，若超过 10 分钟，他就离开，他一个月要到银行 5 次，以Y表示一个月里他未等到服务就离开的次数，写出Y的概率分布，并求$P\{Y\ge 1\}$.

解 根据已知条件每次离开服务的概率为

$$P(X\ge 10)=\int_{10}^{+\infty}f(x)dx=\int_{10}^{+\infty}\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}dx=e^{-2}$$

每月离开 5 次相当于做了 5 次独立试验，每次发生的概率为e^{-2}，所以$Y\sim B(5,e^{-2})$，即Y的概率分布为

$$P(Y=k)=C_5^k e^{-2k}(1-e^{-2})^{5-k}$$

而且

$$P(Y\ge 1)=1-P(Y=0)=1-(1-e^{-2})^5\approx 0.5167$$

2.26 一台大型设备在任何长为t的时间内,发生故障的次数$N(t)$服从参数为λt的泊松分布,求(1) 相继两次故障之间的时间间隔T的概率分布；(2) 在设备已经无故障工作 8h 的情况下,再无故障工作 8h 的概率.

解 由题意可知$P[N(t)=k]=\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!},k=0,1,2\cdots$.

(1) 由于随机变量T表示相继两次故障之间的时间间隔,因此，当给定时间t比相继两次事故之间的时间的间隔T h,在长为t的时间内无故障，即$N(t)=0$，反之，当$N(t)=0$时，所给定的时间长t应小于相继两次故障之间的时间间隔，从而$(T>t)=(N(t)=0)$.

当$t<0$时，$F_T(t)=P(T\le t)=P(\varnothing)=0$；

当$t\geq 0$时,

$$F_T(t)=P(T\le t)=1-P(T>t)=1-P\{N(t)=0\}=1-e^{-\lambda t},$$

所以

$$F_T(t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t}, & t\geq 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

即T服从参数为λ的指数分布.

(2) 所求概率为

$$P\{T \geq 16 \big| T \geq 8\} = \frac{P\{T \geq 16\}}{P\{T \geq 8\}} = \frac{1-F_T(16)}{1-F_T(8)} = e^{-8t} .$$

2.27 设 X 服从 $N(-1,16)$，借助于标准正态分布的分布函数表计算：(1) $P(X<2.44)$ ；(2) $P(X>1.48)$ ；(3) $P(X<-2.8)$；(4) $P(|X|<4)$ ； (5) $P(-5<X<2)$；(6) $P(|X-1|>1)$.

解 当 $X \sim N(-1,16)$ 时，则 $P(a \le X \le b) = \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$,借助于该性质，再查标准正态分布函数表可求得

(1) $P(X<2.44) = \Phi(\frac{2.44+1}{4}) = \Phi(0.86) = 0.80511$

(2) $P(X>1.48) = 1-\Phi(\frac{-1.48+1}{4}) = 1-\Phi(-0.12)$

$\qquad = 1-[1-\Phi(0.12)] = \Phi(0.12) = 0.54776$

(3) $P(X<-2.8) = \Phi(\frac{2.8+1}{4}) = \Phi(-0.45) = 1-\Phi(0.45) = 1-0.67364 = 0.32636$

(4) $P(|X|<4) = \Phi(\frac{4+1}{4}) - \Phi(\frac{-4+1}{4}) = \Phi(1.25) - \Phi(-0.75)$

$\qquad = \Phi(1.25) - 1 + \Phi(0.75) = 0.89435 - 1 + 0.77337 = 0.66772$

(5) $P(-5<X<2) = \Phi(\frac{2+1}{4}) - \Phi(\frac{-5+1}{4}) = \Phi(0.75) - \Phi(-1)$

$\qquad = \Phi(0.75) - \Phi(1) + 1 = 0.77337 - 0.84134 + 1 = 0.93203$

(6) $P(|X-1|>1) = 1 - P(|X-1| \le 1) = 1 - P(0 \le X-1 \le 2)$

$\qquad = 1-\Phi(0.75)-\Phi(0.25) \approx 1-0.77337+0.59871 = 0.82534$

2.28 设 $X \sim N(2,\sigma^2)$,且 $P(2<X<4)=0.3$,求 $P(X<0)$.

解 由题设

$$P(2<X<4) = P(\frac{2-2}{\sigma} < \frac{X-2}{\sigma} < \frac{4-2}{\sigma}) = \Phi(\frac{2}{\sigma}) - \Phi(0) = 0.3 ,$$

于是

$$\Phi(\frac{2}{\sigma}) = \Phi(0) + 0.3 = 0.5 + 0.3 = 0.8 .$$

所以

$$P(X<0) = P(\frac{X-2}{\sigma} < \frac{0-2}{\sigma}) = \Phi(-\frac{2}{\sigma}) = 1-\Phi(\frac{2}{\sigma}) = 0.2 .$$

2.29 某校抽样调查结果表明,考生的数学成绩(百分制) 近似服从正态分布,平均成绩为 72 分,96 分以上的考生占 3.2%,试求考生成绩在 60 分至 84 分之间的概率.

解 由题意知，考生的数学成绩 $X \sim N(\mu,\sigma^2), \mu=72$ ，又知 $P(X>96)=0.023$, $1-P(X \leq 96) = 0.023$,即

$$1-\Phi(\frac{96-72}{\sigma}) = 0.023 \Rightarrow \Phi(\frac{24}{\sigma}) = 0.977 .$$

查表得 $\frac{24}{\sigma}=2$,所以 $\sigma=12$. 由此可知 $X \sim N(72,12^2)$,所以

$$P(60 \leq X \leq 84) = \Phi(\frac{84-72}{12}) - \Phi(\frac{60-72}{12})$$

$$= 2\Phi(1) - 1 = 2 \times 0.84134 - 1 = 0.68268 .$$

即考生成绩在 60 分至 84 分之间的概率为 0.68268.

2.30 设随机变量 X 的分布率为

X	-2	-1	0	2
p_k	0.2	0.3	0.4	0.1

分别求$Y=X^2$，$Z=3X+1$，$W=|X|-1$的概率分布.

解 (1) $Y=X^2$的所有可能取值为0，1，4，且

$P(Y=0)=P(X=0)=0.4$；$P(Y=1)=P(X=-1)=0.3$；

$P(Y=4)=P(X=-2)+P(X=2)=0.3$，

随机变量Y分布率为

$$Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 4\\ 0.4 & 0.3 & 0.3\end{pmatrix}.$$

Y	0	1	4
p_k	0.4	0.3	0.3

(2) $Z=3X+1$的所有可能取值为-5,-2,1,7，且

$P(Z=-5)=P(X=-2)=0.2$；　$P(Z=-2)=P(X=-1)=0.3$；

$P(Z=1)=P(X=0)=0.4$；　$P(Z=7)=P(X=2)=0.1$.

随机变量Z分布率为

Z	-5	-1	1	7
p_k	0.2	0.3	0.4	0.1

(3) $W=|X|-1$的所有可能取值为-1,0,1，且

$P(W=-1)=P(X=0)=0.4$；　$P(W=0)=P(X=-1)=0.3$；

$P(W=1)=P(X=-2)+P(X=2)=0.3$

随机变量W分布率为

W	-1	0	1
p_k	0.4	0.3	0.3

2.31 设随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{8}, & 0\leq x\leq 4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求随机变量$Y=2X+8$的概率密度.

解 由于函数$y=2x+8$在$(-\infty,+\infty)$的反函数$x=h(y)=\dfrac{y-8}{2}$,从而所求的概率密度为

$$f_Y(y)=f(\frac{y-8}{2})(\frac{y-8}{2})'=\begin{cases}\dfrac{y-8}{32}, & 8<y<16,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

2.32 设随机变量X服从$(0,1)$上的均匀分布,求(1) $Y=e^X$的概率密度;(2) $Z=-2\ln X$的概率密度.

解 随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(1) 求$Y=e^X$的概率密度.

当$y<1$时,$\{Y<y\}$是不可能事件,则$F(y)=0$；

当$y\geq e$时,$\{Y<y\}$是必然事件,则$F(y)=1$；

当$1\leq y<e$时,

$$F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(e^X\leq y)=P(0\leq X\leq\ln y)$$

$$=\int_0^{\ln y} 1dx=\ln y .$$

从而$Y=e^X$的概率密度为

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y}, & 1\le y<e,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) 求$Z=-2\ln X$的概率密度.

当$z<0$时,$\{Z<z\}$是不可能事件,则$F_Z(z)=0$;

当$0\le z$时,

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(-2\ln X\le z)$$

$$=P(X\ge e^{-\frac{z}{2}})=\int_{e^{-\frac{z}{2}}}^{1} 1dx=1-e^{-\frac{z}{2}} .$$

于是,$Z=-2\ln X$的概率密度为

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-\frac{z}{2}}, & z\ge 0,\\ 0, & z<0.\end{cases}$$

2.33 若随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 求$Y=\dfrac{1}{X}$的分布函数和概率密度.

解 当$y<0$时,

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\frac{1}{X}\le y<0\}=P\{\frac{1}{y}\le X<0\}=\int_{\frac{1}{y}}^{0} 0dx=0 ;$$

当$0<y<1$时,

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{Y\le 0\}+P\{0<Y\le y\}=P\{0<\frac{1}{X}\le y\}$$

$$=P\{\frac{1}{y}\le X\}=\int_{\frac{1}{y}}^{+\infty} 0dx=0 ;$$

当$y\ge 1$时,

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\frac{1}{X}\le y\}=P\{\frac{1}{y}\le X\}=\int_{\frac{1}{y}}^{1} 3x^2dx+\int_1^{+\infty} 0dx=1-\frac{1}{y^3} .$$

所以,Y的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{y^3}, & y>1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

从而,Y的概率密度为

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{y^4}, & y>1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

2.34 设随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\frac{a}{1+x^2},\quad -\infty<x<+\infty .$$

试求:(1) 常数a的值;(2) $Y=\arctan X$的概率密度;(3) $Z=X^2$的概率密度.

解 (1) 由概率密度的性质得

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a}{1+x^2}dx=a(\arctan x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\pi a,$$

所以 $a=\dfrac{1}{\pi}$.

(2) 因为 $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\arctan X\le y)$.

当 $-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$F_Y(y)=P(X\le \tan y)=F_X(\tan y)$ ；

当 $y\le -\dfrac{\pi}{2}$ 或 $y\ge\dfrac{\pi}{2}$ 时，$F_Y(y)=0$.

于是随机变量 $Y=\arctan X$ 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, -\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2},\\ 0, \quad 其它.\end{cases}$$

(2) 因为 $F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X^2\le z)$，且

当 $z\ge 0$ 时，$F_Z(z)=F_X(\sqrt{z})-F_X(-\sqrt{z})$， $f_Z(z)=\dfrac{1}{2\sqrt{z}}[f_X(\sqrt{z})+f_X(-\sqrt{z})]$ ；

当 $z<0$ 时，$(X^2\le z)$ 是不可能事件，所以 $F_Z(z)=0$， $f_Z(z)=0$.

所以 $Z=X^2$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi(1+z)\sqrt{z}}, & z>0.\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

2.35 设随机变量 X 服从 $(0,\pi)$ 上的均匀分布,求 $Y=\sin X$ 的概率密度.

解 由已知条件,随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & 0<x<\pi,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

因为函数 $y=\sin x$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2}]$ 的反函数为 $x=\arcsin y$,而在 $(\dfrac{\pi}{2},\pi)$ 的反函数为 $x=\pi-\arcsin y$,于是可得所求概率密度为

当 $0\le y<1$ 时,

$$\begin{aligned}f_Y(y)&=f(\arcsin y)|(\arcsin y)'|+f(\pi-\arcsin y)|(\pi-\arcsin y)'|\\&=\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}};\end{aligned}$$

当 $y<0$ 或 $y\ge 1$ 时, $f_Y(y)=0$.

故所求概率密度为

$$f_Y(y)=F'(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & 0\le y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

2.36 在半径为 R ,中心在原点的圆周上任抛一点,求该点到点 $(-R,0)$ 的距离 X 的分布密度.

解 随机点 $M(x,y)$ 的圆心角为 Θ ，则 Θ 服从 $[-\pi,\pi]$ 上均匀分布，其分布密度为

$$f_\Theta(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}, & -\pi\le\theta\le\pi,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

由几何知识，M 到$(-R,0)$的距离为 $X=2R\cos\frac{\Theta}{2}$.

当$x<0$时，$F_X(x)=P(X\le x)=P(2R\cos\frac{\Theta}{2}\le x)=0$；

当$0\le x\le 2R$时，

$$F_X(x)=P(X\le x)=P(2R\cos\frac{\Theta}{2}\le x)\ ;$$
$$=P(\Theta\ge 2\arccos\frac{x}{2R})+P(\Theta\ge -2\arccos\frac{x}{2R})$$
$$=\int_{2\arccos\frac{x}{2R}}^{\pi}\frac{1}{2\pi}d\theta+\int_{-\pi}^{-2\arccos\frac{x}{2R}}\frac{1}{2\pi}d\theta$$
$$=\frac{1}{\pi}(\pi-2\arccos\frac{x}{2R})$$

当$x>2R$时，$F_X(x)=P(X\le x)=P(2R\cos\frac{\Theta}{2}\le x)=1$.

所以

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{2R^2-x^2}}, & 0\le x\le 2R\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

2.37 设随机变量 X 在区间$[-1,2]$服从均匀分布．随机变量

$$Y=\begin{cases}1, & \text{若}X>0,\\ 0, & \text{若}X=0,\\ -1, & \text{若}X<0.\end{cases}$$

试求随机变量Y的概率分布．

解 由已知条件随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & -1<x<2,\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$$

而随机变量Y的所有可能取值为 1，0，-1，且

$$P(Y=1)=P(X>0)=1-P(X\le 0)=1-\int_{-1}^{0}\frac{1}{3}dx=\frac{2}{3}\ ;$$
$$P(Y=0)=P(X=0)=0\ ;$$
$$P(Y=-1)=P(X<0)=\int_{-1}^{0}\frac{1}{3}dx=\frac{1}{3}.$$

所以随机变量Y的概率分布为

Y	-1	0	1
p_k	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$

第 3 章　多维随机变量及其分布

3.1 在一箱子里装有 12 只开关，其中 2 只是次品，从中随机地连续取两次，每次取一只. 考虑两种试验：(1)有放回抽样，(2)无放回抽样. 我们定义随机变量 X，Y 如下：

$$X=\begin{cases}0, & \text{若第一次取出的是正品,}\\ 1, & \text{若第一次取出的是次品.}\end{cases}$$

$$Y=\begin{cases}0, & \text{若第二次取出的是正品,}\\ 1, & \text{若第二次取出的是次品.}\end{cases}$$

试分别就(1)、(2)两种情况，写出 X 和 Y 的联合分布律.

解(1)放回抽样情况

由于每次取物是独立的. 由独立性定义知. $P(X=i, Y=j)=P(X=i)P(Y=j)$.

$$P(X=0, Y=0)=\frac{10}{12}\cdot\frac{10}{12}=\frac{25}{36}，P(X=0, Y=1)=\frac{10}{12}\cdot\frac{2}{12}=\frac{5}{36}，$$

$$P(X=1, Y=0)=\frac{2}{12}\cdot\frac{10}{12}=\frac{5}{36}，P(X=1, Y=1)=\frac{2}{12}\cdot\frac{2}{12}=\frac{1}{36}.$$

或写成

X \ Y	0	1
0	25/36	5/36
1	5/36	1/36

(2)不放回抽样的情况

$$P\{X=0, Y=0\}=\frac{10}{12}\cdot\frac{9}{11}=\frac{45}{66}，P\{X=0, Y=1\}=\frac{10}{12}\cdot\frac{2}{11}=\frac{10}{66}.$$

$$P\{X=1, Y=0\}=\frac{2}{12}\cdot\frac{10}{11}=\frac{10}{66}，P\{X=1, Y=1\}=\frac{2}{12}\cdot\frac{1}{11}=\frac{1}{66}.$$

或写成

X \ Y	0	1
0	45/66	10/66
1	10/66	1/66

3.2 在集合 $A=\{1,2,3,\cdots,n\}$中取数两次，每次任取一数，作不放回抽样，以 X 表示第一次取到的数，以 Y 表示第二次取到的数，求 X 和 Y 的联合分布律. 并用表格形式写出当 $n=3$ 时 X 和 Y 的联合分布律.

解　根据题意，取两次且不放回抽样的总可能数为 $n(n-1)$，因此

$$P\{X=i, Y=j\}=\frac{1}{n(n-1)}，(i\neq j，\text{且}1\le i,j\le n)$$

当 n 取 3 时，　$P\{X=i,Y=j\}=\dfrac{1}{6}$,($i\neq j$，且$1\le i,j\le 3$), 表格形式为

X \ Y	0	1	3
1	0	1/6	1/6
2	1/6	0	1/6
3	1/6	1/6	0

3.3 设一加油站有两套加油设备，设备 A 是加油站的工作人员操作的，设备 B 是由顾客自己操作的. A，B 均有两个加油管. 随机取一时刻，A，B 正在使用的软管根数分别记为 X，Y，它们的联合分布律为

X \ Y	0	1	2
0	0.10	0.08	0.06
1	0.04	0.20	0.14
2	0.02	0.06	0.30

(1) 求 $P\{X=1,Y=1\}$， $P\{X\le 1,Y\le 1\}$；

(2) 求至少有一根软管在使用的概率；

(3) 求 $P\{X=Y\}$， $P\{X+Y=2\}$.

解 (1)由表直接可得 $P\{X=1,Y=1\}=0.2$，

$$P\{X\le 1,Y\le 1\}=0.1+0.08+0.04+0.2=0.42.$$

(2)至少有一根软管在使用的概率为

$$P\{X+Y\ge 1\}=1-P\{X=0,Y=0\}=1-0.1=0.9$$

(3) $P\{X=Y\}=P\{X=Y=0\}+P\{X=Y=1\}+P\{X=Y=2\}=0.1+0.2+0.3=0.6$

$$P\{X+Y=2\}=P\{X=0,Y=2\}+P\{X=1,Y=1\}+P\{X=2,Y=0\}=0.28$$

3.4 设随机变量 (X,Y) 概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}k(6-x-y), 0<x<2, 2<y<4,\\ 0, \quad 其他.\end{cases}$

(1) 确定常数 k；

(2) 求 $P\left\{X<1,Y<3\right\}$；

(3) 求 $P\left\{X+Y\le 4\right\}$.

解(1) $\because 1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx\,dy=\int_0^2\int_2^1 k(6-x-y)dydx$， $\therefore k=\frac{1}{8}$

(2) $P(X<1,Y<3)=\int_0^1 dx\int_2^3\frac{1}{8}(6-x-y)dy=\frac{3}{8}$

(3) $P(X+Y\le 4)=\int_0^2 dx\int_0^{4-x}\frac{1}{8}(6-x-y)dy=\frac{2}{3}$

3.5 设随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}Ce^{-(2x+4y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

(1) 试确定常数 C；

(2) 求 (X,Y) 的分布函数；

(3) 求 $P\{Y\le X\}$.

解 (1) 根据 $\iint\limits_{x>0,y>0} f(x,y)dxdy=1$，可得

$$1=\iint\limits_{x>0,y>0} f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{+\infty}Ce^{-(2x+4y)}dy=C\int_0^{+\infty}e^{-2x}dx\int_0^{+\infty}e^{-4y}dy=\frac{C}{8},$$

所以 $C=8$

(2) 由定义

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(x,y)dxdy=\begin{cases}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}8e^{-(2x+4y)}dxdy, & x>0,y>0,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

所以有

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-4y}), & x>0,y>0,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

(3) 将 (X,Y) 看作是平面上随机点的坐标，有 $\left\{Y\le X\right\}=\left\{(X,Y)\in G\right\}$，其中 G 为 xOy

平面上直线 $y=x$ 下方的部分，于是

$$P\{Y\le X\}=P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_G f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}\int_0^x 8e^{-(2x+4y)}dxdy=\frac{2}{3}.$$

3.6 设随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}4xy, & 0<x<1,\ 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求(X,Y)的分布函数.

解 根据分布函数的定义：

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y f(x,y)dxdy,$$

当 $x<0$ 或者 $y<0$ 时，$F(x,y)=0$；

当 $0\le x<1,\ 0\le y<1$ 时，$F(x,y)=\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y f(x,y)dxdy=\int_0^x dx\int_0^y 4xydy=x^2y^2$；

当 $x>1,\ 0\le y<1$ 时，$F(x,y)=\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^y 4xydy=y^2$；

当 $0\le x<1,\ y>1$ 时，$F(x,y)=\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y f(x,y)dxdy=\int_0^x dx\int_0^1 4xydy=x^2$；

当 $x,y\ge 1$ 时，$F(x,y)=\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^1 4xydy=1$.

3.7 设二维随机变量 (X,Y) 的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-\lambda_1 x}-e^{-\lambda_2 y}+e^{-\lambda_1 x-\lambda_2 y-\lambda\max\{x,y\}}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求其边缘分布函数.

解 由联合分布函数 $F(x,y)$，可得 X ,Y 的边缘分布函数为：

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\begin{cases}1-e^{-\lambda_1 x}, & x>0,\\ 0 & \text{其它}.\end{cases}\quad F_Y(x)=F(+\infty,y)=\begin{cases}1-e^{-\lambda_2 y}, & y>0,\\ 0 & \text{其它}.\end{cases}$$

3.8 (1) 求 3.1 题中的随机变量(X,Y)的边缘分布律;

(2) 求 3.2 题 $n=3$ 时随机变量(X,Y)的边缘分布律.

解 (1) ① 放回抽样(第 1 题)

$X \backslash Y$	0	1
0	25/36	5/36
1	5/36	1/36

边缘分布律为

X	0	1
$P_{i\cdot}$	5/6	1/6

Y	0	1
$P_{\cdot j}$	5/6	1/6

② 不放回抽样(第 1 题)

$X \backslash Y$	0	1
0	45/66	10/66
1	10/66	1/66

边缘分布律为

X	0	1
$P_{i\cdot}$	5/6	1/6

Y	0	1
$P_{\cdot j}$	5/6	1/6

(2)(X，Y)的联合分布律如下

X \ Y	1	2	3
1	0	1/6	1/6
2	1/6	0	1/6
3	1/6	1/6	0

X，Y 的边缘分布律分别为

X	0	1	2	3
$P_{i}\cdot$	1/8	3/8	3/8	1/8

Y	0	1
$P_{\cdot j}$	1/8	3/8

3.9 设随机变量(X,Y)在由曲线$y=x^2, y=\dfrac{x^2}{2}, x=1$所围成的区域$G$均匀分布.

(1) 求(X,Y)的概率密度；

(2) 求边缘概率密度$f_X(x), f_Y(y)$.

解 (1)根据题意，(X，Y)的概率密度$f(x,y)$必定是一常数，故由

$$1=\iint_G f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_{x^2/2}^{x^2} f(x,y)dy=\frac{1}{6}f(x,y),$$

得到 $f(x,y)=\begin{cases}6, & (x,y)\in G,\\ 0, & \text{其　他}.\end{cases}$

(2) $f_X(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\displaystyle\int_{x^2/2}^{x^2} 6dy=3x^2, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其　他}.\end{cases}$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\displaystyle\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2y}} 6dx, & 0<y<0.5,\\ \displaystyle\int_{\sqrt{y}}^{1} 6dx, & 0.5\le y<1,\\ 0, & \text{其　他}.\end{cases}=\begin{cases}6(\sqrt{2y}-\sqrt{y}), & 0<y<0.5,\\ 6(1-\sqrt{y}), & 0.5<y<1,\\ 0, & \text{其　他}.\end{cases}$$

3.10 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0<x<y,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$，求边缘概率密度.

解 二维随机变量(X，Y)的取值区域如图 3-1 示，则

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_x^{+\infty} e^{-y}dy=e^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^{y} e^{-y}dx=ye^{-y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

3.11 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}(1+\sin x\sin y),\quad (-\infty<x,y<+\infty),$$

求边缘概率密度.

解 由已知条件

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}(1+\sin x\sin y)dy$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy+\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}x^2}\sin x\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}y^2}\sin ydy$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$$
同理得
$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

3.12 在第 3.3 题中求在 $X=0$ 的条件下 Y 的条件分布律；在 $Y=1$ 的条件下 X 的条件分布律.

解 根据公式 $P\{Y=i\mid X=0\}=\dfrac{P\{Y=i,X=0\}}{P\{X=0\}}$，得到在 $X=0$ 的条件下 Y 的条件分布律为

Y	0	1	2
$P\{Y\mid X=0\}$	5/12	1/3	1/4

类似地，在 $Y=1$ 的条件下 X 的条件分布律为

X	0	1	2
$P\{X\mid Y=1\}$	4/17	10/17	3/17

3.13 将某一医药公司 9 月份和 8 月份收到的青霉素针剂的订货单数分别记为 X 和 Y，据以往积累的资料知 X 和 Y 联合分布律为：

X \ Y	51	52	53	54	55
51	0.06	0.05	0.05	0.01	0.01
52	0.07	0.05	0.01	0.01	0.01
53	0.05	0.10	0.10	0.05	0.05
54	0.05	0.02	0.01	0.01	0.03
55	0.05	0.06	0.05	0.01	0.03

（1）求边缘分布律；(2) 求 8 月份的订单数为 51 时，9 月份订单数的条件分布律.

解 (1)X，Y 的边缘分布律分别为

X	51	52	53	54	55
$P_{i\cdot}$	0.18	0.15	0.35	0.12	0.20

(2)因 $P\{X=i\mid Y=51\}=\dfrac{P\{X=i,Y=51\}}{P\{Y=51\}}$，得到 8 月份的订单数为 51 时，9 月份订单数的条件分布率

i	51	52	53	54	55
$P\{X=i\mid Y=51\}$	6/28	7/28	5/28	5/28	5/28

3.14 在 3.9 题中求条件概率密度 $f_{Y|X}(y\mid x)$，$f_{X|Y}(x\mid y)$，$f_{X|Y}(x\mid 0.5)$.

解 因为 $f(x,y)=\begin{cases}6, & (x,y)\in G,\\ 0, & \text{其　他}.\end{cases}$.

$$f_X(x)=\begin{cases}\int_{x^2/2}^{x^2} 6dy=3x^2, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其 他}.\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}6(\sqrt{2y}-\sqrt{y}), & 0<y<0.5,\\ 6(1-\sqrt{y}), & 0.5<y<1,\\ 0, & \text{其 他}.\end{cases}$$

所以，当$0<x<1$时，$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{2}{x^2}, & x^2/2<y<x^2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

当$0<y<0.5$时，$f_{X|Y}(x\,|\,y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2y}-\sqrt{y}}, & \sqrt{y}<x<\sqrt{2y},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

当$0.5\le y<1$时，$f_{X|Y}(x\,|\,y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\sqrt{y}}, & \sqrt{y}<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

当$y=0.5$时，$f_{X|Y}(x\,|\,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\sqrt{0.5}}, & \sqrt{0.5}<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

3.15 设随机变量(X,Y)在由曲线$y=x^2, y=\sqrt{x}$所围成的区域G均匀分布.

（1）写出(X,Y)的概率密度；

（2）求边缘概率密度$f_X(x), f_Y(y)$；

（3）求条件概率密度$f_{Y|X}(y\,|\,x)$，并写出当$x=0.5$时的条件概率密度.

解 (1) 根据题意，(*X*，*Y*)的概率密度$f(x,y)$必定是一常数，故由

$1=\iint\limits_G f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy=\dfrac{1}{3}f(x,y)$，得到$f(x,y)=\begin{cases}3, & (x,y)\in G,\\ 0, & \text{其 他}.\end{cases}$

(2) $f_X(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{x^2}^{\sqrt{x}} 3dy=3(\sqrt{x}-x^2), & 0<x<1,\\ 0, & \text{其 他}.\end{cases}$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{y^2}^{\sqrt{y}} 3dx=3(\sqrt{y}-y^2), & 0<y<1,\\ 0, & \text{其 他}.\end{cases}$$

(3) 当$0<x<1$时，$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}-x^2}, & x^2<y<\sqrt{x},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

特别地，当$x=0.5$时的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y\,|\,0.5)=\begin{cases}\dfrac{4}{2\sqrt{2}-1}, & 1/4<y<\sqrt{2}/2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

3 .16 设X在区间(0 , 1) 上随机地取值，当观察$X=x$ $(0<x<1)$时，Y在区间$(0,x)$上随机地取值,求$f_{Y|X}(y\,|\,x)$.

解 按题意 X 具有概率密度 $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & 其\quad 它.\end{cases}$ 在 $X=x$ $(0<x<1)$ 的条件下，Y 的条件密度为

$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<y<x,\\ 0, & 其它.\end{cases}.$$

3.17 设随机变量 (X,Y) 的联合分布函数为 $F(x,y)=A(B+\arctan\dfrac{x}{2})(C+\arctan\dfrac{y}{3})$，其中 $A\neq 0$，(1) 求常数 A,B,C；(2) 判断 X 与 Y 是否独立.

解 (1) 由联合分布函数的性质，对于任意的 x,y 有

$F(+\infty,+\infty)=1$，即 $A(B+\dfrac{\pi}{2})(C+\dfrac{\pi}{2})=1$，

$F(x,-\infty)=0$，即 $A(B+\arctan\dfrac{x}{2})(C-\dfrac{\pi}{2})=0$，

$F(-\infty,y)=0$，即 $A(B-\dfrac{\pi}{2})(C+\arctan\dfrac{y}{3})=0$.

解之得 $A=\dfrac{1}{\pi^2}$, $B=C=\dfrac{\pi}{2}$.

(2) 由联合分布函数 $F(x,y)$，可得 X ,Y 的边缘分布函数为：

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2}),\quad F_Y(x)=F(+\infty,y)=\frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2})$$

因 $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$，所以 X 与 Y 相互独立.

3.18（1）第 3.1 题中的随机变量 X 和 Y 是否相互独立.

(2) 问在 3.3 题中 X，Y 是否相互独立？

解 (1) 放回抽样的情况

$P\{X=0, Y=0\}=P\{X=0\}\cdot P\{Y=0\}=\dfrac{25}{36}$,$P\{X=0, Y=1\}=P\{X=0\}P\{Y=1\}=\dfrac{5}{36}$,

$P\{X=1, Y=0\}=P\{X=1\}P\{Y=0\}=\dfrac{5}{36}$,$P\{X=1, Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1\}=\dfrac{1}{36}$.

在放回抽样的情况下，X 和 Y 是独立的.

不放回抽样的情况：

$P\{X=0, Y=0\}=\dfrac{10}{12}\cdot\dfrac{9}{11}=\dfrac{45}{66}$，$P\{X=0\}=\dfrac{10}{12}=\dfrac{5}{6}$.

$P\{X=0\}=P\{X=0, Y=0\}+P\{Y=0, X=1\}=\dfrac{10}{12}\cdot\dfrac{9}{11}+\dfrac{2}{11}\cdot\dfrac{10}{11}=\dfrac{5}{6}$.

$P\{X=0\}\cdot P\{Y=0\}=\dfrac{5}{6}\times\dfrac{5}{6}=\dfrac{25}{36}$

$P\{X=0, Y=0\}\neq P\{X=0\}P\{Y=0\}$

所以 X 和 Y 不独立

(2) 求出边缘分布律为

X \ Y	1	2	3	$P\{X=i\}$
0	0.10	0.08	0.06	0.24
1	0.04	0.20	0.14	0.38
2	0.02	0.06	0.30	0.38
$P\{Y=j\}$	0.16	0.34	0.50	1

很显然，$P\{X=0,Y=0\}\neq P\{X=0\}P\{Y=0\}$，所以 X,Y 不是相互独立.

3.19 设一离散型随机变量的分布律为

Y	-1	0	1
p_k	$\theta/2$	$1-\theta$	$\theta/2$

又设 Y_1，Y_2 是两个相互独立的随机变量，且 Y_1，Y_2 都与 Y 有相同的分布律. 求 Y_1，Y_2 的联合分布律. 并求 $P\{Y_1=Y_2\}$.

解 由相互独立性，可得 Y_1,Y_2 的联合分布律为

$$P\{Y_1=i,Y_2=j\}=P\{Y_1=i\}P\{Y_2=j\},\quad i,j=-1,0,1$$

结果写成表格为

Y_1 \ Y_2	-1	0	1
-1	$\theta^2/4$	$\theta(1-\theta)/2$	$\theta^2/4$
0	$\theta(1-\theta)/2$	$(1-\theta)^2$	$\theta(1-\theta)/2$
1	$\theta^2/4$	$\theta(1-\theta)/2$	$\theta^2/4$

$$P\{Y_1=Y_2\}=P\{Y_1=Y_2=-1\}+P\{Y_1=Y_2=0\}+P\{Y_1=Y_2=1\}=(1-\theta)^2+\theta^2/2.$$

3.20 已知随机变量 X_1,X_2 的分布律为

X_1	-1	0	1
p_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

X_2	-1	0
p_k	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

且 $P\{X_1X_2=0\}=1$.（1）求 X_1 和 X_2 的联合分布律; (2)问 X_1 和 X_2 是否独立? 为什么?

解（1）因为 $P\{X_1X_2=0\}=1$，所以 $P\{X_1X_2\neq 0\}=1-P\{X_1X_2=0\}=0$，即

$$P\{X_1=-1,X_2=1\}=P\{X_1=1,X_2=1\}=0.$$

设 X_1 和 X_2 的联合分布率为

X_1 \ X_2	0	1	$P\{X_2=i\}$
-1	P_{11}	0	0.25
0	P_{21}	P_{22}	0.5
1	P_{31}	0	0.25
$P\{X_1=j\}$	0.5	0.5	1

(2)因为 $P_{21}=0\neq\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$，所以 X_1 和 X_2 不独立.

3.21 设 X，Y 是两个相互独立的随机变量，$X\sim U(0,1)$，Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}8y, & 0<y<1/2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试写出 X，Y 的联合概率密度，并求 $P\{X>Y\}$.

解 根据题意，X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1,\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$$

所以根据独立定，X，Y 的联合概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}8y & 0<x<1, 0<y<1/2,\\ 0 & \text{其他}.\end{cases},$$

$$P\{X>Y\}=\iint\limits_{x>y}f(x,y)dxdy=\int_0^{1/2}dx\int_y^1 8ydx=\frac{2}{3}..$$

3.22 设 X，Y 是两个相互独立的随机变量，X 在(0，1)上服从均匀分布. Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{\frac{y}{2}}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

(1) 求 X 和 Y 的联合密度； (2) 设含有 a 的二次方程为 $a^2+2Xa+Y=0$，试求方程有实根的概率.

解 (1) X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}1, & x\in(0,1),\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

Y 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$ 且知 X, Y 相互独立，

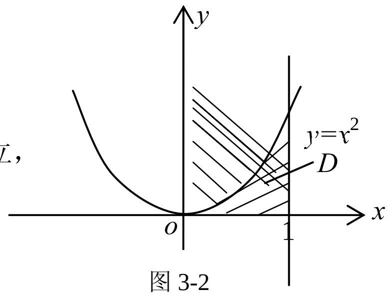


图 3-2

于是(X，Y)的联合密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} & 0<x<1, y>0,\\ 0 & \text{其它}.\end{cases}$$

(2) 由于 a 有实跟根，从而判别式 $\Delta=4X^2-4Y\ge 0$，即：$Y\le X^2$

记 $D=\{(x,y)\,|\,0<x<1, 0<y<x^2\}$，如图 3-2 所示

$$P(Y\le X^2)=\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}dy=-\int_0^1 dx\int_0^{x^2}de^{-\frac{y}{2}}=1-\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$=1-\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^0 e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1-\sqrt{2\pi}(\Phi(1)-\Phi(2))=1-\sqrt{2\pi}(0.8413-0.5)$$

$$=1-2.5066312\times 0.3413=1-0.8555=0.1445$$

3.23 设 X，Y 是两个相互独立的随机变量，其概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\mu e^{-\mu y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

其中 $\lambda>0,\ \mu>0$ 是常数. 引入随机变量

$$Z=\begin{cases}1, & X\le Y,\\ 0, & X>Y.\end{cases}$$

求 Z 的分布律和分布函数.

解 因为

$$P\{X\le Y\}=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\lambda\mu e^{-(\lambda x+\mu y)}dydx=\int_0^{+\infty}\lambda e^{-(\lambda x+\mu x)}dx-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda x+\mu x)}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\lambda}{\lambda+\mu},$$

$$P\{X>Y\}=1-P\{X\le Y\}=\frac{\mu}{\lambda+\mu}.$$

从而 Z 的分布率为

Z	0	1

概率	$\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}$	$\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}$

Z 的分布函数为

$$f_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}, & 0\le z<1,\\ 1, & z\ge 1.\end{cases}$$

3.24 设随机变量 X 和 Y 的联合分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	1/12	1/6	1/24
1	1/4	1/4	1/40
2	1/8	1/20	0
3	1/120	0	0

(1) 求$U=\max(X,Y)$的分布律；

(2) 求$V=\min(X,Y)$的分布律；

(3) 求$W=X+Y$ 的分布律.

解(1)$U=\max(X,Y)$的分布律为

$$P\{U=k\}=P\{\max(X,Y)=k\}=P\{X=k,Y\le k\}+P\{Y=k,X<k\},\quad k=0,1,2,3$$

如，$P\{U=2\}=P\{X=2,Y\le 2\}+P\{Y=2,X<2\}$

$=1/8+1/20+0+1/24+1/40=29/120$，

其余类似. 结果写成表格形式为

U	0	1	2	3
p_k	1/12	2/3	29/120	1/120

(2)$V=\min(X,Y)$的分布律为

$$P\{V=k\}=P\{\min(X,Y)=k\}=P\{X=k,Y\ge k\}+P\{Y=k,X>k\},\quad k=0,1,2$$

如，$P\{V=2\}=P\{X=2,Y\ge 2\}+P\{Y=2,X>2\}=0+0=0$，其余类似. 结果写成表格形式为

U	0	1
p_k	27/40	13/40

(3)$W=X+Y$ 的分布律为

$$P\{W=k\}=P\{X+Y=k\}=\sum_{i=0}^{k}P\{X=i,Y=k-i\},\quad k=0,1,2,3,4,5$$

如，$P\{W=2\}=\sum_{i=0}^{2}P\{X=i,Y=2-i\}=1/24+1/4+1/8=5/12$，其余类似. 结果写成表格形式为

W	0	1	2	3
p_k	1/12	5/12	5/12	1/12

3.25 设 X 和 Y 相互独立，分别服从二项分布 $B(n,p)$ 和 $B(m,p)$，求 $Z=X+Y$ 的分布.

解 首先指出，$Z=X+Y$ 可取 $0,1,2,\cdots,n+m$，由独立性假定

$$P\{Z=k\}=\sum_{i=0}^{k}P\{X=i\}P\{Y=k-i\}=\sum_{i=0}^{k}C_n^i p^i(1-p)^{n-i}C_m^{k-i}p^{k-i}(1-p)^{m-(k-i)}$$

$$=\sum_{i=0}^{k}C_n^iC_m^{k-i}p^k(1-p)^{n+m-k}$$

由 $\sum_{i=0}^{k} C_n^i C_m^{k-i} = C_{n+m}^k$，可得

$$P\{Z=k\} = C_{n+m}^k p^k (1-p)^{n+m-k}, \quad k = 0,1,2,\cdots,n+m$$

即 Z 服从二项分布 $b(n+m,p)$.

3.26 设随机变量 $X \sim U(-1,1)$，随机变量 Y 具有概率密度 $f_Y(y) = \dfrac{1}{\pi(1+y^2)}$，$-\infty < y < +\infty$，设 X，Y 相互独立，求 $Z = X+Y$ 的概率密度.

解 因为 $f_X(x) = \begin{cases} 1/2 & -1 < x < 1, \\ 0 & 其他. \end{cases}$ 所以 $Z = X+Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) f_X(z-y)dy = \int_{z-1}^{z+1} \frac{1}{2\pi(1+y^2)}dy = \frac{1}{2\pi}\left[\arctan(z+1) - \arctan(z-1)\right].$$

3.27 设随机变量 X，Y 都在(0,1)上服从均匀分布，且 X，Y 相互独立，求 $Z = X+Y$ 的概率密度.

解 因为 X，Y 都在(0,1)上服从均匀分布，所以

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1, \\ 0 & 其他. \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1, \\ 0 & 其他. \end{cases}$$

根据卷积公式，得

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) f_X(z-y)dy = \begin{cases} \int_{z-1}^{1} 1dy, & z \ge 1 \\ \int_{0}^{z} 1dy, & 0 \le z < 1 \\ 0, & 其他 \end{cases} = \begin{cases} 2-z, & 1 \le z < 2, \\ z, & 0 \le z < 1, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

3.28 设某种商品一周的需要量是一个随机变量，其概率密度为 $f(t) = \begin{cases} te^{-t}, & t > 0, \\ 0, & t \le 0. \end{cases}$ 并设各周的需要量是相互独立的，试求(1)两周的需要量的概率密度; (2) 三周的需要量的概率密度.

解 (1)设第一周需要量为 X，它是随机变量, 设第二周需要量为 Y，它是随机变量且为同分布，其分布密度为

$$f(t) = \begin{cases} te^{-t}, & t > 0, \\ 0 & t \le 0. \end{cases}$$

$Z=X+Y$ 表示两周需要的商品量，由 X 和 Y 的独立性可知：

$$f(x,y) = \begin{cases} xe^{-x} ye^{-y} & x > 0, y > 0, \\ 0 & 其它. \end{cases}$$

∵ $z \geqslant 0$ ∴ 当 $z<0$ 时，$f_z(z) = 0$

当 $z>0$ 时，由和的概率公式知

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(z-y) f_y(y)dy$$

$$= \int_0^z (z-y)e^{-(z-y)} \cdot ye^{-y}dy = \frac{z^3}{6}e^{-z}$$

所以 z 的概率密度为

$$f_z(z)=\begin{cases}\dfrac{z^3}{6}e^{-z}, & z>0,\\ 0 & z\le 0.\end{cases}$$

(2) 设 z 表示前两周需要量，其概率密度为 $f_z(z)=\begin{cases}\dfrac{z^3}{6}e^{-z}, & z>0,\\ 0 & z\le 0.\end{cases}$

设 ξ 表示第三周需要量，其概率密度为 $f_\xi(x)=\begin{cases}xe^{-x}, & x>0,\\ 0 & x\le 0.\end{cases}$

又 z 与 ξ 相互独立，令 η = z + ξ 表示前三周需要量

∵ $\eta\geqslant 0$，　　∴当 $u<0$，　　$f_\eta(u)=0$

当 $u>0$ 时，$f_\eta(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(u-y)f_\xi(y)dy=\int_0^u\frac{1}{6}(u-y)^3e^{-(u-y)}\cdot ye^{-y}dy=\frac{u^5}{120}e^{-u}$

所以 η 的概率密度为

$$f_\eta(u)=\begin{cases}\dfrac{u^5}{120}e^{-u} & u>0,\\ 0 & u\le 0.\end{cases}$$

3.29 设随机变量 X，Y 相互独立，且都服从参数为 1 的指数分布，试求 $Z=\dfrac{X}{Y}$ 的概率密度.

解 由公式得 $f_{\frac{X}{Y}}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f_X(yz)f_Y(y)dy=\int_0^{+\infty}yf_X(yz)f_Y(y)dy$

$$=\begin{cases}\int_0^{+\infty}ye^{-yz}e^{-y}dy, & z>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{(1+z)^2}, & z>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

3.30 设随机变量 X, Y 相互独立，它们的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}e^{-3x}, & x>0,0\le y\le 2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 求边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$；

(2) 求 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布函数.

解 (1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^2 3e^{-3x}/2dy=3e^{-3x}, & x>0,\\ 0, & \text{其　他}.\end{cases}$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^{\infty}3e^{-3x}/2dx, & 0\le y\le 2,\\ 0, & \text{其　他}.\end{cases}=\begin{cases}1/2, & 0\le y\le 2,\\ 0, & \text{其　他}.\end{cases}$$

(2) $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布函数为

$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{\max\{X,Y\}\le z\}=P\{X\le z,Y\le z\}=P\{X\le z\}P\{Y\le z\}=F_X(z)F_Y(z)$

因为

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 1-e^{-3x}, & x>0.\end{cases}\quad F_Y(y)=\begin{cases}0 & y<0,\\ y/2 & 0\le y\le 2,\\ 1 & y>2.\end{cases}$$

所以，

$$F_Z(z)=F_X(z)F_Y(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \frac{z}{2}\left(1-e^{-3z}\right), & 0\le z\le 2,\\ 1-e^{-3z}, & z>2.\end{cases}$$

(3) $P\{\frac{1}{2}<Z\le 1\}=F_Z(1)-F_Z(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}e^{-3}+\frac{1}{4}e^{-\frac{3}{2}}$.

3.31 设某种型号的电子管的寿命(以小时计)近似地服从 $N(160,20^2)$ 分布，随机地选取 4 只，求其中没有一只寿命小于 180 小时的概率.

解 设 X_1，X_2，X_3，X_4 为 4 只电子管的寿命，它们相互独立，同分布，其概率密度为：

$$f_T(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 20}e^{-\frac{(t-160)^2}{2\times 20^2}}$$

$$f\{X<180\}=F_X(180)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{20}\int_{-\infty}^{180}\frac{(t-160)^2}{2\times 20^2}dt$$

$$\underline{\underline{令(t-160)/20=u}}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{1}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\Phi(\frac{180-60}{20})$$

$$\underline{\underline{查表}}\,0.8413$$

设 $N=\min\{X_1,X_2,X_3,X_4\}$

$$P\{N>180\}=P\left\{X_1>180,X_2>180,X_3>180,X_4>180\right\}=P\left\{X>180\right\}^4$$

$$=\{1-p\left[X<180\right]\}^4=\left(0.1587\right)^4=0.00063.$$

3.32 设随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}be^{-(x+y)}, & 0<x<1,0<y<+\infty,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

(1) 试确定常数 b；

(2) 求边缘概率密度 $f_X(x),f_Y(y)$；

(3) 求函数 $U=\max\{X,Y\}$ 的分布函数.

解 (1) $1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy\,dx=\int_0^1\int_0^{+\infty}be^{-(x+y)}dy\,dx=b[1-e^{-1}]$

$$\therefore\quad b=\frac{1}{1-e^{-1}}$$

(2) $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}0, & x\le 0或x\ge 1,\\ \int_0^{+\infty}be^{-(x+y)}dy=\frac{e^{-x}}{1-e^{-1}}, & 0<x<1.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}0, & y\le 0,\\ \int_0^1 be^{-(x+y)}dx=e^{-y}, & y>0.\end{cases}$$

(3) $F_u(\omega)=P\{U\le u\}=P\{X\le u,\ Y\le u\}=F(u,u)=\int_{-\infty}^{u}\int_{-\infty}^{u} f(x,y)dx\,dy$

$u<0$, $F_U(u)=0$,

$0\le u<1,\ F_U(u)=\int_0^u\int_0^u be^{-(x+y)}dx\,dy=\dfrac{(1-e^{-u})^2}{1-e^{-1}}$,

$u\ge 1,\ F_U(u)=\int_0^u\int_0^1 be^{-(x+y)}dx\,dy=1-e^{-u}$.

3.33 设随机向量(X,Y)的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0<x\le y, 0<y\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 试求$Z=XY$的密度函数.

解 因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} w(xy)f(x,y)dxdy=\int_0^1 dy\int_0^y w(xy)\cdot 8xydx$$

$$\overset{\text{令}z=xy}{=\!=\!=\!=\!=}\int_0^1 dy\int_0^{y^2} w(z)\cdot 8z\cdot\frac{1}{y}dz$$

$$\overset{\text{交换积分次序}}{=\!=\!=\!=\!=\!=}\int_0^1 w(z)\cdot 8zdz\int_{\sqrt{z}}^1\frac{1}{y}dy=\int_0^1 w(z)\cdot(-4z\ln z)dz$$

所以

$$f_Z(z)=\begin{cases}-4z\ln z, & 0<z<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

3.34 设随机变量X,Y相互独立，其概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求$2X+Y$的概率密度.

解 因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} w(2x+y)f(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^{+\infty} w(2x+y)e^{-y}dxdy$$

$$\overset{\text{令}z=2x+y}{=\!=\!=\!=\!=}\int_0^{+\infty}\left(\int_y^{2+y} w(z)\cdot\frac{1}{2}e^{-y}dz\right)dy$$

$$\overset{\text{交换积分次序}}{=\!=\!=\!=\!=\!=}\int_0^2\left(w(z)\int_0^z\frac{1}{2}e^{-y}dy\right)dz+\int_2^{+\infty} w(z)\left(\int_{z-2}^{z}\cdot\frac{1}{2}e^{-y}dy\right)dz$$

$$=\int_0^2 w(z)\cdot\frac{1}{2}(1-e^{-z})dz+\int_2^{+\infty} w(z)\cdot\frac{1}{2}(e^2-1)e^{-z}dz,$$

所以

$$f_Z(z)=\begin{cases}0, & z\le 0,\\ \frac{1}{2}(1-e^{-z}), & 0<z\le 2,\\ \frac{1}{2}(e^2-1)e^{-z}, & z>2.\end{cases}$$

第 4 章　随机变量的数字特征

4.1 袋内有三个 1 号球，一个 2 号球和两个 3 号球，从中一次任取三个球，记 X 表示取到三个球的最大号数，求 $E(X)$.

解 计算 $E(X)$ 需先求出 X 的分布，X 可以取1,2,3三个值，由古典概率公式有：

$$p_1 = P\{X=1\} = \frac{C_3^3}{C_6^3} = \frac{1}{20}, \quad p_2 = P\{X=2\} = \frac{C_3^2 C_1^1}{C_6^3} = \frac{3}{20}, \quad p_3 = P\{X=3\} = \frac{C_2^1 C_4^2 + C_2^2 C_4^1}{C_6^3} = \frac{16}{20}$$

于是

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} i p_i = 1\times\frac{1}{20} + 2\times\frac{3}{20} + 3\times\frac{16}{20} = 2.75$$

4.2 设随机变量 X 的分布律为 $P\{X = (-1)^{k+1}\frac{5^k}{k}\} = \frac{4}{5^k}$，$k=1,2,\cdots$,试说明 X 的数学期望不存在.

解 因为 $E(X) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{5^k}{k}\times\frac{4}{5^k} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{4}{k}$，又因为 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k}$ 是发散的级数，即 $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{4}{k}$ 是条件收敛，不是绝对收敛，从而 $E(X)$ 不存在.

4.3 箱内有 5 件产品，其中 2 件为次品，每次从箱中随机地取出一件产品，取后不放回，直到查出全部次品为止，求所需检验次数 X 的数学期望.

解 由题意，X 可能的取值为 2,3,4,5. $A_i = \{$第 i 次取到次品$\}$，$i = 1,2,3,4,5$，那么

$$P(X=2) = P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1) = \frac{2}{5}\times\frac{1}{4} = 0.1$$

$$\begin{aligned} P(X=3) &= P(A_1\bar{A}_2A_3 + \bar{A}_1A_2A_3) = P(A_1\bar{A}_2A_3) + P(\bar{A}_1A_2A_3) \\ &= P(A_1)P(\bar{A}_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1\bar{A}_2) + P(\bar{A}_1)P(A_2 \mid \bar{A}_1)P(A_3 \mid \bar{A}_1A_2) \\ &= \frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3} + \frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3} = 0.2 \end{aligned}$$

类似可求 $P(X=4) = 0.3$，$P(X=5) = 0.4$.那么 X 的分布律

X	2	3	4	5
概率	0.1	0.2	0.3	0.4

于是所需检验次数 X 的数学期望

$$E(X) = \sum_{i=2}^{5} iP(X=i) = 2\times0.1 + 3\times0.2 + 4\times0.3 + 5\times0.4 = 4.$$

4.4 设 5 人在某大楼一层进入同一部电梯，此大楼共有 28 层，设每位乘客在任何一层离开电梯的概率相同，试求电梯内乘客全部离开时，电梯需停次数的数学期望.

解 设 $X_i = \begin{cases} 0, & \text{第}i\text{层电梯不停}, \\ 1, & \text{第}i\text{层电梯停}. \end{cases}$ $i = 1,2,\cdots,28.$,并设 X 为电梯要停的次数.

则 $X = \sum_{i=1}^{28} X_i$，由题意知 $P\{X_i = 0\} = (1-\frac{1}{28})^5$，$P\{X_i = 1\} = 1-(1-\frac{1}{28})^5$

从而 $$E(X_i)=1-(1-\frac{1}{28})^5,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

由数学期望的性质(3)，可得

$$E(X)=E(\sum_{i=1}^{28}X_i)=\sum_{i=1}^{28}E(X_i)=28[1-(1-\frac{1}{28})^5]\approx 4.66.$$

4.5 设随机变量 X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的泊松分布，且已知 $E[(X-2)(X-3)]=2$，求 λ 的值.

解 因为

$$E\left[(X-2)(X-3)\right]=E(X^2-5X+6)=E(X^2)-5E(X)+6=2$$

$$[D(X)+E^2(X)]-5E(X)+6=2$$

即 $\lambda+\lambda^2-5\lambda+4=0$，解得：$\lambda=2$.

4.6 设连续型随机变量 X 的概率密度函数是 $f(x)=\begin{cases}kx^{\alpha} & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，其中 $k,\alpha>0$，且 $E(X)=0.75$，求 k,α 的值.

解 由归一性有

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^1 kx^{\alpha}dx=\frac{k}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\Big|_0^1=\frac{k}{\alpha+1}$$

及

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1 kx^{\alpha+1}dx=\frac{k}{\alpha+2}x^{\alpha+2}\Big|_0^1=\frac{k}{\alpha+2}=0.75$$

故有 $k=3,\alpha=2$.

4.7 设随机变量 (X,Y) 服从在 A 上的均匀分布，其中 A 为 x 轴、y 轴及直线 $x+y+1=0$ 所围成的区域.求 $E(X)$，$E(-3X+2Y)$，$E(XY)$.

解 因为 $(X,Y)\sim U(A)$,所以

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & -1<x<0,-1<y<0\\ 0, & \text{其它}\end{cases},$$

故有

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{-1}^{0}2dy=2\qquad(-1<x<0)$$

$$F_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_{-1}^{0}2dx=2\qquad(-1<y<0)$$

$$E(X)=\int_{-1}^{0}\int_{-1}^{0}2xdxdy=-1=E(Y)$$

$$E(-3X+2Y)=-3E(X)+2E(Y)=3-2=1$$

$$E(XY)=\int_{-1}^{0}\int_{-1}^{0}xy\cdot 2dxdy=\frac{1}{2}$$

4.8 某个商店经过长期的统计，获知本商店每月销售某品牌的某个型号的液晶电视机的台数 X 服从区间 $[10,30]$ 上的均匀分布，该商店每销售一台这个型号的液晶电视机可获利润 500 元；如果月初进该型号的液晶电视机太多，而销售不完，则月末必须削价处理，每处理一台该型号的液晶电视机亏损 100 元；否则，可从外部调剂供应，此时每销售一台该型号的液晶电视机仅获利 300 元，为使该商店所获利润期望值不少于 9332 元，试问该商店每月月初需进该型号的液晶电视机多少台？

解 设月初需进该型号的液晶电视机 y 台，满足要求，则所获利润

$$Z=\begin{cases}500x-100(y-x), & 10\le x<y,\\ 500y+(x-y)\times 300, & y<x\le 30.\end{cases}$$

期望利润为

$$E(X)=\int_{10}^{30}\frac{1}{20}zdx=\frac{1}{20}\int_{10}^{y}(600x-100y)dx+\frac{1}{20}\int_{y}^{30}(300x+200y)dx$$

即 $-7.5y^2+350y+5250\ge 9332$，解得 $y\approx 23$.

4.9 设随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	0.5	1	2
p_k	1/3	1/6	1/6	1/12	1/4

求 $E(X)$，$E(-X+1)$，$E(X^2)$，$D(X)$.

解 由随机变量 X 的分布律，得

X	-1	0	0.5	1	2
$-X+1$	2	1	1/2	0	-1
X^2	1	0	1/4	1	4
p_k	1/3	1/6	1/6	1/12	1/4

所以

$$E\left(X\right)=(-1)\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{12}+2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$$

$$E\left(-X+1\right)=2\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}+0\times\frac{1}{12}+(-1)\times\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$$

$$E\left(X^2\right)=1\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{12}+4\times\frac{1}{4}=\frac{35}{24}$$

$$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{35}{24}-(\frac{1}{3})^2=\frac{97}{72}$$

4.10 设有 n 只小球和 n 只能装小球的盒子,他们依次编有序号 $1,2,\dots,n$. 今随机地将 n 只小球分别装入 n 只盒子,且每只盒子只需放一只小球. 试求两个序号恰好一致的数对个数的数学期望和方差.

解 设两个序号恰好一致的数对个数为 X ,如果直接计算 $E(X),D(X)$,将感到非常困难,为此将 X 分解. 令

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{第}i\text{个小球装入第}i\text{个盒子},\\ 0, & \text{第}i\text{个小球未装入第}i\text{个盒子}.\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,n.$$

则

$$X=X_1+X_2+\cdots+X_n,$$

且

$$P(X_i=0)=1-\frac{1}{n},\qquad P(X_i=1)=\frac{1}{n},$$

$$P(X_iX_j=0)=1-\frac{1}{n(n-1)},\quad P(X_iX_j=1)=\frac{1}{n(n-1)},\ i\ne j.$$

所以

$$E(X_i)=\frac{1}{n},\quad E(X_iX_j)=\frac{1}{n(n-1)},\quad i,j=1,2,\cdots,n,\quad i\ne j.$$

因此

$$E(X)=E(X_1+X_2+\cdots+X_n)$$

$$=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)=n\times\frac{1}{n}=1,$$

$$E(X^2)=E(X_1+X_2+\cdots+X_n)^2=E(\sum_{i=1}^{n}X_i^2+2\sum_{1\le i<j\le n}X_iX_j)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)+2\sum_{1\le i<j\le n}E(X_iX_j)=n\times\frac{1}{n}+2\times C_n^2\times\frac{1}{n(n-1)}=2.$$

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=1.$$

4.11 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}1-|1-x| & 0<x<2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，求 $E(X),D(X)$.

解 所给概率密度可化为:

$$f(x)=\begin{cases}x & 0<x<1\\ 2-x & 1\le x<2\\ 0 & \text{其他}\end{cases},$$

故有

$$E(X)=\int_0^1 xxdx+\int_1^2 x(2-x)dx=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2(2x-x^2)dx=1$$

$$E(X^2)=\int_0^1 x^2xdx+\int_1^2 x^2(2-x)dx=\int_0^1 x^3dx+\int_1^2(2x^2-x^3)dx=\frac{7}{6}$$

$$D(X)=\frac{7}{6}-1^2=\frac{1}{6}$$

4.12 设随机变量 X 的密度函数是 $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{8}x^2 & 0<x<2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，求: $E(X),E(X^2),E(\frac{1}{X^2})$，$D(X)$.

解 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^2 x\frac{3}{8}x^2dx=\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}x^4\Big|_0^2=\frac{3}{2}$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_0^2 x^2\frac{3}{8}x^2dx=\frac{3}{8}\times\frac{1}{5}x^5\Big|_0^2=\frac{12}{5}$$

$$E(\frac{1}{X^2})=\int_0^2\frac{1}{x^2}\cdot\frac{3}{8}x^2dx=\frac{3}{8}x\Big|_0^2=\frac{3}{4}$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{12}{5}-\frac{9}{4}=\frac{3}{20}$$

4.13 设 X 为随机变量，若已知 $E(X)=2$，$D\left(\frac{X}{2}\right)=1$,求 $E(X-2)^2$.

解 由 $D\left(\frac{X}{2}\right)=\frac{1}{4}D(X)=1$ 知： $D(X)=4=E(X^2)-E^2(X)$，故 $E(X^2)=8$，

所以有： $E(X-2)^2=E(X^2-4X+4)=E(X^2)-4E(X)+4=4$.

4.14 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}ax, & 0<x<2\\ cx+b, & 2\le x\le 4,\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$$

已知 $E(X)=2$, $P\{1<X<3\}=\dfrac{3}{4}$.求：(1) a,b,c ；(2)求 $Y=e^X$ 的期望和方差.

解 (1)由归一性得

$$\int_0^4 f(x)dx=\int_0^2 axdx+\int_2^4 cx+bdx=2a+6c+2b=1 \qquad (1)$$

由 $E(X)=2$ 得

$$E(X)=\int_0^4 xf(x)dx=\int_0^2 ax^2dx+\int_2^4 cx^2+bxdx=\frac{8}{3}a+\frac{56}{3}c+6b=2 \qquad (2)$$

由 $P\{1<X<3\}=\dfrac{3}{4}$ 得

$$P\{1<X<3\}=\int_1^2 axdx+\int_2^3 cx+bdx=\frac{3}{2}a+\frac{5}{2}c+b=\frac{3}{4} \qquad (3)$$

由(1)，(2)，(3)得 $a=\dfrac{1}{4},b=1,c=-\dfrac{1}{4}$

(2) $$E(Y)=\int_0^4 e^x f(x)dx=\int_0^2 \frac{1}{4}xe^xdx+\int_2^4 -\frac{1}{4}xe^x+e^xdx=\frac{1}{4}(e^2-1)^2$$

$$E(Y^2)=\int_0^4 e^{2x} f(x)dx=\int_0^2 \frac{1}{4}xe^{2x}dx+\int_2^4 -\frac{1}{4}xe^{2x}+e^{2x}dx=\frac{1}{16}(e^2-1)^4$$

从而 $D(Y)=E(Y^2)-\left[E(Y)\right]^2=\dfrac{1}{4}e^2(e^2-1)^2$.

4.15 设随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}12y^2, & 0\le y\le x\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$ ，求 $E(X)$ ，$E(Y)$ ， $E(XY)$ ， $E(X^2+Y^2)$ ， $D(X),D(Y)$.

解 由题设可知

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^x 12y^2dy=4x^3, & 0\le x\le 1\\ 0\ , & 其他\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_y^1 12y^2dx=12y^2(1-y), & 0\le y\le 1\\ 0\ , & 其他\end{cases}$$

故

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy\right]dx=\int_0^1 x\left[\int_0^x 12y^2dy\right]dx=\frac{4}{5}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} y\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy\right]dx=\int_0^1 y\left[\int_y^1 12y^2dy\right]dx=\frac{3}{5}$$

0 1 x

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy=12\int_0^1\int_y^1 xy^3dxdy=6\int_0^1 y^3(1-y^2)dy=\frac{1}{2}$$

$$E\left(X^2+Y^2\right)=E\left(X^2\right)+E\left(Y^2\right)=\int_0^1 x^2\cdot 4x^3dx+\int_0^1 y^2\cdot 12y^2\left(1-y\right)dy=\frac{16}{15}$$

$$D\left(X\right)=E\left(X^2\right)-\left(E\left(X\right)\right)^2=\frac{4}{6}-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{2}{75}$$

$$D\left(Y\right)=E\left(Y^2\right)-\left(E\left(Y\right)\right)^2=\frac{6}{15}-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{1}{75}$$

4.16 设随机变量 X,Y 的概率密度分别为 $f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，$f_Y(y)=\begin{cases}4e^{-4y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$，求：(1) $E(X+Y)$，$E(2X-3Y^2)$；(2)若 X,Y 相互独立，求 $E(XY)$，$D(X+Y)$.

解 (1)

$$E(X)=\int_0^{+\infty}2xe^{-2x}dx=\frac{1}{2}，\quad E(Y)=\int_0^{+\infty}4ye^{-4y}dy=\frac{1}{4}，\quad E(X+Y)=E(X)+E(Y)=\frac{3}{4}$$

$$E(3Y^2)=\int_0^{+\infty}3y^2\cdot 4e^{-4y}dx=\frac{3}{8}，\quad E(2X-3Y^2)=2E(X)-3E(Y^2)=\frac{5}{8}$$

(2) $E(XY)=E(X)E(Y)=\frac{1}{8}$，又因为 $X\sim E(2)$，$Y\sim E(4)$，X,Y 相互独立，所以 $D(X)=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$，$D(Y)=\frac{1}{4^2}=\frac{1}{16}$，$D(X+Y)=D(X)+D(Y)=\frac{5}{16}$.

4.17 设随机变量 X,Y 相互独立，且 $E(X)=E(Y)=1, D(X)=2, D(Y)=3$，求 $D(XY)$.

解 因为随机变量 X,Y 相互独立，故

$$E(X^2)=[E(X)]^2+D(X)=1+2=3，$$
$$E(Y^2)=[E(Y)]^2+D(Y)=1+3=4，$$

故有

$$D(XY)=E(X^2Y^2)-\left[E(XY)\right]^2=E(X^2)E(Y^2)-\left[E(X)E(Y)\right]^2=3\times 4-1=11$$

4.18 (1) 设随机变量 X_1,X_2,X_3,X_4 相互独立,且有 $E(X_i)=i$，$D(X_i)=5-i$，$i=1,2,3,4$，$Y=2X_1-X_2+3X_3-0.5X_4$，求 $E(Y),D(Y)$；

(2)设随机变量 X,Y 相互独立，且 $X\sim N(720,30^2)$，$Y\sim N(640,25^2)$，求：$Z_1=2X+Y$，$Z_2=X-Y$ 的分布，及概率 $P\{X>Y\}$，$P\{X+Y>1400\}$.

解 **(1)**
$$\begin{aligned}E(Y)&=E(2X_1-X_2+3X_3-0.5X_4)=2E(X_1)-E(X_2)+3E(X_3)-0.5E(X_4)\\&=2\times1-2+3\times3-0.5\times4=9-2=7\\D(Y)&=D(2X_1-X_2+3X_3-0.5X_4)=4D(X_1)+D(X_2)+9D(X_3)+0.25D(X_4)\\&=4\times4+3+9\times2+0.25\times1=16+3+18+0.25=37.25\end{aligned}$$

因为 X,Y 相互独立,所以 $Z_1=2X+Y$ 服从正态分布,即 $Z_1\sim N(2080,65^2)$.

因为

$$E(Z_1)=2E(X)+E(Y)=2\times720+640=2080$$
$$D(Z_1)=4D(X)+D(Y)=4\times30^2+25^2=65^2；$$

$Z_2=X-Y$ 服从正态分布,即 $Z_2\sim N(80,1525)$.因为

$$E(Z_2)=E(X)-E(Y)=720-640=80$$
$$D(Z_2)=D(X)+D(Y)=30^2+25^2=1525；$$
$$\begin{aligned}P\{X>Y\}&=P\{X-Y>0\}=1-P\{X-Y\le0\}=1-P\{Z_2\le0\}\\&=1-P\left\{\frac{Z_2-80}{\sqrt{1525}}\le\frac{0-80}{\sqrt{1525}}\right\}=\Phi(2.05)=0.9798\end{aligned}$$

$Z_3=X+Y$ 服从正态分布,即 $Z_3\sim N(1360,1525)$.因为

$$E(Z_3)=E(X)+E(Y)=720+640=1360$$
$$D(Z_3)=D(X)+D(Y)=30^2+25^2=1525；$$

$$P\{X+Y>1400\}=1-P\{X+Y\le 1400\}=1-P\{Z_3\le 1400\}$$
$$=1-P\left\{\frac{Z_3-1360}{\sqrt{1525}}\le\frac{1400-1360}{\sqrt{1525}}\right\}$$
$$=1-\Phi(1.02)=1-0.8461=0.1539$$

4.19 设随机变量(X,Y)的联合分布律为

X \ Y	0	1
0	0.3	0.2
1	0.4	0.1

求$E(X)$、$E(Y)$、$E(X-2Y)$、$E(3XY)$、$D(X)$、$D(Y)$、$Cov(X,Y)$、$\rho_{X,Y}$.

解 关于X与Y的边缘分布律分别为：

X	0	1
$p_{i.}$	0.5	0.5

Y	0	1
$p_{.j}$	0.7	0.3

$E(X)=0\times0.5+1\times0.5=0.5$，$E(X^2)=0^2\times0.5+1^2\times0.5=0.5$，$D(X)=0.5-(0.5)^2=0.25$，

$E(Y)=0\times0.7+1\times0.3=0.3$，$E(Y^2)=0^2\times0.7+1^2\times0.3=0.3$，$D(Y)=0.3-(0.3)^2=0.21$，

$E(X-2Y)=E(X)-2E(Y)=0.5-2\times0.3=-0.1$，

$E(3XY)=3E(XY)=3(0\times0\times0.3+0\times1\times0.2+1\times0\times0.4+1\times1\times0.1)=3\times0.1=0.3$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=0.1-0.5\times0.3=-0.05$$

$$\rho_{X,Y}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{-0.05}{\sqrt{0.25}\sqrt{0.21}}=-\frac{\sqrt{21}}{21}.$$

4.20 设随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x,0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求$E(X)$，$E(Y)$，$D(X)$，$D(Y)$，$E(XY)$，$\mathrm{Cov}(X,Y)$，ρ_{XY}.

解 $$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_{-x}^{x}xdy=\frac{2}{3}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_{-x}^{x}ydy=0$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_{-x}^{x}x^2dy=\frac{1}{2}$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2f(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_{-x}^{x}y^2dy=\frac{1}{6}$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_{-x}^{x}xydy=0$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{18}$$

$$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{1}{6}$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$$

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=0$$

4.21 设 $D(X)=25, D(Y)=36, \rho_{X,Y}=0.4$，求(1) $D(X+Y)$；(2) $D(X-Y+4)$.

解 (1) $D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\rho_{X,Y}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}$

$$=25+36+2\times 0.4\times\sqrt{25}\cdot\sqrt{36}=85$$

(2) $D(X-Y+4)=D(X)+D(Y)-2\rho_{X,Y}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}$

$$=25+36-2\times 0.4\times\sqrt{25}\cdot\sqrt{36}=37$$

4.22 设随机变量 X,Y 相互独立，$X \sim N(1,1)$，$Y \sim N(-2,2)$，求 $E(2X+Y)$，$D(5X-3Y)$.

解 $E(X)=1$，$D(X)=1$，$E(Y)=-2$，$D(Y)=1$，

$E(2X+Y)=2E(X)+E(Y)=0$，

$D(5X-3Y)=5^2D(X)+3^2D(Y)=25+18=43$

4.23 设随机变量 (X,Y) 的分布律为 $P\{X=1,Y=10\}=P\{X=2,Y=5\}=0.5$，试求 ρ_{XY}.

解 由题设可知随机变量 (X,Y) 的联合分布为

$X \backslash Y$	5	10	$p_{i.}$
1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$p_{.j}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	**1**

故有

$$E(X)=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}, E(X^2)=1\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2}, \therefore D(X)=\frac{1}{4}$$

$$E(Y)=5\times\frac{1}{2}+10\times\frac{1}{2}=\frac{15}{2}, E(Y^2)=5^2\times\frac{1}{2}+10^2\times\frac{1}{2}=\frac{125}{2}, \therefore D(X)=\frac{25}{4}$$

$$E(XY)=2\times 5\times\frac{1}{2}+1\times 10\times\frac{1}{2}=10$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=10-\frac{45}{4}=-\frac{5}{4}\text{，}\quad \rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=-1$$

4.24 设随机变量 X,Y,Z 满足 $E(X)=E(Y)=1, E(Z)=-1$，$D(X)=D(Y)=D(Z)=1$，$\rho_{XY}=0, \rho_{XZ}=-\rho_{YZ}=\frac{1}{2}$.试求：$E(X+Y+Z),\ D(X+Y+Z).$

解 $E(X+Y+Z)=E(X)+E(Y)+E(Z)=1+1-1=1$

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=E(X^2)-1=1\Rightarrow E(X^2)=2$

同理 $E(Y^2)=2$ $E(Z^2)=2$，

又因为 $\rho_{XY}=0$，故 $E(XY)=E(X)E(Y)=1$

$$\rho_{XZ}=\frac{1}{2}\Rightarrow=\frac{E(XZ)-E(X)E(Z)}{\sqrt{D(X)}D(Y)}=\frac{1}{2}\Rightarrow E(XZ)=-\frac{1}{2}$$

$$\rho_{YZ}=\frac{1}{2}\Rightarrow=\frac{E(YZ)-E(Y)E(Z)}{\sqrt{D(Y)D(Z)}}=-\frac{1}{2}\Rightarrow E(YZ)=-\frac{3}{2}$$

故 $$D(X+Y+Z)=E(X+Y+Z)^2-(E(X+Y+Z))^2$$
$$=E(X^2)+E(Y^2)+E(Z^2)+2E(XY)+2E(XZ)+2E(YZ)-1$$
$$=2+2+2+2-1-3-1=3$$

4.25 设随机向量 (X,Y) 的分布律为

X \ Y	-1	0	1
-1	1/8	1/8	1/8
0	1/8	0	1/8
1	1/8	1/8	1/8

验证 X 和 Y 是不相关的，但 X 和 Y 不是相互独立的.

证 X 的分布律为

X	-1	0	1
p_k	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$

Y 的分布律为

Y	-1	0	1
p_k	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$

X,Y 的分布律为

XY	-1	0	1
p_k	$\frac{2}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{2}{8}$

所以

$$E(X)=-1\times\frac{3}{8}+1\times\frac{3}{8}=0, \quad E(Y)=-1\times\frac{3}{8}+1\times\frac{3}{8}=0$$

$$E(XY)=1\times\frac{2}{8}-1\times\frac{2}{8}=0$$

故

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{E\left[(X-E(X))(Y-E(Y))\right]}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$
$$=\frac{E(XY)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=0 \quad ,$$

即 X 和 Y 是不相关的. 又有 $p_{ij}\neq p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j}$，即 X 和 Y 不是相互独立的.

4.26 设随机变量 $(X,\ Y)$ 服从单位圆上的均匀分布，验证：X 和 Y 不相关，并且 X 和 Y 也不独立.

证 $x^2+y^2\le 1\Rightarrow -\sqrt{1-y^2}\le x\le\sqrt{1-y^2}$， 故

$$f(y)=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\pi}dx=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, & -1\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

同理 $$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & -1\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

显然 $f(x,y)\neq f(x)f(y)$，故 X 和 Y 不相互独立.

$$E(X)=\int_{-1}^{1}\frac{2x}{\pi}\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,d\left(x^2\right)=-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,d\left(1-x^2\right)=0$$

同理 $E(Y)=0$，$E(XY)=\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}xy\frac{1}{\pi}dydx=0$.

于是

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{E\left[\left(X-E(X)\right)\left(Y-E(Y)\right)\right]}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{E(XY)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=0$$

即 X 和 Y 是不相关的.

4.27 对于两个随机变量 U，V，若 $E(U^2)$，$E(V^2)$ 存在，证明 $[E(UV)]^2\le E(V^2)E(U^2)$. 这一不等式称为柯西-施瓦茨不等式.

证 由于对于人给的实数 t

$$E[(tV+U)^2]=t^2E(V^2)+2tE(UV)+E(U^2)\ge 0,$$

所以

$$4E^2(UV)-4E(V^2)E(U^2)\le 0,$$

即

$$[E(UV)]^2\le E(V^2)E(U^2)$$

4.28 设随机向量 $(X,\ Y)$ 的协方差矩阵为 $\begin{bmatrix}4 & -2\\ -2 & 9\end{bmatrix}$,求: $D(2X-3Y+5)$, ρ_{XY}.

解 由协方差矩阵的定义知: $D(X)=4$, $D(Y)=9$, $\mathrm{cov}(X,Y)=-2$,故

$$D(2X-3Y+5)=4D(X)+9D(Y)-12\,\mathrm{cov}(X,Y)=121,$$

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=\frac{-2}{2\times 3}=-\frac{1}{3}$$

4.29 设二维正态随机变量 (X_1,X_2) 的均值为 $E(X_1)=0,\ E(X_2)=1$, 协方差矩阵为 $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}1 & 0.5\\ 0.5 & 1\end{pmatrix}$，试计算：(1)$D(2X_1-X_2)$，(2)$E({X_1}^2-X_1X_2+{X_2}^2)$.

解 $D(X_1)=D(X_2)=1\qquad Cov(X_1,X_2)=0.5$

(1) $D(2X_1-X_2)=D(2X_1)+D(X_2)-2Cov(2X_1,X_2)$

$$=4D(X_1)+D(X_2)-4Cov(X_1,X_2)=3$$

(2) $E({X_1}^2)=D(X_1)+(E(X_1))^2=1$, $E({X_2}^2)=D(X_2)+(E(X_2))^2=2$，所以

$$E({X_1}^2-X_1X_2+{X_2}^2)=1-0.5+2=2.5$$

4.30 (1)设 $W=(aX+3Y)^2$，$E(X)=E(Y)=0, D(X)=4, D(Y)=16, \rho_{XY}=-0.5$.求常数 a 使 $E(W)$ 为最小，并求 $E(W)$ 的最小值；

(2)设 $(X,\ Y)$ 服从二维正态分布，且有 $D(X)=\sigma_X^2, D(Y)=\sigma_Y^2$.证明当 $a^2=\dfrac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}$ 时随机变量 $W=X-aY$ 与 $V=X+aY$ 相互独立.

解 (1) $E(W)=a^2E(X^2)+9E(Y^2)+6aE(XY)=4a^2-24a+144$

令 $\dfrac{dE(W)}{da}=0$ 得 $a=3$，且 $\dfrac{d^2E(W)}{da^2}\Big|_{a=3}>0$，从而 $a=3$ 时 $E(W)$ 为最小，最小为 108.

(2)由于 $(X,\ Y)$ 服从二维正态分布，从而 $W=X-aY$ 与 $V=X+aY$ 均服从一维正态分布，故 $(W,\ V)$ 服从二维正态分布，即 W 与 V 独立的充要条件是 W 与 V 不相关.而 W 与 V 不相关的充要条件是 $E(W)E(V)=E(WV)$ 即

$E^2(X)-a^2E^2(Y)=EX^2-a^2EY^2=\sigma_X^2+E^2(X)-a^2\sigma_Y^2-a^2E^2(Y)$，从而 $a^2=\dfrac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}$.

4.31 设二维随机变量 (X, Y) 的密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2}[\varphi_1(x,y)+\varphi_2(x,y)],$$

其中 $\varphi_1(x,y)$ 和 $\varphi_2(x,y)$ 都是二维正态分布的概率密度函数，且它们对应的二维随机变量的相关系数分别是 $\mathbf{\frac{1}{3}}$ 和 $-\mathbf{\frac{1}{3}}$，它们的边缘密度函数所对应的随机变量的数学期望是 0，方差都是 1，求 (1)随机变量 X 和 Y 的密度函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(y)$ 及 X 和 Y 的相关系数 ρ_{XY}； (2)问 X 和 Y 是否相互独立？为什么？

解 二维正态分布密度的两个边缘密度都是正态分布密度，因此 $\varphi_1(x,y)$ 和 $\varphi_2(x,y)$ 的边缘密度都是标准正态分布密度函数.故

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\frac{1}{2}[\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1(x,y)dy+\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_2(x,y)dy]$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f_2(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\frac{1}{2}[\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1(x,y)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_2(x,y)dx]$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$$

由 $E(X)=E(Y)=0, D(X)=D(Y)=1$，且 $\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$，从而 $\rho_{XY}=E(XY)$

又 $E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\dfrac{1}{2}[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\varphi_1(x,y)dxdy+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\varphi_2(x,y)dxdy]$

从而 $\rho_{XY}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{3}+(-\dfrac{1}{3})\right]=0$

(2)由题设 $f(x,y)=\dfrac{3}{8\pi\sqrt{2}}[e^{-\frac{9}{16}(x^2-\frac{2}{3}xy+y^2)}+e^{-\frac{9}{16}(x^2+\frac{2}{3}xy+y^2)}]$, $f_1(x)f_2(y)=\dfrac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$

显然 $f(x,y)\neq f_1(x)f_2(y)$，因此随机变量 X 和 Y 不独立.

4.32 (验血分组问题) 在一个人数很多的团体中普查某种疾病，为此需要对团体中团体成员逐个验血，一般来说，若血样呈阳性，则有此种疾病；呈阴性则无此种疾病. 逐个验血工作量也很大. 为了减少验血的工作量，有位统计学家提出一种方案：把团体中的成员进行分组，再把组内所有人员的血样混合后再检验，若呈阴性，则该组内所有人员都无此疾病，这时只需作一次检验；若呈阳性，这时为搞清楚谁患有此种疾病，则对组内每个人员分别检验，共需检验 $k+1$ 次. 若该团体中患此病症的概率为 p，且各人得此种疾病相互独立，那么此种方法能否减少验血次数？若能减少，那么减少多少工作量？

解 假设团体中共有 N 个人，令 X 表示该团体中每人需要验血的次数，那么 X 是只取 2 个值的随机变量，其分布为

$$P(X=\frac{1}{k})=(1-p)^k,\quad P(X=1+\frac{1}{k})=1-(1-p)^k$$

则每人平均化验次数

$$E(X)=\frac{1}{k}(1-p)^k+(1+\frac{1}{k})[1-(1-p)^k]=1+\frac{1}{k}-(1-p)^k$$

而新的验血方法比逐个验血方法平均减少的验血次数

$$1-E(X)=(1-p)^k-\frac{1}{k}$$

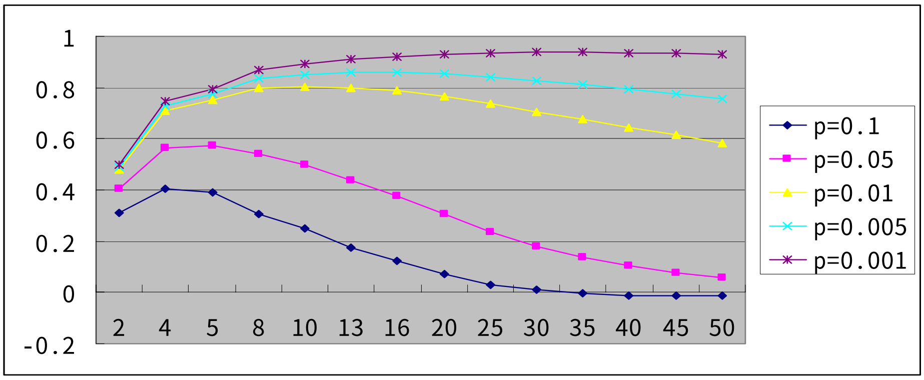
只要 $E(X)<1$，即 $(1-p)^k>\frac{1}{k}$，就能减少验血工作量.

如取 $p=0.1$，$k=2$，那么 $1-E(X)=0.9^2-\frac{1}{2}=0.31$(次))，如果该团体有 10000 人，则可减少 3100 次，即可减少 31%的工作量.

类似地，可以进行如下计算：当 $p=0.1$，$k=4$ 时，使得 $E(X)$ 的值最小，这时可以减少 40.61%的工作量，然后又逐渐增加，当 $k=34$ 时，$E(X)>1$，这种方法反而增加工作量。还可以计算，当 $p=0.01$，$k=11$ 时，$E(X)$ 的值最小，这时可以减少 80.44%的工作量；还可以计算，当 $p=0.001$，$k=28$ 时，$E(X)$ 的值最小，这时可以减少 93.67%的工作量。可见，患某种疾病的概率 p 越小，使 $E(X)$ 取到最小值

k 值越大，减少验血的工作量的期望值 $1-E(X)=(1-p)^k-\frac{1}{k}$ 就越大。对于 p,k 不同值的 $E(X)$ 数值计算列表如下，并且根据这些数据描述的曲线如图。

k	$p=0.1$	$p=0.05$	$p=0.01$	$p=0.005$	$p=0.001$
2	0.3100	0.4025	0.4801	0.4900	0.4980
4	0.4061	0.5645	0.7106	0.7301	0.7460
5	0.3905	0.5738	0.7510	0.7752	0.7950
8	0.3055	0.5384	0.7977	0.8357	0.8670
10	0.2487	0.4987	0.8044	0.8511	0.8900
13	0.1773	0.4364	0.8006	0.8600	0.9102
16	0.1228	0.3776	0.7890	0.8604	0.9216
20	0.0716	0.3085	0.7679	0.8546	0.9302
25	0.0318	0.2374	0.7378	0.8422	0.9353
30	0.0091	0.1813	0.7064	0.8271	0.9371
35	-0.0035	0.1375	0.6749	0.8105	0.9370
40	-0.0102	0.1035	0.6440	0.7933	0.9358
45	-0.0135	0.0772	0.6140	0.7758	0.9338
50	-0.0148	0.0569	0.5850	0.7583	0.9312



第 5 章　大数定律和中心极限定理

5.1 设随机变量 X 的分布律为：

X	1	2	3
p	0.3	0.5	0.2

试求概率 $P\{|X-E(X)|\geq 1\}$，并用切比雪夫不等式估计概率 $P\{|X-E(X)|\geq 1\}$.

解　由 X 的分布律可得

$$E(X)=1\times 0.3+2\times 0.5+3\times 0.2=1.9,$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=4.1-1.9^2=0.49,$$

所以

$$P\{|X-E(X)|\geq 1\}=P\{|X-1.9|\geq 1\}=P\{X=3\}=0.2.$$

由切比雪夫不等式得

$$P\{|X-E(X)|\geq 1\}\leq \frac{0.49}{1^2}=0.49.$$

5.2 独立地掷 100 颗骰子，求掷出的点数之和在 300 到 400 之间的概率.

解　用 X_i 表示第 i 颗骰子掷出的点数 $(i=1,2,\cdots,100)$，则

$$P\{X_i=j\}=\frac{1}{6}\quad (j=1,2,3,4,5,6),$$

$$E(X_i)=\mu=\frac{7}{2},\quad D(X_i)=\sigma^2=\frac{35}{12}\quad (i=1,2,\cdots,100),$$

所以

$$\sum_{i=1}^{100}X_i \overset{\text{近似地}}{\sim} N(350,\frac{875}{3}),$$

$$P\{300\leq\sum_{i=1}^{100}X_i\leq 400\}=P\{\frac{300-350}{\sqrt{\frac{875}{3}}}\leq\frac{\sum_{i=1}^{100}X_i-350}{\sqrt{\frac{875}{3}}}\leq\frac{400-350}{\sqrt{\frac{875}{3}}}\}$$

$$\approx\Phi(2.93)-\Phi(-2.93)=2\Phi(2.93)-1=0.99662.$$

所以掷出的点数之和在 300 到 400 之间的概率为 0.99662.

5.3 根据以往的经验，某电器元器件的寿命服从均值为 100 小时的指数分布，现随机的抽取 16 个，设它们的寿命是相互独立的，求这 16 个元件寿命总和大于 1920 小时的概率.

解　设第 i 个元件的寿命为 X_i $(i=1,2,\cdots,16)$，则 $X_1,X_2,\cdots,X_{16}$ 相互独立且都服从参数 $\lambda=\frac{1}{100}$ 的指数分布，且

$$E(X_i)=\mu=100,\quad D(X_i)=\sigma^2=100^2\ (i=1,2,\cdots,16),$$

所以

$$\sum_{i=1}^{16}X_i \overset{\text{近似地}}{\sim} N(1600,400^2)$$

$$P\{\sum_{i=1}^{16}X_i>1920\}=P\{\frac{\sum_{i=1}^{16}X_i-1600}{400}>0.8\}\approx 1-\Phi(0.8)=0.21186.$$

故这 16 个元件寿命总和大于 1920 小时的概率为 0.21186.

5.4　用机器包装味精，每袋净重为随机变量，期望值为 100 克，标准差为 10 克，一箱内装 200 袋味精，求一箱味精净重大于 20500 克的概率.

解　设箱中第 i 袋味精的净重为 X_i ($i=1,2,\cdots,200$)克，一箱味精净重为 X 克，则 $X_1,X_2,\cdots,X_{200}$ 相互独立，且 $X=\sum_{i=1}^{200}X_i$，依题

$$E(X_i)=100,\quad D(X_i)=100,$$

所以

$$E(X)=20000,\ D(X)=20000,$$

于是

$$X=\sum_{i=1}^{200}X_i \overset{\text{近似地}}{\sim} N(20000,20000)$$

因而有

$$\begin{aligned}P(\{X>20500\}&=1-P(\{X<20500\}\\&=1-P\{\frac{X-20000}{\sqrt{20000}}<\frac{20500-20000}{\sqrt{20000}}\}\\&\approx 1-\Phi(3.54)=0.0002.\end{aligned}$$

所以一箱味精净重大于 20500 克的概率为 0.0002.

5.5　计算机在进行加法时，对每个加数取整(取为最接近它的整数)，设所有的取整误差是相互独立的，且它们都在(－0.5，0.5)上服从均匀分布，

(1)若将 1500 个数相加，问误差总和的绝对值超过 15 的概率是多少？

(2)几个数相加在一起使得误差总和的绝对值小于 10 的概率不小于 0.90？

解　(1)设第 i 个数的取整误差为 X_i，误差总和为 X，则 $X=\sum_{i=1}^{1500}X_i$，

由于 $X_i\sim U(-0.5,0.5)$ ($i=1,2,\cdots,1500$)，所以

$$E(X_i)=p=\frac{-0.5+0.5}{2}=0,\ D(X_i)=\frac{[0.5-(-0.5)]^2}{12}=\frac{1}{12},$$

$$E(X)=0,\quad D(X)=1500\times\frac{1}{12}=125.$$

从而

$$X=\sum_{i=1}^{1500}X_i \overset{\text{近似}}{\sim} N(0,125),$$

于是

$$\begin{aligned}P\{|\sum_{i=0}^{1500}X_i|>15\}&=P\{\sum_{i=0}^{1500}X_i>15\}+P\{\sum_{i=0}^{1500}X_i<-15\}\\&=1-P\{\frac{\sum_{i=1}^{1500}X_i}{\sqrt{125}}\le\frac{15}{\sqrt{125}}\}+P\{\frac{\sum_{i=1}^{1500}X_i}{\sqrt{125}}<-\frac{15}{\sqrt{125}}\}\\&\approx 1-\Phi(1.34)+\Phi(-1.34)\\&=2[1-\Phi(1.34)]=2\times[1-0.90988]=0.18024.\end{aligned}$$

所以将 1500 个数相加，误差总和的绝对值超过 15 的概率是 0.18024.

(2)将 n 个数相加在一起，设第 i 个数的取整误差为 X_i，误差总和为 X，则 $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$，

由于 $X_i \sim U(-0.5,0.5)$ ($i=1,2,\cdots,n$)，所以

$$E(X_i)=p=\frac{-0.5+0.5}{2}=0,\quad D(X_i)=\frac{[0.5-(-0.5)]^2}{12}=\frac{1}{12},$$

$$E(X)=0,\quad D(X)=n\times\frac{1}{12}=\frac{1}{12}n,$$

从而

$$X=\sum_{i=1}^{n}X_i \overset{\text{近似}}{\sim} N(0,\frac{1}{12}n),$$

$$P\{|\sum_{i=0}^{n}X_i|<10\}=P\{\frac{-10}{\sqrt{\frac{1}{12}n}}<\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{\sqrt{\frac{1}{12}n}}<\frac{10}{\sqrt{\frac{1}{12}n}}\}=2\Phi(\frac{10\sqrt{12}}{\sqrt{n}})-1$$

要使误差总和的绝对值小于 10 的概率不小于 0.90，必须 $2\Phi(\frac{10\sqrt{12}}{\sqrt{n}})-1\geq 0.9$，即 $\Phi(\frac{10\sqrt{12}}{\sqrt{n}})\geq 0.95=\Phi(1.645)$，可得 $\frac{10\sqrt{12}}{\sqrt{n}}\geq 1.645$，解得 $n\leq 443.45$．所以最多 443 个数相加在一起可使得误差总和的绝对值小于 10 的概率不小于 0.90.

5.6 一生产线生产的产品成箱包装，每箱的重量是随机的，假设每箱平均重量 50kg，标准差为 5kg.若用最大载重量为 5 吨的汽车承运，试问每车最多可装多少箱，才能保障不超载的概率大于 0.977.

解 设 $X_i(i=1,2,...,n)$ 为第 i 箱产品的重量，n 是所求的装箱数．依题可把 $X_1,X_2,...,X_n$ 看作独立同分布的随机变量，

令 $Y_n=X_1+X_2+\cdots+X_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$，则 Y_n 就是这 n 箱货物的总重量．由已知 $E(X_i)=50$, $D(X_i)=25$,所以

$$E(Y_n)=50n, D(Y_n)=25n, Y_n=\sum_{i=1}^{n}X_i \overset{\text{近似地}}{\sim} N(50n,25n),$$

故

$$P\{Y_n\leq 5000\}=P\{\frac{Y_n-50n}{5\sqrt{n}}\leq\frac{5000-50n}{5\sqrt{n}}\}=\Phi(\frac{5000-50n}{5\sqrt{n}})>0.977\approx\Phi(2),$$

从而有 $\frac{1000-10n}{\sqrt{n}}>2$,可得 $n\leq(\frac{-1+\sqrt{10001}}{10})^2\approx 98$．所以每车最多可以装 98 箱，才能保障不超载的概率大于 0.977.

5.7 某疾病的患病率为 0.005，现对 10000 人进行检查，试求查出患病人数在[45,55]内的概率.

解 设患病人数为 X，则 $X\sim b(10000,0.005)$，$np=50$，$np(1-p)=49.75$，于是

$$X\sim b(10000,0.005) \overset{\text{近似地}}{\sim} N(50,49.75),$$

所以

$$P\{45\leq X\leq 55\}=P\{\frac{45-50}{\sqrt{49.75}}\leq\frac{X-50}{\sqrt{49.75}}\leq\frac{55-50}{\sqrt{49.75}}\}\approx\Phi(0.71)-\Phi(-0.71)$$
$$=2\Phi(0.71)-1\approx 2\times 0.76115-1=0.5223.$$

所以查出患病人数在[45,55]内的概率为 0.5223.

5.8 某公司生产的电子元件合格率为 99.5% ．装箱出售时，

(1)若每箱中装 1000 只，问不合格品在 2 到 6 只之间的概率是多少？

(2)若要以 99%的概率保证每箱合格品数不少于 1000 只，问每箱至少应该多装几只这种电子元件？

解(1)这个公司生产的电子元件不合格率为 1-0.995=0.005，设 X 表示 1000 只电子元件中不合格品的数量，则 $X \sim b(1000, 0.005)$，$np = 5$，$np(1-p) = 4.975$，于是

$$X \sim b(1000, 0.005) \overset{\text{近似地}}{\sim} N(5, 4.975),$$

所以

$$P\{2 \le X \le 6\} = P\{\frac{2-5}{\sqrt{4.975}} \le \frac{X-5}{\sqrt{4.975}} \le \frac{6-5}{\sqrt{4.975}}\}$$

$$\approx \Phi(0.45) - \Phi(-1.35) \quad = 0.67364 - (1 - 0.91149) = 0.58513.$$

所以不合格品在 2 到 6 只之间的概率是 0.58513.

(2)设每箱中应多装 k 只电子元件，则不合格品数 $X \sim b(1000+k, 0.005)$，

$$np = (1000+k) \times 0.005, \quad np(1-p) = (1000+k) \times 0.005 \times 0.995,$$

于是

$$X \sim b(1000+k, 0.005) \overset{\text{近似地}}{\sim} N((1000+k) \times 0.005, (1000+k) \times 0.005 \times 0.995)$$

由题设，应有 $P(X \le k) \ge 0.99$，而

$$P\{X \le k\} = P\{\frac{X-(1000+k)\times 0.005}{\sqrt{(1000+k)\times 0.005 \times 0.995}} \le \frac{k-(1000+k)\times 0.005}{\sqrt{(1000+k)\times 0.005 \times 0.995}}\}$$

$$= \Phi(\frac{k-(1000+k)\times 0.005}{\sqrt{(1000+k)\times 0.005 \times 0.995}}),$$

所以

$$\Phi(\frac{k-(1000+k)\times 0.005}{\sqrt{(1000+k)\times 0.005 \times 0.995}}) \ge 0.99 = \Phi(2.33)$$

于是 k 应满足

$$\frac{k-(1000+k)\times 0.005}{\sqrt{(1000+k)\times 0.005 \times 0.995}} \ge 2.33,$$

解得 $k \ge 11$.所以每箱应多装 11 只电子元件，才能以 99%以上的概率保证合格品数不低于 1000 只.

5.9 某药厂断言，该厂生产的某种药品对于医治一种疑难的血液病的治愈率为 0.8，医院检验员任意抽查 100 个服用此药品的病人，如果其中多于 75 人治愈，就接受这一断言，否则就拒绝这一断言.

(1)若实际上此药品对这种疾病的治愈率是 0.8，问接受这一断言的概率是多少？

(2)若实际上此药品对这种疾病的治愈率是 0.7，问接受这一断言的概率是多少？

解 (1) $p = 0.8$，设 X 为 100 人中治愈的人数，则 $X \sim b(100, 0.8)$，$np = 80$，$np(1-p) = 16$，于是 $X \sim b(100, 0.8) \overset{\text{近似}}{\sim} N(80, 16)$，因此

$$P\{X > 75\} = 1 - P\{X \le 75\} \quad = 1 - P\{\frac{X-80}{4} \le \frac{75-80}{4}\}$$

$$\approx 1 - \Phi(-1.25) = \Phi(1.25) = 0.89435.$$

所以接受这一断言的概率是 0.89435.

(2) $p = 0.7$，$np = 70$，$np(1-p) = 21$，于是 $X \sim b(100, 0.7) \overset{\text{近似}}{\sim} N(70, 21)$，所以

$$P\{X > 75\} = 1 - P\{X \le 75\} \quad = 1 - P\{\frac{X-70}{\sqrt{21}} \le \frac{75-70}{\sqrt{21}}\}$$

$$\approx 1 - \Phi(1.09) = 1 - 0.86214 = 0.13786.$$

所以接受这一断言的概率是 0.13786.

5.10 对于一个学校而言，来参加家长会的家长人数是一个随机变量，设一个学生无家长，1 名家长，2 名家长来参加会议的概率分别 0.05，0.8，0.15．若学校共有 400 名学生，设各学生参加会议的家长数相互独立，且服从同一分布．求：

(1)参加会议的家长数 X 超过 450 的概率．

(2)只有一名家长来参加会议的学生人数不多于 340 的概率．

解 (1)以 $X_k(k=1,2,\cdots,400)$ 表示第 k 个学生来参加会议的家长人数，则可认为 $X_1,X_2,\cdots,X_{400}$ 相互独立且服从同一分布，X_k 的分布律为

X_k	0	1	2
p_k	0.05	0.8	0.15

.

可求得 $E(X_k)=1.1$，$D(X_k)=0.19$ ($k=1,2,\cdots,400$)，而

$$X=\sum_{k=1}^{400}X_k\ ,\ E(X)=400\times1.1=440\ ,\ D(X)=400\times0.19=76\ ,$$

于是 $X=\sum_{k=1}^{400}X_k\overset{\text{近似}}{\sim}N(440,76)$， 故

$$P\{X>450\}=P\{\frac{X-440}{\sqrt{76}}>\frac{450-440}{\sqrt{76}}\}=1-P\{\frac{X-440}{\sqrt{76}}\le1.15\}$$
$$\approx1-\Phi(1.15)=0.12507\ .$$

所以参加会议的家长数 X 超过 450 的概率为 0.12507.

(2) 用 Y 表示只有一名家长来参加会议的学生人数，则 $Y\sim b(400,0.8)$，$np=320$， $np(1-p)=64$，于是 $Y\sim b(400,0.8)\overset{\text{近似}}{\sim}N(320,64)$，于是

$$P\{Y\le340\}=P\{\frac{Y-320}{8}\le\frac{340-320}{8}\}\approx\Phi(2.5)=0.99379\ .$$

所以只有一名家长来参加会议的学生人数不多于 340 的概率为 0.99379.

5.11 某市保险公司开办一年人身保险业务，被保险人每年需交付保险费 160 元，若一年内发生重大人身事故，其本人或家属可获 2 万元赔金．已知该市人员一年内发生重大人身事故的概率为 0.005，现有 5000 人参加此项保险，问保险公司一年内从此项业务所得到的总收益在 20 万到 40 万元之间的概率是多少?

解 记 $X_i=\begin{cases}1, & \text{第}i\text{个被保人发生重大事故,}\\0, & \text{第}i\text{个被保人未发生重大事故}\end{cases}$ $(i=1,2,\cdots,5000)$，则 $X=\sum_{i=1}^{5000}X_i$ 是 5000 个被保险人中一年内发生重大事故的人数，保险公司一年内从此项业务所得到的总收益为 $0.016\times5000-2\times\sum_{i=1}^{5000}X_i$ 万元．依题 $X=\sum_{i=1}^{5000}X_i\sim b(5000,0.005)$，

$$p=0.005,\ n=5000\ ,\ \ np=25\ ,\ \ np(1-p)=24.875\ ,$$

于是 $X=\sum_{i=1}^{5000}X_i\sim b(5000,0.005)\overset{\text{近似}}{\sim}N(25,24.875)$.

从而 $$P\{20\le0.016\times5000-2\sum_{i=1}^{5000}X_i\le40\}=P\{20\le\sum_{i=1}^{5000}X_i\le30\}$$

$$=P\{\frac{20-25}{\sqrt{24.875}}\le\frac{\sum_{i=1}^{5000}X_i-25}{\sqrt{24.875}}\le\frac{30-25}{\sqrt{24.875}}\}\approx\Phi(1)-\Phi(-1)=0.68268\text{。}$$

因此保险公司一年内从此项业务所得到的总收益在 20 万到 40 万元之间的概率是 0.68268.

5.12 (1)一复杂的系统，由 100 个互相独立起作用的部件所组成．在整个系统运行期间，

每个部件损坏的概率为 0.10．为了整个系统起作用，必须至少有 85 个部件正常工作．求整个系统起作用的概率．

(2)若有一个复杂的系统，由 n 个互相独立起作用的部件组成，每个部件的可靠性(即部件工作的概率)为 0.90，且必须至少有 80%的部件工作才能使整个系统起作用，问 n 至少为多少才能使该系统起作用的概率不低于 0.95.

解 (1) 用 X 表示 100 个部件中正常工作的部件数，则 $X \sim b(100,0.9)$，$np=90$， $np(1-p)=9$，于是 $X \sim b(100,0.9) \overset{\text{近似}}{\sim} N(90,9)$，进而

$$P\{X \ge 85\}=1-P\{X<85\}=1-P\{\frac{X-90}{3}<\frac{85-90}{3}\}$$
$$\approx 1-\Phi(-1.67)=\Phi(1.67) \quad =0.95254.$$

所以整个系统起作用的概率为 0.95254.

(2) 用 X 表示 n 个部件中正常工作的部件数，则 $X \sim b(n,0.9)$，$np=0.9n$， $np(1-p)=0.09n$，于是 $X \sim b(n,0.9) \overset{\text{近似}}{\sim} N(0.9n,0.09n)$，依题要求

$$P\{X \ge 0.8n\} \ge 0.95.$$

而

$$P\{X \ge 0.8n\}=1-P\{X<0.8n\}=1-P\{\frac{X-0.9n}{\sqrt{0.09n}}<\frac{0.8n-0.9n}{\sqrt{0.09n}}\}$$
$$\approx 1-\Phi(-\frac{\sqrt{n}}{3})=\Phi(\frac{\sqrt{n}}{3}) \quad .$$

所以

$$\Phi(\frac{\sqrt{n}}{3}) \ge 0.95=\Phi(1.645)，\quad \frac{\sqrt{n}}{3} \ge 1.645，\quad n \ge 24.35$$

所以取 $n=25$，即 n 至少为 25 才能使系统可靠性不低于 0.95.

5.13 某单位内部有 260 部电话分机，每个分机有 4%的时间要与外线通话，可以认为每个电话分机是否使用外线是相互独立的，问总机需备多少条外线才能以 95%以上的把握满足每个分机在使用外线时不用等候?

解 令 X 表示 260 部电话分机中同时使用外线的电话数，k 表示外线数量，则 $X \sim b(260,0.04)$，$np=10.4$， $np(1-p)=9.984$，于是 $X \sim b(260,0.04) \overset{\text{近似}}{\sim} N(10.4,9.984)$，根据题意应确定最小的 k，使 $P\left\{X<k\right\} \ge 95\%$ 成立．而

$$P\{X<k\}=P\{\frac{X-10.4}{\sqrt{9,984}}<\frac{k-10.4}{\sqrt{9,984}}\} \approx \Phi(\frac{k-10.4}{\sqrt{9,984}}),$$

所以

$$\Phi(\frac{k-10.4}{\sqrt{9,984}}) \ge 95\%=\Phi(1.645),$$

于是有

$$\frac{k-10.4}{\sqrt{9,984}} \ge 1.645,$$

解得 $k>15.6$．也就是说，至少需要 16 条外线才能以 95%以上的把握满足每个分机在使用外线时不用等候.

第 6 章　数理统计的基本概念

6.1 设总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的容量为 n 的样本，求样本($X_1, X_2, \cdots, X_n$)的联合分布律。

解　因为总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布，其分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k=0,1,2,\cdots,$$

由于 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且都与 X 同分布，所以样本($X_1, X_2, \cdots, X_n$)的联合分布律为

$$P\{X_1=x_1, X_2=x_2, \cdots, X_n=x_n\}=\prod_{i=1}^{n} P\{X_i=x_i\}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{x_i}e^{-\lambda}}{x_i!}=\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!}e^{-n\lambda}.$$

6.2 设总体 X 在区间 $[a,b]$ 上服从均匀分布，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的容量为 n 的样本，求样本($X_1, X_2, \cdots, X_n$)的联合密度函数。

解 因为总体 X 在区间 $[a,b]$ 上服从均匀分布，所以 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases},$$

由于 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且都与 X 同分布，所以样本($X_1, X_2, \cdots, X_n$)的联合密度函数为

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)^n}, & a\le \min\limits_{1\le i\le n}\{x_i\}\le \max\limits_{1\le i\le n}\{x_i\}\le b,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

6.3　设总体 X 的分布密度函数为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}e^{-(x-\theta)}, & x\ge\theta,\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

其中 $\theta>0$ 是常数，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的容量为 n 的样本，求样本($X_1, X_2, \cdots, X_n$)的联合密度函数。

解 因为总体 X 的分布密度函数为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}e^{-(x-\theta)}, & x\ge\theta,\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且都与 X 同分布，所以样本($X_1, X_2, \cdots, X_n$)的联合密度函数为

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i)=\begin{cases}e^{-\sum_{i=1}^{n}x_i}e^{n\theta}, & \min\limits_{1\le i\le n}\{x_i\}\ge\theta,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

6.4 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，其中 μ 未知，σ^2 已知，问

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 和 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 哪个是统计量？其中 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$。

解 $g_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^{\ 2}-\frac{2}{n}\mu\sum_{i=1}^{n}X_i+\frac{1}{n}n\mu^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^{\ 2}-2\mu\overline{X}+\mu^2$，

$g_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 中含有总体中未知的参数 μ，故 $g_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 不是统计量。

$g_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^{\ 2}-\frac{2}{n}\overline{X}\sum_{i=1}^{n}X_i+(\overline{X})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^{\ 2}-(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)^2$，

$g_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 是样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的函数，其中不含总体分布中未知的参数，故 $g_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 是统计量。

6.5 设 X_1，$X_2,\cdots$，X_6 是来自 $(0,\theta)$ 上均匀分布的样本，$\theta>0$ 未知，

(1)写出样本的联合密度函数；

(2)指出下列样本函数中哪些是统计量，哪些不是？为什么？

$$T_1=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_6}{6},\qquad T_2=X_6-\theta,$$

$$T_3=X_6-E(X_1),\qquad T_4=\max\{X_x,X_2,\cdots,X_n\}.$$

(3)设样本的一组观察值是：0.5，1，0.7，0.6，1，1，写出样本均值、样本方差和标准差.

解 (1)因为 X_1，$X_2,\cdots$，X_6 是来自 $(0,\theta)$ 上均匀分布的样本，所以 X_1，$X_2,\cdots$，X_6 相互独立，且 X_i 的密度函数为

$$f(x_i)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}, & x_i\in(0,\theta),\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\ (i=1,2,\cdots,6),$$

所以样本 X_1，$X_2,\cdots$，X_6 的联合密度函数为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_6)=\begin{cases}\frac{1}{\theta^6}, & 0<x_1,x_2,\cdots,x_6<\theta,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) T_1 和 T_4 是统计量，T_2 和 T_3 不是，因为 T_1 和 T_4 中不含未知参数 θ，T_2 和 T_3 中含有未知参数 θ，$T_3=X_6-\frac{\theta}{2}$.

(3) 样本均值

$$\overline{X}=\frac{1}{6}(X_1+X_2+\cdots+X_6)=\frac{1}{6}(0.5+1+0.7+0.6+1+1)=0.8,$$

样本方差

$$S^2=\frac{1}{5}[\sum_{i=1}^{6}X_i^2-6\overline{X}^2]=\frac{1}{5}[(0.5^2+1^2+0.7^2+0.6^2+1^2+1^2)-6\times0.8^2]\approx0.052,$$

样本标准差 $S=\sqrt{S^2}\approx0.228$.

6.6 查表求 $\chi^2_{0.99}(12)$，$\chi^2_{0.01}(12)$，$t_{0.99}(12)$，$t_{0.01}(12)$，$F_{0.01}(15,29)$，$F_{0.995}(30,29)$.。

解 $\chi^2_{0.99}(12)=3.5706$；$\chi^2_{0.01}(12)=26.2170$，$t_{0.99}(12)=-2.6810$，$t_{0.01}(12)=2.6810$，

$F_{0.01}(15,29)=2.736$， $F_{0.995}(30,29)=0.37594$。

6.7 设 $T \sim t(10)$，求常数 c，使 $P\{T>c\}=0.95$。

解 由 t 分布关于纵轴对称，所以 $P\{T>-c\}=0.05$，由附表 4 可查得 $-c=1.8125$，所以 $c=-1.8125$。

6.8 设($X_1,X_2,\cdots,X_n$)是来自正态总体 $X \sim N(0,\sigma^2)$ 的样本，试证：

(1) $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 \sim \chi^2(n)$；(2) $\frac{1}{n\sigma^2}(\sum_{i=1}^{n}X_i)^2 \sim \chi^2(1)$。

证 （1）因为总体 $X \sim N(0,\sigma^2)$，所以 $\frac{X_i}{\sigma} \sim N(0,1)$，由 χ^2 分布的定义

$$\sum_{i=1}^{n}(\frac{X_i}{\sigma})^2=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 \sim \chi^2(n),$$

即 $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 \sim \chi^2(n)$。

(2)因为总体 $X \sim N(0,\sigma^2)$，所以 $\sum_{i=1}^{n}X_i \sim N(0,n\sigma^2)$， $\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{\sqrt{n\sigma^2}} \sim N(0,1)$，由 χ^2 分布的定义，

$$(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{\sqrt{n\sigma^2}})^2=\frac{1}{n\sigma^2}(\sum_{i=1}^{n}X_i)^2 \sim \chi^2(1),$$

即 $\frac{1}{n\sigma^2}(\sum_{i=1}^{n}X_i)^2 \sim \chi^2(1)$。

6.9 设 X_1,X_2,X_3,X_4,X_5 是独立且服从相同分布的随机变量，且每一个 $X_i(i=1,2,3,4,5)$ 都服从 $N(0,1)$。

(1)试给出常数 c，使得 $c(X_1^2+X_2^2)$ 服从 χ^2 分布，并指出它的自由度；

(2)试给出常数 d，使得 $d\frac{X_1+X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2+X_5^2}}$ 服从 t 分布，并指出它的自由度。

解 (1) 因为 $X_i(i=1,2,3,4,5)$ 是相互独立且都服从 $N(0,1)$ 的随机变量，所以 $X_1^2+X_2^2 \sim \chi^2(2)$，所以 $c=1$，自由度为 2。

(2) 因为 $X_i(i=1,2,3,4,5)$ 是相互独立且都服从 $N(0,1)$ 的随机变量，所以 $X_1+X_2 \sim N(0,2)$， $X_3^2+X_4^2+X_5^2 \sim \chi^2(3)$，于是

$$\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}} \sim N(0,1),$$

$$\frac{(X_1+X_2)/\sqrt{2}}{\sqrt{(X_3^2+X_4^2+X_5^2)/3}}=\frac{\sqrt{6}}{2}\frac{X_1+X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2+X_5^2}} \sim t(3)$$

即 $\frac{\sqrt{6}}{2}\frac{X_1+X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2+X_5^2}} \sim t(3)$。

即所以 $d=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，自由度为 3。

6.10 设 $\overline{X}$ 为总体 $X\sim N(3,4)$ 中抽取的样本 (X_1,X_2,X_3,X_4) 的均值，求 $P(-1<\overline{X}<5)$。

解 因为 $X\sim N(3,4)$，所以 $\overline{X}\sim N(3,1)$，$\overline{X}-3\sim N(0,1)$，所以

$P(-1<\overline{X}<5)=P(-1-3<\overline{X}-3<5-3)=\Phi(2)-\Phi(-4)=\Phi(2)=0.97725$.

6.11 设随机变量 X 服从自由度为 (n,n) 的 F 分布，已知 $P(X>\alpha)=0.05$，求 $P(X>\dfrac{1}{\alpha})$。

解 由 $P(X>\alpha)=0.05$ 得 $F_{0.05}(n,n)=\alpha$

因为 $X\sim F(n,n)$，所以 $\dfrac{1}{X}\sim F(n,n)$，于是

$$P(X>\frac{1}{\alpha})=P(\frac{1}{X}<\alpha)=1-P(\frac{1}{X}\geq\alpha)=1-0.05=0.95\ .$$

6.12 设 $X_1,X_2,\cdots,X_6$ 为来自正态总体 $N(0,3^2)$ 的一个简单随机样本，求常数 a,b,c 使得 $Q=aX_1^2+b(X_2+X_3)^2+c(X_4+X_5+X_6)^2$ 服从 χ^2 分布，并求自由度 n .

解 因为 $X_i\sim N(0,3^2)\quad(i=1,2,\cdots,6)$，$X_1,X_2,\cdots,X_6$ 相互独立，所以

$$X_1\sim N(0,3^2)\,,\ \frac{1}{3}X_1\sim N(0,1)\,,$$

$$X_2+X_3\sim N(0,18)\,,\quad \frac{1}{3\sqrt{2}}(X_2+X_3)\sim N(0,1)\,,$$

$$X_4+X_5+X_6\sim N(0,27)\,,\ \frac{1}{3\sqrt{3}}(X_4+X_5+X_6)\sim N(0,1)\,,$$

由此

$$(\frac{1}{3}X_1)^2+[\frac{1}{3\sqrt{2}}(X_2+X_3)]^2+[\frac{1}{3\sqrt{3}}(X_4+X_5+X_6)]^2\sim\chi^2(3)\,,$$

所以当 $a=\dfrac{1}{9}$，$b=\dfrac{1}{18}$，$c=\dfrac{1}{27}$ 时，$Q=aX_1^2+b(X_2+X_3)^2+c(X_4+X_5+X_6)^2$ 服从自由度为 3 的 χ^2 分布.

6.13 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个简单随机样本，$\overline{X}_n$ 和 S_n^2 是样本均值和样本方差，又设 X_{n+1} 是来自 $N(\mu,\sigma^2)$ 的新试验值，与 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立，求统计量 $T=\sqrt{\dfrac{n-1}{n+1}}\dfrac{X_{n+1}-\overline{X}_n}{S_n}$ 的分布.

解 因为 $X_1,X_2,\cdots,X_n,X_{n+1}$ 都是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，所以

$$X_i\sim N(\mu,\sigma^2)\quad(i=1,2,\cdots,n+1)\,,$$

$$E(\overline{X}_n)=\mu\,,\ D(\overline{X}_n)=\frac{1}{n}\sigma^2\,,\quad E(S_n{}^2)=\frac{n-1}{n}\sigma^2\,,$$

$$E(X_{n+1}-\overline{X}_n)=E(X_{n+1})-E(\overline{X}_n)=\mu-\mu=0\,,$$

$$D(X_{n+1}-\overline{X}_n)=D(X_{n+1})+D(\overline{X}_n)=\sigma^2+\frac{1}{n}\sigma^2=\frac{n+1}{n}\sigma^2\,,$$

所以

$$(X_{n+1}-\overline{X}_n)\sim N(0,\frac{n+1}{n}\sigma^2)，\ \frac{X_{n+1}-\overline{X}_n}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}\sigma}\sim N(0,1)，$$

又 $\frac{nS_n^{\ 2}}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，且它们相互独立，所以

$$T=\frac{\frac{X_{n+1}-\overline{X}_n}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}\sigma}}{\sqrt{\frac{nS_n^2}{\sigma^2}/n-1}}=\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\frac{X_{n+1}-\overline{X}_n}{S_n}\sim t(n-1).$$

即 $T=\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\frac{X_{n+1}-\overline{X}_n}{S_n}\sim t(n-1)$.

6.14 在天平上重复称量一重为 a 的物品，假设各次称量结果是相互独立且同服从正态分布 $N(a,0.2^2)$，若以 $\overline{X}_n$ 表示 n 次称量结果的算术平均值，为使 $P(|\overline{X}_n-a|<0.1)\geq 0.95$，试求 n 的最小值应不小于多少？

解 用 X_i 表示第 i 次称量结果，则

$$X_i\sim N(a,0.2^2)，\ \overline{X}_n\sim N(a,\frac{0.2^2}{n})，\ \frac{\overline{X}_n-a}{0.2/\sqrt{n}}\sim N(0,1)，$$

$$P(|\overline{X}_n-a|<0.1)=P(|\frac{\overline{X}_n-a}{0.2/\sqrt{n}}|<\frac{\sqrt{n}}{2})=\Phi(\frac{\sqrt{n}}{2})-\Phi(-\frac{\sqrt{n}}{2})=2\Phi(\frac{\sqrt{n}}{2})-1\geq 0.95，$$

所以

$$\Phi(\frac{\sqrt{n}}{2})\geq 0.975，\ \frac{\sqrt{n}}{2}\geq 1.96，\ n\geq 15.3664，$$

故 n 的最小值应不小于自然数 16.

6.15 设 $X_1,X_2,\cdots,X_9$ 是来自正态总体 X 的简单随机样本，$Y_1=\frac{1}{6}(X_1+\cdots+X_6)$，$Y_2=\frac{1}{3}(X_7+X_8+X_9)$，$S_1^{\ 2}=\frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}(X_i-Y_2)^2$，$Z=\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S_1}$，证明统计量 Z 服从自由度为 2 的 t 分布.（1999 年研究生入学考试题）

证 因为 $X_1,X_2,\cdots,X_9$ 是来自正态总体 X 的简单随机样本，设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则

$$\frac{X_i-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)，\ Y_1=\frac{1}{6}(X_1+\cdots+X_6)\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{6})，$$

$$Y_2=\frac{1}{3}(X_7+X_8+X_9)\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{3})，\quad Y_1-Y_2\sim N(0,\frac{\sigma^2}{2})，$$

$$\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{\sigma}\sim N(0,1)，\ \frac{\sqrt{3}(Y_2-\mu)}{\sigma}\sim N(0,1)，$$

而

$$S_1^{\ 2}=\frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}(X_i-Y_2)^2=\frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}[(X_i-\mu)-(Y_2-\mu)]^2，$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}[(X_i-\mu)^2+(Y_2-\mu)^2-2(X_i-\mu)(Y_2-\mu)]$$

$$=\frac{\sigma^2}{2}\{\sum_{i=7}^{9}(\frac{X_i-\mu}{\sigma})^2-[\frac{\sqrt{3}(Y_2-\mu)}{\sigma}]^2\},$$

故 $\frac{2S_1^{\ 2}}{\sigma^2}\sim\chi^2(2)$，所以 $\dfrac{\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{\sigma}}{\sqrt{\frac{2S_1^{\ 2}}{\sigma^2}/2}}=\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S_1}=Z\sim t(2)$，即统计量 $Z=\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S_1}$ 服从自由度为 2 的 t 分布.

6.16 某市有 10000 个年满 18 岁的居民,他们中 10%年收入超过 1 万,20%受过高等教育,今从中抽取 1600 人的随机样本，求：(1)样本中不少于 11%的人年收入超过 1 万的概率；(2)样本中 19%和 21%之间的人受过高等教育的概率.

解 (1)令 $X_i=\begin{cases}1, & \text{第}i\text{个居民年收入超过一万},\\ 0, & \text{第}i\text{个居民年收入没超过一万}\end{cases}$，$i=1,2,\cdots,1600$，则 X_i 服从 $0-1$ 分布，$\mu=E(X_i)=p=0.1$，$\sigma^2=D(X_i)=p(1-p)=0.09=0.3^2$，

又因为 $n=1600<<N=100000$，故可将此抽样近似的看作有放回抽样，X_1，X_2，$\cdots X_n$ 相互独立，且 $\sum_{i=1}^{n}X_i$ 近似服从正态分布，

$$E(\sum_{i=1}^{n}X_i)=n\mu，\ D(\sum_{i=1}^{n}X_i)=n\sigma^2，\ \sum_{i=1}^{n}X_i\sim N(n\mu,n\sigma^2),$$

样本中年收入超过 1 万的比例是 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，所以 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$，

$$P(\overline{X}\geq 11\%)=1-P(\overline{X}<0.11)=1-P(\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma}<\frac{\sqrt{1600}(0.11-0.1)}{0.3})$$
$$=1-\Phi(\frac{4}{3})=1-0.90824=0.09176.$$

(2)令

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{第}i\text{个居民受过高等教育},\\ 0, & \text{第}i\text{个居民未受过高等教育}\end{cases}，\ i=1,2,\cdots,1600,$$

则 X_i 服从 $0-1$ 分布，$\mu=E(X_i)=p=0.2$，$\sigma^2=D(X_i)=p(1-p)=0.16=0.4^2$，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$，

$$P\{19\%\leq\overline{X}\leq 21\%\}=P\{\frac{40\times(0.19-0.2)}{0.4}\leq\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma}\leq\frac{40\times(0.21-0.2)}{0.4}\}$$
$$=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1=2\times 0.84134-1=0.68266.$$

答：(1)样本中不少于 11%的人年收入超过 1 万的概率是 0.0918;(2)样本中 19%和 21%之间的人受过高等教育的概率为 0.68266.

第 7 章　参数估计

7.1.设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}(\alpha+1)x^{\alpha}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases},$$

其中 $a>-1$ 是未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自 X 的样本，求参数 α 的矩估计量和最大似然估计.

解 $\mu_1=E(X)=\int_0^1(\alpha+1)x^{\alpha}dx=(\alpha+1)\int_0^1 x^{\alpha+1}dx=\dfrac{\alpha+1}{\alpha+2}$

令 $\overline{X}=\dfrac{\alpha+1}{\alpha+2}$，从而 $\hat{\alpha}=\dfrac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$ ，即 α 的矩估计量为 $\hat{\alpha}=\dfrac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$.

再求极大似然估计：

$$L(X_1,\cdots,X_n;\alpha)=\prod_{i=1}^{n}(\alpha+1)x_i^{\alpha}=(\alpha+1)^n(x_1x_2\cdots x_n)^{\alpha},$$

$$\ln L=n\ln(\alpha+1)+\alpha\sum_{i=1}^{n}\ln x_i,$$

$$\frac{d\ln L}{d\alpha}=\frac{n}{\alpha+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\triangleq 0,$$

解得 α 的极大似然估计值：$\hat{\alpha}=-(1+\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i})$

从而 α 的极大似然估计量：$\hat{\alpha}=-(1+\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i})$

7.2.设总体 X 服从几何分布，其分布律为

$$P\{X=x\}=p(1-p)^{x-1},\quad x=1,2,\cdots.$$

求参数 p $(0<p<1)$ 的矩估计和最大似然估计.

解 矩估计

由于 $A_1=E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}kp(1-p)^{k-1}=\dfrac{1}{p}$，令 $\overline{X}=A_1$，即 $p=\dfrac{1}{\overline{x}}$，因此，所求的矩估计量为 $\hat{p}=\dfrac{1}{\overline{X}}$.

最大似然估计

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 取自总体 X 的一组样本观测值，则似然函数为

$$L=\prod_{k=1}^{n}P(X_k=x_k)=p^n(1-p)^{\sum_{k=1}^{n}(x_k-1)}$$

取对数

$$\ln L=n\ln p+\sum_{k=1}^{n}(x_k-1)\cdot\ln(1-p)$$

由对数似然方程

$$\frac{d(\ln L)}{dp}=\frac{n}{p}-\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_i-1)}{1-p}=0$$

解得 $p=\frac{1}{\overline{x}}$.故参数 p 的最大似然估计值为 $\widehat{p}=\frac{1}{\overline{x}}$

7.3.设总体 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-\frac{1}{x^{\beta}}, x>1,\\ 0, \quad x\le 1,\end{cases}$$

其中未知参数 $\beta>1, X_1, X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，求：(1) β 的矩估计量；(2) β 的最大似然估计量.

解 X 的概率密度为

$$f(x,\beta)=\begin{cases}\frac{\beta}{x^{\beta+1}}, x>1,\\ 0, \quad x\le 1.\end{cases}$$

(1)由于

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\beta)dx=\int_{1}^{+\infty}x\cdot\frac{\beta}{x^{\beta+1}}dx=\frac{\beta}{\beta-1},$$

令 $\frac{\beta}{\beta-1}=\overline{X}$，解得 $\beta=\frac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$，所以参数 β 的矩估计量为 $\hat{\beta}=\frac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$..

(2)似然函数为

$$L(\beta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\beta)=\begin{cases}\frac{\beta^n}{(x_1x_2\cdots x_n)^{\beta+1}}, x_i>1(i=1,2,\cdots,n),\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

当 $x_i>1(i=1,2,\cdots,n)$ 时，$L(\beta)>0$，取对数得

$$\ln L(\beta)=n\ln\beta-(\beta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i,$$

两边对 β 求导，得 $\frac{d\ln L(\beta)}{d\beta}=\frac{n}{\beta}-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$，令 $\frac{d\ln L(\beta)}{d\beta}=0$，可得

$$\beta=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i},$$

故 β 的最大似然估计量为

$$\hat{\beta}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}.$$

7.4.设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-\left(\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta}, & x>\alpha,\\ 0, & x\le\alpha.\end{cases}$ 其中参数 $\alpha>0$，$\beta>1$.

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，(1)当 $\alpha=1$ 时，求未知参数 β 的矩估计量；(2)当 $\alpha=1$ 时，求未知参数 β 的最大似然估计量.(3) 当 $\beta=2$ 时，求未知参数 α 的最大似然估计量.

解 （1）当$\alpha=1$时，X 的概率密度函数为 $f(x;\beta)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{x^{\beta+1}}, & x>1,\\ 0, & x\le 1.\end{cases}$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\beta)dx=\int_{1}^{+\infty}x\frac{\beta}{x^{\beta+1}}dx=\frac{\beta}{\beta-1}$$

令$\dfrac{\beta}{\beta-1}=\bar{X}$，解得$\beta=\dfrac{\bar{X}}{\bar{X}-1}$． 所以$\beta$的矩估计量为$\hat{\beta}=\dfrac{\bar{X}}{\bar{X}-1}$

（2）设$x_1,x_2,\cdots,x_n$为对应于样本的一组样本观测值，似然函数

$$L(\beta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\beta)=\begin{cases}\dfrac{\beta^n}{(x_1x_2\cdots x_n)^{\beta+1}}, & x_i>1,i=1,2,\cdots,n\\ 0, & x_i\le 1,i=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

当$x_i>1,i=1,2,\cdots,n$时，

$$\ln L(\beta)=n\ln\beta-(\beta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\ .$$

令

$$\frac{d\ln L(\beta)}{d\beta}=\frac{n}{\beta}-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0\ ,$$

得$\beta=\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$.所以参数$\beta$的最大似然估计量为$\hat{\beta}=\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$

（3）当$\beta=2$时，X 的概率密度函数为 $f(x;\beta)=\begin{cases}\dfrac{2\alpha^2}{x^3}, & x>\alpha,\\ 0, & x\le\alpha.\end{cases}$

设$x_1,x_2,\cdots,x_n$为对应于样本的一组样本观测值，似然函数

$$L(\alpha)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\alpha)=\begin{cases}\dfrac{2^n\alpha^{2n}}{(x_1x_2\cdots x_n)^3}, & x_i>\alpha,i=1,2,\cdots,n\\ 0, & x_i\le 1,i=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

当 $x_i>\alpha,i=1,2,\cdots,n$ 时，α 越大，$L(\alpha)$ 越大，所以α 的最大似然估计值为$\hat{\alpha}=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，所以$\alpha$的最大似然估计量为$\hat{\alpha}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$

7.5.设总体X 的分布密度为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}, & 0\le x\le\theta\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

其中$\theta>0$是未知参数， $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是来自总体X 的样本，求：

(1) θ的矩法估计量$\hat{\theta}_1$；

(2)验证$\hat{\theta}_1$、$\hat{\theta}_2=[(n+1)/n]M$ 都是θ的无偏估计量(其中$M=\max\{X_1,\cdots X_n\}$)；

(3)比较$\hat{\theta}_1$、$\hat{\theta}_2$两个无偏估计量的有效性.

解 （1）总体X 的数学期望$E(X)=\int_0^\theta\dfrac{x}{\theta}dx=\dfrac{\theta}{2}$，令$E(X)=\bar{X}$并求解$\theta$得矩法估计

量$\hat{\theta}_1 = 2\bar{X}$.

(2) $E\hat{\theta}_1 = 2E\bar{X} = 2EX = \theta$

$$E\hat{\theta}_2 = \frac{n+1}{n}.EM = \frac{n+1}{n}\int_0^\theta x.n\frac{x^{n-1}}{\theta^n}dx = n+1\int_0^\theta \frac{x^n}{\theta^n}dx$$

$$= \frac{n+1}{\theta^n}.\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^\theta = \theta$$

所以$\hat{\theta}_1$ 、$\hat{\theta}_2$ 均是θ的无偏估计.

(3) $D(\hat{\theta}_1) = D(2\bar{X}) = (4/n)D(X) = \dfrac{\theta^2}{3n}$

$$D(\hat{\theta}_2) = \frac{(n+1)^2}{n^2}D(M) = \frac{(n+1)^2}{n^2}\int_0^\theta x^2 n\frac{x^{n-1}}{\theta^n}dx - \theta^2$$

$$= \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+1)} - 1\right)\theta^2 = \frac{\theta^2}{n(n+2)}$$

当$n > 2$时，$D(\hat{\theta}_1) > D(\hat{\theta}_2)$也就是说$\hat{\theta}_2$较$\hat{\theta}_1$有效

7.6.从总体 X 中抽取样本X_1, X_2, X_3，已知总体服从正态分布.证明下列三个统计量

$$\hat{\mu}_1 = \frac{X_1}{2} + \frac{X_2}{3} + \frac{X_3}{6}，\ \hat{\mu}_2 = \frac{X_1}{2} + \frac{X_2}{4} + \frac{X_3}{4},\ \hat{\mu}_3 = \frac{X_1}{3} + \frac{X_2}{3} + \frac{X_3}{3}$$

都是总体均值$E(X) = \mu$的无偏估计量，并确定哪个估计量更有效?

解 根据正态分布的性质可知：

$$E(X_i) = E(X) = \mu\ , i = 1,2,3$$

从而有

$$E(\hat{\mu}_1) = E(\frac{X_1}{2} + \frac{X_2}{3} + \frac{X_3}{6}) = \frac{1}{2}E(X_1) + \frac{1}{3}E(X_2) + \frac{1}{6}E(X_3) = \mu$$

$$E(\hat{\mu}_2) = E(\frac{X_1}{2} + \frac{X_2}{4} + \frac{X_3}{4}) = \frac{1}{2}E(X_1) + \frac{1}{4}E(X_2) + \frac{1}{4}E(X_3) = \mu$$

$$E(\hat{\mu}_3) = E(\frac{X_1}{3} + \frac{X_2}{3} + \frac{X_3}{3}) = \frac{1}{3}E(X_1) + \frac{1}{3}E(X_2) + \frac{1}{3}E(X_3) = \mu$$

由无偏估计的定义可知: $E(\hat{\mu}_1)$、$E(\hat{\mu}_2)$、$E(\hat{\mu}_3)$都是总体均值μ的无偏估计量.

因为样本 X_1, X_2, X_3 是相互独立的，且根据正态分布总体的性质可知 $D(X_i) = D(X) = \sigma^2$， $i = 1,2,3$,所以

$$D(\hat{\mu}_1) = D(\frac{X_1}{2} + \frac{X_2}{3} + \frac{X_3}{6}) = \frac{1}{4}D(X_1) + \frac{1}{9}D(X_2) + \frac{1}{36}D(X_3) = \frac{7}{18}\sigma^2$$

$$D(\hat{\mu}_2) = D(\frac{X_1}{2} + \frac{X_2}{4} + \frac{X_3}{4}) = \frac{1}{4}E(X_1) + \frac{1}{16}(E(X_2) + E(X_3)) = \frac{3}{8}\sigma^2$$

$$D(\hat{\mu}_3) = D(\frac{X_1}{3} + \frac{X_2}{3} + \frac{X_3}{3}) = \frac{1}{9}E(X_1) + \frac{1}{9}(E(X_2) + E(X_3)) = \frac{1}{3}\sigma^2$$

从而可知

$$D(\hat{\mu}_3) = \frac{1}{3}\sigma^2 < D(\hat{\mu}_2) = \frac{3}{8}\sigma^2 < \frac{7}{18}\sigma^2 = D(\hat{\mu}_1)$$

因此，估计量$D(\hat{\mu}_3)$更有效.

7.7.设$X_1, X_2 \cdots\cdots X_n$是来自总体 X 的样本，且 X 的概率密度为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\theta}, & 0<x<\theta,\\ \dfrac{1}{2(1-\theta)}, & \theta\le x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$\overline{X}$ 是样本均值，(1)求参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$；(2)判断 $4\overline{X}^2$ 是否为 θ^2 的无偏估计量，并说明理由.

解 （1） $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,\theta)dx=\int_0^{\theta}\dfrac{x}{2\theta}dx+\int_{\theta}^{1}\dfrac{x}{2(1-\theta)}dx=\dfrac{2\theta+1}{4}$

令 $\overline{X}=E(X)$，即 $\dfrac{2\theta+1}{4}=\overline{X}$.从而可以得到参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}=\dfrac{4\overline{X}-1}{2}$.

（2） $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x,\theta)dx=\int_0^{\theta}\dfrac{x^2}{2\theta}dx+\int_{\theta}^{1}\dfrac{x^2}{2(1-\theta)}dx=\dfrac{2\theta^2+\theta+1}{6}$

$$E\left(4\overline{X}^2\right)=4E\left[(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)^2\right]=\frac{4}{n^2}E[\sum_{i=1}^{n}X_i^2+2\sum_{1\le i<j\le n}X_iX_j]$$

$$=\frac{4}{n^n}\left[\frac{n\left(2\theta^2+\theta+1\right)}{6}+2\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{2\theta+1}{4}\right)^2\right]\ne\theta^2$$

所以 $4\overline{X}^2$ 不是 θ^2 的无偏估计量

7.8.设总体 X 的均值 μ 和方差 σ^2 都存在， $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为 X 的一个样本，证明：

(1)样本加权平均值 $\overline{X^*}=\sum_{i=1}^{n}c_iX_i$ （ $c_i\ge 0,\sum_{i=1}^{n}c_i=1$ ）是 μ 的无偏估计量；

(2)在 μ 的所有形如 $\overline{X^*}$ 的无偏估计量中，样本均值 $\overline{X}$ 最有效.

解 （1）因为

$$E(\overline{X^*})=E(\sum_{i=1}^{n}c_iX_i)=\sum_{i=1}^{n}E(c_iX_i)=\sum_{i=1}^{n}c_iE(X_i)=\mu\sum_{i=1}^{n}c_i=\mu$$

所以样本加权平均值 $\overline{X^*}=\sum_{i=1}^{n}c_iX_i$ 是 μ 的无偏估计量.

（2） 因为

$$D(\overline{X^*})=D(\sum_{i=1}^{n}c_iX_i)=\sum_{i=1}^{n}E(c_iX_i)=\sum_{i=1}^{n}c_i^2E(X_i)=\sigma^2\sum_{i=1}^{n}c_i^2$$

又

$$(c_1+c_2+\cdots+c_n)^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_ic_j\le\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(c_i^2+c_j^2)=n\sum_{i=1}^{n}c_i^2 .$$

于是

$$D(\overline{X^*})=\sigma^2\sum_{i=1}^{n}c_i^2\ge\frac{1}{n}\sigma^2=D(\overline{X})$$

即在 μ 的所有形如 $\overline{X^*}$ 的无偏估计量中，样本均值 $\overline{X}$ 最有效.

7.9.设 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量，试证(1)若 $D(\hat{\theta})>0$ ，则 $\hat{\theta}^2$ 不是 θ^2 的无偏估计量；(2)若 $\lim\limits_{n\to+\infty}D(\hat{\theta})=0$，则 $\hat{\theta}$ 是 θ 的相和估计量.

证 （1）因为

$$E(\hat{\theta}^2) = D(\hat{\theta}) + E^2(\hat{\theta}) = \hat{\theta}^2 + D(\hat{\theta}) > \hat{\theta}^2$$

所以 $\hat{\theta}^2$ 不是 θ^2 的无偏估计量.

(2) 根据切比雪夫不等式得

$$P\{|\hat{\theta} - \theta| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D(\hat{\theta})}{\varepsilon^2}$$

再由已知条件 $\lim\limits_{n\to+\infty} D(\hat{\theta}) = 0$ 得 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{D(\hat{\theta})}{\varepsilon^2} = 0$。于是 $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\hat{\theta} - \theta| \geq \varepsilon\} = 0$，即 $\hat{\theta}$ 是 θ 的相和估计量.

7.10.某旅行社为调查当地旅游者的平均消费额，随机访问了 100 名旅游者，得知平均消费额 $\bar{x} = 80$ 元. 根据经验，已知旅游者消费服从正态分布，且标准差 $\sigma = 12$ 元，求该地旅游者平均消费额 μ 的置信水平为 95%的置信区间.

解 对于给定的置信度 $1-\alpha = 0.95,\quad \alpha = 0.05,\quad \alpha/2 = 0.025,$
查标准正态分布表 $u_{0.025} = 1.96$, 将数据 $n = 100,\quad \bar{x} = 80,\quad \sigma = 12,\quad u_{0.025} = 1.96,$
代入 $\bar{x} \pm u_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 计算得 μ 的置信度为 95%的置信区间为 $(77.6, 82.4)$

7.11.假设某工厂生产的钢球直径服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，现从某日生产的产品中，随机抽取 5 只钢球，测得直径如下(单位:cm):

14.6，14.9，15.1，15.2，15.1

σ^2 未知，求置信水平为 0.95 时 μ 的置信区间.

解 由题设可知 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $n = 5$, $1-\alpha = 0.95$, $\bar{x} = 14.98$, $s^2 = 0.239$.因为 σ^2 未知，所以选择样本的统计量为

$$t = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

查 t 分布表可知

$$t_\alpha(n-1) = t_{0.05}(4) = 2.776$$

从而可知 μ 的 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$(\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1), \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1)) = (14.68, 15.28)$$

即在置信度为 0.95 时 μ 的置信区间为 (14.68,15.28)

7.12.假设某种批量生产的配件的内径 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，今随机抽取 16 个，测得平均内径为 3.05mm ，样本标准偏差为 0.16mm ,试求 μ 和 σ^2 的 0.95 置信区间.

解 由题设可知: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $n = 16$, $\overline{X} = 3.05$,
$s = 0.16$, $1-\alpha = 0.95$.

(1) 因为 σ^2 未知，所以选择统计量为

$$\frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

查 t 分布表可知: $t_\alpha(n-1) = t_{0.05}(15) = 1.7531$，从而可得 μ 的 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$(\overline{X} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1), \overline{X} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1)) = (2.98, 3.12)$$

所以，μ 的 0.95 置信区间为(2.98,3.12).

(2) 因为 μ 未知，所以选择的样本统计量为

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$$

为使 $P\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)<\chi^2<\chi^2_{\alpha/2}(n-1)\}=0.95$，只需

$$P\{\chi^2\geq\chi^2_{\alpha/2}(n-1)\}=\alpha/2=0.025$$

$$P\{\chi^2\geq\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\}=1-\alpha/2=0.975$$

查 χ^2 分布表，可知

$$\chi^2_{\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.025}(15)=27.488,$$

$$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.975}(15)=6.262$$

即 $P\{6.262<\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<27.488\}$。将上述不等式变形可得

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)=(0.014,0.061)$$

即所求的 σ^2 的置信区间为（0.014,0.061）

7.13. 某地区 2000 年分行业调查职工平均工资情况：已知体育、卫生、社会福利事业职工工资 X（单位：元）$\sim N(\mu_1,218^2)$，从总体 X 中调查 25 人，平均工资 1286 元；文教、艺术、广播事业职工工资 Y（单位：元）$\sim N(\mu_2,227^2)$,，从总体 Y 中调查 30 人，平均工资 1272 元,求这两大类行业职工平均工资之差的 99%的置信区间.

解 由于 $1-\alpha=0.99$，故 $\alpha=0.01$，查表得 $u_{0.005}=2.576$,

又 $n_1=25,\quad n_2=30,\quad \sigma_1^2=218^2,\quad \sigma_2^2=227^2,\quad \bar{x}=1286,\quad \bar{y}=1272,$

于是 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 99%的置信区间为 $(-140.96,168.96)$

7.14.为了估计磷肥对某农作物增产的作用，现选 20 块条件大致相同的土地进行试验．10 块施磷肥，另 10 块不施磷肥，获得亩产量如下(单位：斤)

施磷肥亩产量： 620， 570， 650， 600， 630， 580， 570， 600， 600， 580

不施磷肥亩产： 560， 590， 560， 570， 580， 570， 600， 550， 570， 550

设施磷肥亩产和不施磷肥亩产都具有正态分布，且方差相同．取置信水平为 0.95，试对施磷肥平均亩产和不施磷肥平均亩产之差作区间估计．

解 根据实际情况，可认为来自不同正态总体的两个样本是相互独立的．又因两个总体的方差相等而未知，故可用置信区间

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}\pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_\omega\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$$

来估计均值差 $\mu_1-\mu_2$．由于 $1-\alpha=0.95$ 即 $\alpha=0.05$，且 $n_1=10,n_2=10$，查 t 分布表得

$$t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)=t_{0.025}(18)=2.101,$$

又由于

$$\bar{x}-\bar{y}=600-570=30,\qquad s_\omega^2=\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}=488.889,$$

$$s_\omega=\sqrt{s_\omega^2}=22.1018,\qquad \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}=\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}}=0.447214.$$

所以 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 0.95 的置信区间为即（9.22475，50.7752）.

7.15.用两台机床加工同一种零件，分别从它们加工的零件中抽取 6 个和 9 个测其长度

(单位：cm)，算得样本方差分别为 $s_1^2=0.245$，$s_2^2=0.357$．设两台机床加工零件的长度都服从正态分布，试求两个总体方差之比$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信区间(取置信水平为 0.95).

解 由题意，$n_1=6$，$n_2=9$，$1-\alpha=0.95$，查 F分布表得

$$F_{\alpha/2}\left(n_1-1,n_2-1\right)=F_{0.025}\left(5,8\right)=4.82,$$

$$F_{1-\alpha/2}\left(n_1-1,n_2-1\right)=F_{0.975}\left(5,8\right)=\frac{1}{F_{0.025}\left(8,5\right)}=\frac{1}{6.76},$$

又 $s_1^2=0.245$，$s_2^2=0.357$，于是由

$$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha/2}\left(n_1-1,n_2-1\right)},\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha/2}\left(n_1-1,n_2-1\right)}\right)$$

得σ_1^2/σ_2^2的置信度为 0.95 的置信区间为(0.142831，4.63922).

7.16.从一批某种型号的电子元件中随机抽取 6 个测其使用寿命(单位:kh),得样本观测值为

15.6，14.9，16.0，14.8，15.3，15.5.

设电子元件的使用寿命服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，求：(1)寿命均值μ的置信水平为 95%的单侧置信下限；(2)寿命方差σ^2的置信水平为 95%的单侧置信上限.

解 根据已知条件$\alpha=0.05$，$n=6$，$\bar{x}=15.35,\ s=0.45055$．

(1) 查表得$t_{0.05}(5)=2.015$．故寿命均值μ的置信度为 95%的单侧置信区间为

$$\left(15.35-2.015\times\frac{0.45055}{\sqrt{5}},+\infty\right)=\left(14.944,+\infty\right),$$

单侧置信下限为14.944．

(2) 由$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，有$P\left\{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}>\chi_{1-\alpha}^2(n-1)\right\}=1-\alpha$，即

$$P\left\{\sigma^2<\frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha}^2(n-1)}\right\}=1-\alpha\quad.$$

于是方差σ^2的置信度为$1-\alpha$的单侧置信区间$(0,\dfrac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha}^2(n-1)})$，单侧置信上限为$\bar{\sigma}^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha}^2(n-1)}$．

查表得$\chi_{1-\alpha}^2(n-1)=\chi_{0.95}^2(5)=1.145$．寿命方差$\sigma^2$的置信度为 95%的单侧置信区间为

$$(0,\frac{(6-1)\times0.203}{1.145})=(0,0.886463)$$

单侧置信上限为0.886463．

第 8 章　假设检验

8.1. 某车间生产钢丝，用 X 表示钢丝的折断力，由经验判断 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 $\mu = 570, \sigma^2 = 8^2$；今换了一批材料，从性能上看估计折断力的方差 σ^2 不会有什么变化(即仍有 $\sigma^2 = 8^2$)，但不知折断力的均值 μ 和原先有无差别．现抽得样本，测得其折断力为：

578　572　570　568　572　570　570　572　596　584

取 $\alpha = 0.05$，试检验折断力均值有无变化?

解　建立假设

$H_0: \mu = \mu_0 = 570,\ H_1: \mu \neq 570.$

选择统计量

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

对于给定的显著性水平 α，确定 k，使 $P\{|Z| > k\} = \alpha$，查正态分布表得 $k = z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$，从而拒绝域为 $|z| > 1.96$.

由于 $\bar{x} = \frac{1}{10}\sum_{i=j}^{10} x_i = 575.20,\ \sigma^2 = 64$，所以

$$|z| = \left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}\right| = 2.06 > 1.96,$$

故应拒绝 H_0，即认为折断力的均值发生了变化．

8.2．用机床加工圆形零件，在正常情况下，零件的直径服从正态分布 $N(20,1)$ (单位:mm)，今在某天生产的零件中随机抽查了 6 件，测得直径分别为(单位:mm)

19　19.2　19.1　20.5　19.6　20.8

假定方差不变，问该天生产的零件是否符合要求？($\alpha = 0.05$)．

解　由题意可设该天生产的零件直径 $X \sim N(\mu,1)$．检验的假设为

$H_0: \mu = \mu_0 = 20$，$H_1: \mu \neq \mu_0 = 20$．

因为 σ 已知，故应选择的统计量为

$$U = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)\ .$$

由已知条件可求得统计量 U 的观测值为 $|u| = 0.735$，查标准正态分布表可知．$u_{\alpha/2} = u_{0.025} = 1.96$，因为 $|u| = 0.735 < 1.96 = u_{0.025}$．所以，接受原假设 H_0，即认为该天生产的零件是符合要求．

8.3．有一批子弹，出厂时，测其初速 V 服从正态分布 $N(\mu_0,\sigma_0^2)$，其中 $\mu_0 =$ 950 m/s，$\sigma_0 = 10$ m/s，现经过较长时间储存，取 9 发进行测试，得样本值(单位：m/s)如下：

934，914，945，920，953，912，910，924，940．

据检验，子弹经储存，其初速 V 仍服从正态分布，且 σ_0 可认为不变，问是否可认为这批枪弹的初速 V 显著降低($\alpha = 0.05$)？

解　由题设知：$\mu_0 = 950$，$\sigma_0 = 10$，$n = 9$，$\alpha = 0.05$，$\bar{x} = 928$．所求检验的假设为

$H_0: \mu \geq \mu_0 = 950$，$H_1: \mu < \mu_0 = 950$

由于 σ 已知，故选择的统计量为

$$Z=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1).$$

又由题设可求得统计量 Z 的观测值为 $z=-6.6$，查标准正态分布表可知 $z_{\alpha/2}=z_{0.025}=1.96$，由于 $z=-6.6<-1.96=-z_{0.025}$.所以,拒绝原假设 H_0,接受备择假设 H_1，即认为这批枪弹的初速 V 显著降低.

8.4.某炼钢厂生产的一种钢筋的断裂强度 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，且 $\sigma=$ 35 (kg/cm^2).现从生产的一批钢筋中随机地抽测 9 个样品,测得的样本均值 $\overline{x}$ 较以往的均值 μ 大 17(kg/cm^2),设总体方差不变,问能否认为这批钢筋的强度有明显提高?($\alpha=0.05$)

解　由题设知：$\overline{x}-\mu=17$，$\sigma=35$ ，$n=9$，所求检验的假设为 $H_0:\mu\leq\mu_0$，$H_1:\mu>\mu_0$.因为 σ 已知,故选择的统计量为

$$Z=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1).$$

从而可求得 U 的观测值为 $z=1.46$. 查标准正态分布表可知: $z_\alpha=z_{0.05}=1.64$，因为 $z=1.46<1.64=z_{0.05}$.所以,接受原假设 H_0,即认为这批钢筋的强度没有明显提高.

8.5.设某次考试的考生成绩服从正态分布，从中随机地抽取 36 位考生的成绩，算得平均成绩为 66.5 分，标准差为 15 分，问在显著性水平 0.05 下，是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分？

解　设这次考试的考生成绩为 X，则 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$. 由题设知 $\mu_0=70$，$n=36$，$\bar{x}=66.5$，$s=15$，$\alpha=0.05$.所要求检验的假设为

$$H_0:\mu=\mu_0=70,\ H_1:\mu\neq\mu_0=70$$

因为 σ 未知，所以应选择的统计量为

$$T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

由已知条件可求得统计量 T 的观测值为 $T=-1.4$. 查 t 分布表可知: $t_{1-\alpha/2}(n-1)=t_{0.975}(35)=2.0301$.因为

$$|T|=1.4<2.0301=t_{0.975}(35)$$

所以，接受原假设 H_0，即认为在显著性水平 0.05 下，可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分.

8.6.一公司声称某种类型的电池的平均寿命至少为 21.5 小时. 有一实验室检验了该公司制造的 6 套电池，得到如下的寿命小时数:

19，18，22，20，16，25

试问: 这些结果是否表明，这种类型的电池低于该公司所声称的寿命?(显著性水平 $\alpha=0.05$).

解　可把上述问题归纳为下述假设检验问题:

$H_0:\mu\geq 21.5$，　$H_1:\mu<21.5.$

这可利用 t 检验法的左侧检验法来解.

本例中 μ_0=21.5, $n=6$, 对于给定的显著性水平 $\alpha=0.05$, 查附表得

$$t_\alpha(n-1)=t_{0.05}(5)=2.015.$$

再据测得的 6 个寿命小时数算得: $\bar{x}=20,\ s^2=10.$ 由此计算

$$t=\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}=\frac{20-21.5}{\sqrt{10}}\sqrt{6}=-1.162.$$

因为 $t=-1.162>-2.015=-t_{0.05}(5)$, 所以不能否定原假设 H_0, 从而认为这种类型电池的寿

命并不比公司宣称的寿命短.

8.7. 某工厂从生产的圆珠笔中随机地抽出 36 根,测其长度,得到样本平均值为 $\bar{x}=12.8$ cm ,样本标准差 $s=2.6$ cm .问这批圆珠笔的平均长度能否认为在 12cm 以下($\alpha=0.05$)?

解 由题设知: $\mu_0=12$, $n=36$, $\overline{X}=12.8$, $s=2.6$,故所求检验的假设为 $H_0:\mu\le\mu_0=12$, $H_1:\mu>\mu_0=12$. 因为 σ 未知,所以应选择的统计量为

$$T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1).$$

由已知条件可求得统计量 T 的观测值为 $t=1.846$.查 t 分布表可知 $t_\alpha(n-1)=t_{0.05}(35)=1.6896$. 又因为 $t=1.846>1.6896=t_{0.05}(35)$,所以拒绝原假设 H_0,接受备择假设 H_1,即认为这批圆珠笔的平均长度在 l2cm 以上.

8.8. 某工厂生产的铜丝的折断力(N)服从正态分布 $N(576,8^2)$.某日抽取10根铜丝进行折断力试验，测得结果如下:

578 572 570 568 572 570 572 596 584 570

问是否可以认为该日生产的铜丝折断力的标准差也是 8 N ?($\alpha=0.05$)

解 由题设可知: $X\sim N(576,8^2)$, $\mu_0=576$, $n=10$, $\sigma_0^2=8^2$, $\alpha=0.05$。所求检验的假设为

$$H_0:\sigma=\sigma_0=8,\ H_1:\sigma\ne\sigma_0=8$$

因 μ_0 已知，所以应选择的统计量为

$$\chi^2=\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2\sim\chi^2(n)$$

由已知条件可求得统计量 χ^2 的观测值为 $\chi^2=10.75$。查 χ^2 分布表可知 $\chi^2_{1-\alpha/2}(n)=\chi^2_{0.975}(10)=3.247$，而

$$\chi^2_{\alpha/2}(n)=\chi^2_{0.025}(10)=20.483$$

显然

$$\chi^2_{0.975}(10)=3.247<\chi^2=10.75<20.483=\chi^2_{0.025}(10)$$

所以，接受原假设 H_0，即认为该月生产的铜丝折断力的标准差仍为 8 N

8.9.现有某一型号手机,根据国标要求,其发射功率的标准差不得小于 10mV .现从刚生产的一批手机中随机地抽取样品 10 台,测得样本标准差为 8mV .设这种型号的手机的发射功率服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,问是否可以认为这批手机的发射功率的标准差显著偏小($\alpha=0.05$)?

解 由题设可知：$\sigma_0=10$, $n=10$, $s=8$. 所求检验的假设为

$$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2=10^2,\ H_1:\sigma^2<\sigma_0^2=10^2.$$

因为 μ 未知,所以应选择的统计量为

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1),$$

可求得统计量 χ^2 的观测值为 $\chi^2=5.76$. 查 χ^2 分布表可知 $\chi^2_{1-\alpha}(n-1)=\chi^2_{0.95}(9)=16.919$,即

$$\chi^2=5.76<16.919=\chi^2_{0.95}(9),$$

所以拒绝 H_0.即认为这批手机的发射功率的标准差显著偏小.

8.10.某零件加工厂生产一种零件,根据设计要求,该零件的内径的标准差不得超过

0.30．现从该产品中随机地抽验了 25 件,测得其标准差 $S = 0.36$．问检验结果是否说明产品的标准差明显增大了?($\alpha = 0.05$)

解　由题设知：$\sigma_0 = 0.30$， $n = 35$，$s = 0.36$，$\alpha = 0.05$．所求检验的假设为

$$H_0 : \sigma^2 \le \sigma_0^2 = 0.30^2 ,\ H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 = 0.30^2 .$$

因为 μ 未知,所以应选择的统计量为：

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1) ,$$

可求得统计量 χ^2 的观测值为 $\chi^2 = 34.56$．查 χ^2 分布表可知 $\chi_\alpha^2(n-1) = \chi_{0.05}^2(24)$ $= 36.415$．

因为 $\chi^2 = 34.56 < 36.415 = \chi_{0.05}^2(24)$，所以接受原假设 H_0，即认为在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下该产品的标准差没有明显增大.

8.11.从一个正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 中随机地抽出一个容量为 21 的简单随机样本,得到样本方差为 10,能否根据此结果得出总体方差小于 15 的结论?($\alpha = 0.05$)

解　由题设知: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$\sigma_0^2 = 15$， $n = 21$，$s^2 = 10$，$\alpha = 0.05$．所要求检验的假设为

$$H_0 : \sigma^2 \ge \sigma_0^2 = 15 ,\ H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2 = 15 .$$

因为 μ 未知,所以应选择的统计量为

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1) .$$

可求得统计量 χ^2 的观测值为 $\chi^2 = 13.333$,查 χ^2 分布表可知

$$\chi_{1-\alpha}^2(n-1) = \chi_{0.95}^2(20) = 10.851 .$$

因为 $\chi^2 = 13.333 > 10.851 = \chi_{0.95}^2(20)$，所以接受原假设 H_0，即不能根据此结果得出总体方差小于 15 的结论.

8.12.东风高级中学对其高三年级的学生成绩进行评估,其中的英语成绩服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，现从中随机地抽取了 8 个学生的英语成绩,得到数据如下:

90　88　75　63　85　80　76　92

已知总体均值 $\mu = 80$，问是否可以认为总体方差 $\sigma^2 \ge 8^2$ ($\alpha = 0.05$)?

解　由题设知: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$\mu = 80$， $\sigma_0^2 = 8^2$，$n = 8$，所求检验假设为

$$H_0 : \sigma^2 \ge \sigma_0^2 = 8^2 ,\ H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2 = 8^2$$

因为 μ 已知,所以应选择统计量为

$$\chi^2 = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n) .$$

从而可求得 χ^2 的观测值为 $\chi^2 = 10.359$．查 χ^2 分布表可知 $\chi_{1-\alpha}^2(n) = \chi_{0.95}^2(8) = 2.733$．

又 $\chi^2 = 10.359 > 2.733 = \chi_{0.95}^2(8)$，所以接受原假设 H_0，即认为总体方差 $\sigma^2 \ge 8^2$．

8.13.两台自动机床生产轴承,现从第一台生产的轴承中随机地抽取 50 根,测得平均长度为 20.1㎜,从第二台生产的轴承中随机地抽取 50 根,测得平均长度为 19.8㎜，设两台机床生产的轴承长度各自服从正态分布,方差分别为 1.750(㎜^{2})和 1.375(㎜^{2}),且这两个总体相互独立,试在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下检验两台自动机床生产的轴承长度的均值是否相等?

解　设第一台生产的轴承长度为 X mm,第二台生产的轴承长度为 Y mm．由题意知 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，$n_1 = n_2 = 50$，$\bar{x} = 20.1$， $\bar{y} = 19.8$， $\sigma_1^2 = 1.750$， $\sigma_2^2 = 1.375$．所求检验的假设为 $H_0 : \mu_1 = \mu_2$，$H_1 : \mu_1 \ne \mu_2$．因为 σ_1^2, σ_2^2 已知,所以应选

择的统计量为

$$Z=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1),$$

可求得统计量U的观测值为$u=1.2$,查标准正态分布表可知: $z_{\alpha/2}=z_{0.025}=1.96$. 因为$|z|=1.2<1.96=z_{0.025}$,所以接受原假设$H_0$,即认为在显著性水平$\alpha=0.05$下两台自动机床生产的轴承长度的均值相等.

8.14.为检测煤矿的含灰率,今从甲、乙两处煤矿各随机地抽取样品,分析其含灰率(%)如下:

甲矿: 20.8,21.3,23.7,24.3, 17.4.

乙矿: 16.9,16.7,20.2,18.2.

假定各煤矿含灰率均服从正态分布,且甲矿的方差为 7.505,乙矿的方差为 2.593.试问甲矿的含灰率是否远高于乙矿的含灰率?($\alpha=0.05$)

解 设甲矿含灰率为X,乙矿含灰率为Y,由题意知: $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$, $n_1=5$, $n_2=4$, $\alpha=0.05$, $\overline{x}=21.5$, $\overline{y}=18$, $\sigma_1^2=7.505$, $\sigma_2^2=2.593$. 所求检验的假设为:

$$H_0:\mu_1\leq\mu_2,\ H_1:\mu_1>\mu_2.$$

因为σ_1^2,σ_2^2已知,所以应选择的统计量为

$$Z=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1),$$

再由已知条件可求得统计量Z的观测值为$z=2.3874$,查标准正态分布表可知: $z_\alpha=z_{0.05}=1.645$. 因为

$$z=2.3874>1.645=z_{0.05},$$

所以拒绝原假设H_0,接受备择假设H_1,即认为甲矿含灰率远高于乙矿含灰率.

8.15.一药厂生产一种新的止痛片，厂房希望验证服用新药后至开始起作用的时间间隔较原有止痛片至少缩短一半，因此厂方提出需检验假设

$$H_0:\mu_1\leq 2\mu_2,\quad H_1:\mu_1>2\mu_2,$$

此处μ_1,μ_2分别是服用原有止痛片和服用新止痛片后至起作用的时间间隔的总体的均值. 设两总体均为正.态且方差分别为已知值σ_1^2,σ_2^2，现分别在两总体中取一样$X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$和$Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$，设两个样本独立.试给出上述假设H_0的拒绝域，取显著性水平为α.

解 检验假设$H_0:\mu_1\leq 2\mu_2$，$H_1:\mu_1>2\mu_2$，采用

$$\overline{X}-2\overline{Y}\sim N\left(\mu_1-2\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{4\sigma_2^2}{n_2}\right).$$

在H_0成立下

$$Z=\frac{\overline{X}-2\overline{Y}-(\mu_1-2\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{4\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1).$$

因此，类似于右侧检验，对于给定的$\alpha>0$，则H_0成立时

$$(\mu_1 \le 2\mu_2),\ W = \left\{ \frac{\bar{x} - 2\bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{4\sigma_2^2}{n_2}}} u_\alpha > \right\}.$$

8.16.某灯泡厂在采用一项新工艺的前后,分别抽取 10 个灯泡进行寿命试验.计算得到:采用新工艺前灯泡寿命的样本均值为 2460 小时，标准差为 56 小时;采用新工艺后灯泡寿命的样本均值为 2550 小时，标准差为 48 小时.设灯泡的寿命服从正态分布，且总体方差前后不变，问是否可以认为采用新工艺后灯泡的平均寿命有显著提高?（$\alpha = 0.01$）

解 设新工艺前灯泡的寿命为 X ，新工艺后灯泡的寿命为 Y ，由题设知：$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ， $n_1 = n_2 = 10$ ，$\bar{X} = 2460$ ， $\bar{Y} = 2550$ ，$S_1^2 = 56^2$ ， $S_2^2 = 48^2$.所求检验的假设为

$$H_0 : \mu_1 \ge \mu_2 , H_1 : \mu_1 < \mu_2$$

因为σ_1^2, σ_2^2未知，但$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ，所以应选择的统计量为

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2).$$

其中

$$S_w = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} = 52.15$$

由已知条件可求得统计量 T 的观测值为 $T \approx -3.86$.查 t 分布表可知 $t_\alpha(n_1 + n_2 - 2) = t_{0.01}(18) = 2.55$,又

$$T = -3.86 < -2.55 = -t_{0.01}(18)$$

所以，拒绝原假设H_0 ，接受备择假设H_1 ，即认为采用新工艺后灯泡的平均寿命有显著提高.

8.17.某工厂有两台车床同时生产一种滚珠(滚珠直径服从正态分布).现从中分别随机地抽取 8 个和 9 个产品,其测量数据如下：

甲车床：15.2,14.8,15.0,15.2,14.5，15.1,15.5,14.8.

乙车床：14.8,15.1,15.0,15.2,14.8,15.0,14.8,15.2,15.0,

试比较两台车床生产的滚珠直径的方差是否有明显差异?($\alpha = 0.05$)

解　现用 X, Y 分别表示甲、乙两车床生产的滚珠直径,则有

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) , Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2) , n_1 = 8 , n_2 = 9 , \alpha = 0.05 ,$$

$$\bar{x} = 15.01 , \bar{y} = 14.99 , s_1^2 = 0.096 , s_2^2 = 0.026 .$$

所求检验的假设为

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 , H_1 : \sigma_1^2 \ne \sigma_2^2 .$$

选取统计量$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$,在H_0成立的条件下,有$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$.

查F 分布表可知

$$F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1) = F_{0.025}(7,8) = 4.53 ,$$

$$F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1) = 1 / F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1) = 0.204 ,$$

而$F_0 = s_1^2 / s_2^2 = 3.69$,因为

$$F_{0.975}(7,8) = 0.204 < F_0 = 3.69 < 4.53 = F_{0.025}(7,8) ,$$

故接受原假设 H_0 ,即认为两台车床生产的滚珠直径的方差没有明显差异.

8.18.东风机械厂生产一种机械零件.用老工艺生产的机械零件方差较大,随即地抽查了 25 个,得 $s_1^2 = 6.37$,现改用新工艺生产,也随即地抽查了 25 个零件,得 $s_2^2 = 3.19$,设两种生产过程皆服从正态分布,问新工艺的精度是否比老工艺的精度显著地好?($\alpha = 0.05$)

解　设 X 和 Y 分别表示旧、新工艺生产的机械零件的精度,则有 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, $n_1 = n_2 = 25$, $s_1^2 = 6.37$, $s_2^2 = 3.19$, $\alpha = 0.05$.所求检验的假设为：

$$H_0: \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2 , H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2 .$$

因为 μ_1, μ_2 未知,所以应选择的统计量为

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1) ,$$

可得统计量 F 的观测值为 $F_0 = 1.997$. 查 F 分布表可知

$$F_\alpha(n_1 - 1, n_2 - 1) = F_{0.05}(24,24) = 1.98 .$$

因为 $F_0 = 1.997 > 1.98 = F_{0.05}(24, 24)$,所以拒绝原假设 H_0 ,接受备择假设 H_1 ,即认为新工艺的精度比老工艺的精度显著地好.

8.19. 某医院为比较不同季节出生的新生儿(女)体重的方差,从今年 1 月及 6 月的两个月的新生儿中分别随机地抽取 6 名及 10 名,测得体重如下(单位：g):

1 月　3260, 2960,3520,1960,2560, 3960.

6 月　3060,3220,3760,3220,3080, 3000,2920,2940,3740,3060.

假定新生儿体重服从正态分布,问新生儿体重的方差是否冬季的比夏季的小($\alpha = 0.05$) ?

解　设 X , Y 分别表示冬、夏两季的新生儿体重,则 X 与 Y 相互独立,且 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 又由题设知： $n_1 = 6$, $n_2 = 10$, $\bar{x} = 3036.7$, $\bar{y}$=3200 , $s_1^2 = 505667$, $s_2^2 = 93956$.所求检验的假设为

$$H_0: \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2 , \quad H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2 .$$

因为 μ_1, μ_2 未知,所以应选择统计量

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_2 - 1, n_1 - 1) ,$$

从而可得统计量 F 的观测值为 $F_0 = 5.382$.查 F 分布表可知

$$F_\alpha(n_2 - 1, n_1 - 1) = F_{0.05}(5,9) = 3.48 .$$

因为 $F_0 = 5.382 > 3.48 = F_{0.05}(5,9)$,所以拒绝 H_0 ,即认为新生儿体重的方差冬季不比夏季的小.

8.20. 甲、乙两个射手进行射击比赛,其命中靶纸的环数服从正态分布,现甲、乙各射了 10 枪,测得数据如下：

甲射手: 10.1,7.8,9.7 8.5,9.2,10,9.2,8.7,9.9,10.2.

乙射手: 9.7,8.7,9.9,10.3,9.2,9.1,7.5,9.3,8.9,9.0.

问甲射手命中靶纸的环数的方差是否明显高于乙射手？($\alpha = 0.05$)

解　设甲、乙两射手命中靶纸环数总体分别为 X, Y ,由题设知： $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, $\alpha = 0.05$ $n_1 = 10$, $n_2 = 10$, $\bar{x} = 9.33$, $\bar{y} = 9.16$, $s_1^2 = 0.6357$, $s_2^2 = 0.5804$.所求检验的假设为

$$H_0: \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 , H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2 .$$

因为 μ_1, μ_2 未知,所以应选择统计量

$$F=\frac{S_2^2}{S_1^2}\sim F(n_2-1,n_1-1)\text{，}$$

从而可得统计量 F 的观测值为 $F=0.913$．查 F 分布表可知

$$F_{1-\alpha}(n_2-1,n_1-1)=F_{0.95}(9,9)=1/F_{0.05}(9,9)\approx 0.314\ .$$

因为 $F=0.913>0.314=F_{0.95}(9,9)$，所以接受原假设 H_0，即认为甲射手命中靶纸的环数的方差明显高于乙射手.

8.21.对两批同类电子元件的电阻进行测试，各抽 6 件，测的结果如下（单位：欧姆）

A 批：	0.140	0.138	0.143	0.144	0.141	0.137
B 批：	0.135	0.140	0.142	0.136	0.138	0.141

设这两批元件的电阻分别服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 与 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$，试在 $\alpha=0.05$ 下检验下列假设

（1） H_0：$\sigma_1^2=\sigma_2^2$； （2） H_0：$\mu_1=\mu_2$．

解 （1）设 H_0: $\sigma_1{}^2=\sigma_2{}^2$， H_1: $\sigma_1{}^2\neq\sigma_2{}^2$

由于 μ_1， μ_2， $\sigma_1{}^2$, $\sigma_1{}^2$ 均未知，用 F 检验法检验. 检验统计量为

$$F=\frac{S_1{}^2}{S_2{}^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$$

对给定的 $\alpha=0.05$， $n_1=n_2=6$，查表可确定

$$F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=7.15 \quad F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=\frac{1}{7.15}=0.140$$

检验统计量的观测值为

$$\frac{s_1^2}{s_1^2}=\frac{0.003^2}{0.003^2}=1$$

比较得

$$F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=0.140<\frac{s_1^2}{s_2^2}<F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=7.15$$

由 F 检验法知，应接受原假设，即在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，认为方差相同.

（2）设 H_0: $\mu_1=\mu_2$. H_1: $\mu_1\neq\mu_2$

μ_1， μ_2 和 σ 未知，选用 t 检验法. 选用统计量为

$$t=\frac{|\bar{X}-\bar{Y}|}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)\text{，}$$

其中 $S_w=\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1{}^2+(n_2-1)S_2{}^2}{n_1+n_2-2}}$.

对给定的 $\alpha=0.05$， $n_1=n_2=10$，查表可确定 $t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)=2.101$.

统计量的观测值为

$$\frac{|0.140-0.140|}{s_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}=0<2.101$$

8.22. 根据 t 检验法，应接受原假设. 即在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，认为均值是相等的考察某地区正常成年人每立方毫米血液中的红细胞数．检查正常成年男性 156 名，算得红细胞数的样本均值 $\bar{x}_1=465.13$ （万/mm^3），样本标准差 $s_1=54.80$ （万/mm^3）；检查正常成年女性 74 名，算得红细胞数的样本均值 $\bar{x}_2=422.16$ （万/mm^3）， 样本标准差 $s_2=49.20$ （万

/mm^3）．假定正常成年男性与正常成年女性的红细胞数均服从正态分布，问该地区正常成年人的红细胞平均数是否与性别有关（取$\alpha=0.05$）？

解 设男性的红细胞数为X，$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^{\ 2})$女性的红细胞数为$Y$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^{\ 2})$

(1) 检验假设 H_{01}： $\sigma_1^{\ 2}=\sigma_1^{\ 2}$，$H_{11}$： $\sigma_1^{\ 2}\neq\sigma_1^{\ 2}$

这是F检验问题. 检验统计量为

$$F=\frac{S_1^{\ 2}}{S_2^{\ 2}}\sim F(n_1-1,n_2-1)$$

对给定的$\alpha=0.05$，$n_1=156,\quad n_2=74$，查表可确定

$$F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\approx 1.48\qquad F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=\frac{1}{1.48}=0.676$$

检验统计量的观测值为

$$F=\frac{s_1^2}{s_2^2}=\frac{54.8^2}{49.2^2}=1.241$$

比较得$\dfrac{1}{1.48}<F<1.48$，故接受原假设.

（2）检验假设 H_{02}： $\mu_1=\mu_2$，H_{12}： $\mu_1=\mu_2$

这是t检验法问题. 选用统计量为

$$t=\frac{|\bar{X}-\bar{Y}|}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)\text{，}$$

其中$S_w=\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^{\ 2}+(n_2-1)S_2^{\ 2}}{n_1+n_2-2}}$.

对给定的$\alpha=0.05$，$n_1=156,\quad n_2=74$，查表可确定$t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)=1.906$

统计量的观测值为

$$\frac{|465.13-422.16|}{53.07\times 0.141}=5.736>1.906$$

根据t检验法，应拒绝原假设. 即在显著性水平$\alpha=0.05$下，认为该地区正常成年人的红细胞平均数与性别有关.

8.23.一农场10年前在一鱼塘里按比例20:15:40:25投放了四种鱼：鲑鱼，鲈鱼，竹夹鱼,和鲇鱼的鱼苗．现在在鱼塘里获得一样本如下：

序号	1	2	3	4	
种类	鲑鱼	鲈鱼	竹夹鱼	鲇鱼	
数量(条)	132	100	200	168	$\sum=600$

试取$\alpha=0.05$检验各类鱼数量的比例较10年前是否有显著改变．

解 以X记鱼种类的序号，按题意需检验假设：

H_0:X 的分布律为

X	1	2	3	4
p_i	0.20	0.15	0.40	0.25

所需计算列在下表中．

A_i	f_i	$\hat{p}_i$	$n\hat{p}_i$	$f_i^2/n\hat{p}_i$
A_1	132	0.20	120	145.20
A_2	100	0.15	90	111.11
A_3	200	0.40	240	166.67
A_4	168	0.25	150	188.16
				$\Sigma=611.14$

现在

$$\chi^2=611.14-600=11.14,\ k=4,\ r=0,$$

但 $\chi^2_{0.05}(k-r-1)=\chi^2_{0.05}(3)=7.815<11.14$，故拒绝 H_0，认为各鱼类数量之比较10年前有显著改变.

8.24.在检验某一产品质量时，每次抽取10个产品来检验．共取了100次，得到每10个产品中次品数 X 的频率分布如下

$X=x_i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
频数 m_i	35	40	18	5	1	1	0	0	0	0	0

在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，问生产过程中出现次品的概率 p 是否稳定不变，即次品数 X 是否服从二项分布 $B(10,p)$？

解 设 H_0： $P(x=k)=C_n^{\ k}p^k(1-p)^{n-k}$， $k=0,1,2,\cdots,10$．在原假设成立的前提下，因 $\bar{x}=\dfrac{1}{100}\sum\limits_{i=1}^{10}n_ix_i=1$，从而 $\widehat{p}=0.1$。再由 $\widehat{P}(x=k)=C_n^{\ k}\widehat{p}^k(1-\widehat{p})^{n-k}$ 得

$p(x=0)=(1-\widehat{p})^{10}=0.35$， $p(x=1)=C_{10}^{\ 1}0.1(0.9)^9=0.39$，

$p(x=2)=C_{10}^{\ 2}0.1^2(0.9)^8=0.139$， $p(x=3)=C_{10}^{\ 3}0.1^3(0.9)^7=0.057\ 4$，

$p(x=4)=C_{10}^{\ 4}0.1^4(0.9)^6=0.001\ 12$， $p(x=5)=C_{10}^{\ 5}0.1^5(0.9)^5=0.014\ 9$，

$p(x=6)=0.000\ 138$， $p(x=7)=0.000\ 0875$，

$p(x=8)=0.000\ 003\ 6$， $p(x=9)=0.000\ 000\ 009$，

$p(x=10)=0.000\ 000\ 000\ 1$.

对给定的 $\alpha=0.05$，自由度 $4-1-1=2$，查表可确定 $\chi^2_{\ 0.05}(2)=5.99$。统计量的观测值为

$$\sum_{i=1}^{4}(n_i-np_i)^2/np_i=0.12<5.99$$

故应接受原假设，即在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，认为次品数服从二项分布。

8.25.在某段公路上，观察每15秒内通过的汽车数量．独立观察200次，得到数据如下

车数 x_i	0	1	2	3	4	5	6	≥7
频数 m_i	24	67	58	35	10	4	2	0

问该路段上每15秒内通过的车辆数是否服从泊松分布(取 $\alpha=0.05$)？

解 设

$$H_0:\quad P(x=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad k=0,1,2,\cdots\qquad（其中\lambda未知参数）$$

在原假设成立的前提下，参数 λ 的最大似然估计为

$$\hat{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{360}{200}=1.8$$

再由 $\hat{P}_k=\dfrac{\hat{\lambda}^k}{k!}e^{-\hat{\lambda}}$， $k=0,1,2,\cdots,6$ 得

$$\hat{P}_7=\sum_{k=7}^{+\infty}\frac{\hat{\lambda}^k}{k!}e^{-\hat{\lambda}}=1-\sum_{k=0}^{6}\frac{\hat{\lambda}^k}{k!}e^{-\hat{\lambda}}$$

算得

车数 x_i	0	1	2	3	4	5	6	≥ 7
概率 $\hat{P}_k$	0.165	0.298	0.268	0.161	0.072	0.026	0.008	0.002

将已知频数 m_k 及上面概率 $\hat{p}_k$ 代入统计量 $\hat{\chi}^2$ 得

$$\hat{\chi}^2=\sum_{k=0}^{7}\frac{200}{\hat{p}_k}\left(\frac{m_k}{200}-\hat{p}_k\right)^2=6.099$$

对给定的 $\alpha=0.05$，$l=8,\ m=1$，查表可确定 $\chi^2{}_{\alpha}(l-m-1)=12.592$。显然

$$\hat{\chi}^2=6.099<12.592=\chi^2{}_{\alpha}(l-m-1)$$

故应接受原假设，即在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，认为通过的车辆数服从泊松分布。

第 9 章　回归分析

9.1 在钢丝碳含量对于电阻的效应的研究中，得到以下的数据：

碳含量 x (%)	0.1 0	0.30	0.40	0.55	0.70	0.80	0.95
电阻 y ($\mu\Omega$)	15	18	19	21	22.6	23.8	26

设对于给定的 x, y 为正态变量，且方差与 x 无关．(1)画出散点图；(2) 求线性回归方程 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$；(3) 检验假设 $H_0: b=0,\quad H_1: b\neq 0$；(4) 求 $x=0.50$ 处的置信度为 0.95 的预测区间.

解 (1) 作散点图见图 9-1.

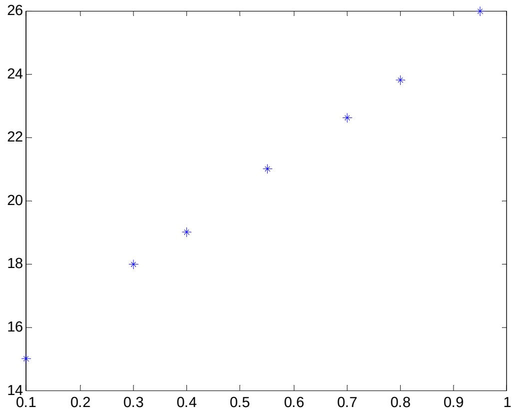


图 9-1

(2) 由所给数据算得

$$L_{xy}=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}=6.6786,$$

$$L_{xx}=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2=0.5321,$$

$$L_{yy}=\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\overline{y}^2=83.8743,$$

$$\overline{x}=0.5429,\ \overline{y}=20.7714,$$

故得

$\hat{b}=L_{xy}\big/L_{xx}=12.5514$，$\hat{a}=\overline{y}-\overline{x}\hat{b}=13.9578$.

于是得回归直线方程为 $\hat{y}=13.9578+12.5514x$.

(3) 检验假设 $H_0: b=0,\quad H_1: b\neq 0$

由所给数据算得

$$Q_e=L_{YY}-\hat{b}L_{xY}=0.0473,\ \hat{\sigma}^2=\frac{Q_e}{n-2}=0.0095.$$

查 t 分布表得 $t_{0.025}(5)=2.5706$，检验假设 $H_0: b=0$ 的拒绝域为

$$|t|=\frac{|\hat{b}|}{\hat{\sigma}}\sqrt{L_{xx}}\geq 2.5706$$

现在 $|t|=93.9349>2.5706$，故拒绝原假设，即认为回归方程是显著的.

(4) y_0 的置信度为 $1-\alpha$ 的预测区间为

$$\left[\hat{y}_0\pm t_{a/2}(n-1)\hat{\sigma}\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\overline{x})^2}{L_{xx}}}\right]$$

由 (1) 得，当 $x=0.50$ 时，$\hat{y}_0=20.2335$.

由所给数据得 $t_{a/2}(n-1)\hat{\sigma}\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\overline{x})^2}{L_{xx}}}=0.2683$，从而 $x=0.50$ 处的置信度为 0.95 的预测区间为 $(20.2335\pm 0.2683)=(19.9652, 20.5018)$.

9.2 下面是回归分析的一个应用. 如果两个变量 x, y 存在着相关关系，其中 y 的值是难以测量的，而 x 的值却是容易测得的. 我们可以根据 x 的测量值利用 y 关于 x 的回归方程去估计 y 的值，表 9-3 列出了 18 个 5~8 岁儿童的重量(这是容易测得的)和体积(这是难以测量的).

表 9-3

重量 x /kg	17.1	10.5	13.8	15.7	11.9	10.4	15.0	16.0	17.8

体积 y /cm^3	16.7	10.4	13.5	15.7	11.6	10.2	14.5	15.8	17.6
重量 x /kg	15.8	15.1	12.1	18.4	17.1	16.7	16.5	15.1	15.1
体积 y /cm^3	15.2	14.8	11.9	18.3	16.7	16.6	15.9	15.1	14.5

设对于给定的 x, y 是正态变量，其方差与 x 无关，(1)画出散点图；(2)求 y 关于 x 的线性回归方程 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$ ；(3)求 $x=14.0$ 时 y 的置信度为 0.95 的预测区间.

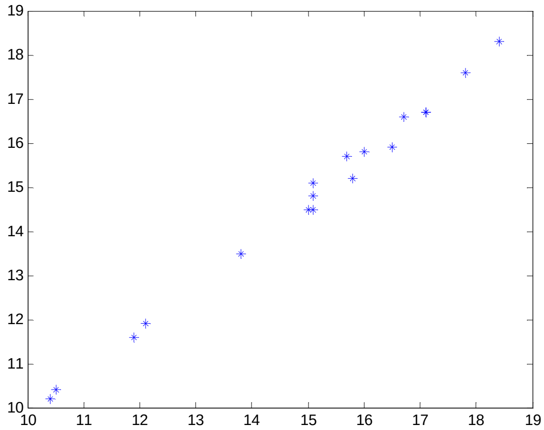


图 9-2

解　(1) 作散点图见图 9-2.

(2) 由所给数据算得

$$L_{xy}=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}=95.2378,$$

$$L_{xx}=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2=96.3894,$$

$$L_{yy}=\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\overline{y}^2=94.7511,$$

$$\overline{x}=15.0056,\ \overline{y}=14.7222,$$

故得

$$\hat{b}=L_{xy}/L_{xx}=0.9881,$$

$$\hat{a}=\overline{y}-\overline{x}\hat{b}=-0.1048.$$

于是得回归直线方程为 $\hat{y}=-0.1048+0.9881x$.

又由

$$Q_e=L_{YY}-\hat{b}L_{xY}=0.6466,\ \hat{\sigma}^2=\frac{Q_e}{n-2}=0.040414.$$

查 t 分布表得 $t_{0.025}(16)=2.1199$，检验假设 $H_0:b=0$ 的拒绝域为

$$|t|=\frac{|\hat{b}|}{\hat{\sigma}}\sqrt{L_{xx}}=48.2558>2.1199$$

故拒绝原假设，即认为回归方程是显著的.

(3) 当 $x_0=14.0$ 时，$\hat{y}_0=-0.1048+0.9881\times14.0=13.7286$，$y_0$ 的置信度为 0.95 的预测区间为 $(\hat{y}\pm t_{0.025}(n-2)\sigma\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\overline{x})^2}{L_{xx}}})=(13.2885,14.1687)$.

9.3 槲寄虫是一种寄生在大树上部树枝上的寄生植物. 它喜欢寄生在年轻的大树上. 表 9-4 给出在一定条件下完成的试验中采集的数据. 以模型 $y=\alpha e^{\beta x}\varepsilon,\ \ln\varepsilon\sim N(0,\sigma^2)$ 拟合数据，其中 $\alpha,\ \beta,\ \sigma^2$ 与 x 无关，试求曲线方程 $\hat{y}=\hat{\alpha}e^{\hat{\beta}x}$.

表 9-4

大树的年龄 x (年)	3	4	9	15	40
每株大树上槲寄虫的株数 y_i	28	10	15	6	1
	33	36	22	14	1
	22	24	10	9	

解　$y=\alpha e^{\beta x}\varepsilon$，则 $\ln y=\ln\alpha+\beta x+\ln\varepsilon$

令 $Z=\ln Y,\ a=\ln\alpha,\ b=\beta,\ x'=x,\ e=\ln\varepsilon$，则上述模型转化为 $Z=a+bx+e$,，则 $a,\ b$ 的最小二乘估计量为

$$\hat{b}=L_{xz}/L_{xx},\ \hat{a}=\overline{Z}-\hat{b}\overline{x}$$

其中 $L_{xz}=\sum_{i=1}^{14}x_iz_i-14\overline{x}\,\overline{z},\ L_{xx}=\sum_{i=1}^{14}x_i^2-14\overline{x}^2$.

由所给数据得 $\sum_{i=1}^{14} x_i z_i = 238,\ \sum_{i=1}^{14} x_i^{\,2} = 4166,\ \overline{x} = 12.3571,\ \overline{z} = 2.4071, L_{xz} = 2028.2$，

$L_{xx} = -178.4$，从而

$$\hat{b} = L_{xz} \big/ L_{xx} = -0.08796,\ \hat{a} = \overline{Z} - \hat{b}\overline{x} \approx 3.4941,\text{故 } \hat{\alpha}=e^{\hat{a}} = 32.9206$$

曲线方程 $\hat{y} = \hat{\alpha} e^{\hat{\beta} x}$ 为 $\hat{y} = 32.9206 e^{-0.08796x}$.

9.4 某化工产品的得率 y 与反应温度 x_1，反应时间 x_2 及其反应浓度 x_3 有关，对于给定的 x_1，x_2，x_3 得率 y 服从正态分布且方差与 x_1，x_2，x_3 无关．今得试验结果如表 9-5 所示，其中 x_1，x_2，x_3 均为二水平且均以编码形式表达.

表 9-5

x_1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
x_2	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
x_3	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
得率	7.6	10.3	9.2	10.2	8.4	11.1	9.8	12.6

(1) 求 y 的多元线性回归方程 $\hat{y} = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 x_1 + \hat{b}_2 x_2 + \hat{b}_3 x_3$；

(2) 若认为反应时间不影响得率，求 y 的多元线性回归方程 $\hat{y} = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 x_1 + \hat{b}_3 x_3$

解（1）设计矩阵

$$\mathbf{X}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},\quad \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix},$$

$$(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1} = \begin{bmatrix} 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/8 \end{bmatrix},\quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 7.6 \\ 10.3 \\ 9.2 \\ 10.2 \\ 8.4 \\ 11.1 \\ 9.8 \\ 12.6 \end{bmatrix}$$

故求得回归系数为

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \end{pmatrix} = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 9.9 \\ 0.575 \\ 0.525 \\ 1.15 \end{bmatrix}$$

故得回归方程为 $\hat{Y} = 9.9 + 0.575x_1 + 0.525x_2 + 1.15x_3$.

（2）若 $\mu(x_1, x_2, x_3) = b_0 + b_1 x_1 + b_3 x_3$，这时设计矩阵为

$$\mathbf{X}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},\quad \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 79.2 \\ 4.6 \\ 9.2 \end{bmatrix},$$

$$(\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{X})^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 \end{bmatrix}$$

故求得回归系数为

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \\ \hat{b}_3 \end{pmatrix} = (\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 9.9 \\ 0.575 \\ 1.15 \end{bmatrix}$$

故得回归方程为 $\hat{Y} = 9.9 + 0.575x_1 + 1.15x_3$.

第 10 章　随机过程的基本知识

1　随机过程 $X(t)=(t^2+1)U$，这里 U 是随机变量，其可能值属于（0，10），在两次试验中得到 U 的值：$u_1=2$, $u_2=3.5$，求相应的样本函数.

解　将 $u_1=2$, $u_2=3.5$ 分别代入 $X(t)=(t^2+1)U$，可得相应的样本函数分别为

$x_1(t)=2(t^2+1)$，$x_2(t)=3.5(t^2+1)$.

2　设随机过程 $X(t)=U\sin t$，其中 U 是随机变量，求在 $t=\frac{\pi}{6}$ 处的状态及 $t=\frac{\pi}{2}$ 处的状态.

解　分别将 $t=\dfrac{\pi}{6}$ 和 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 代入 $X(t)=U\sin t$，可得相应的状态分别为 $\dfrac{U}{2}$ 和 U.

3　利用抛掷一枚骰子的试验定义一随机过程

$$X(t)=\begin{cases} t, & \text{出现6点，} \\ t^2, & \text{不出现6点,} \end{cases} \quad -\infty<t<+\infty.$$

试确定 $X(t)$ 的一维分布函数 $F(x;-1)$，$F(x;2)$ 以及二维分布函数 $F(x_1,x_2;-1,2)$.

解　由于

$$X(-1)=\begin{cases} -1, & \text{出现6点，} \\ 1, & \text{不出现6点,} \end{cases}$$

并且 $P\{X(-1)=-1\}=\dfrac{1}{6}$，$P\{X(-1)=1\}=\dfrac{5}{6}$，于是

$$F(x;-1)=P\{X(-1)\le x\}=\begin{cases} 0, & x<-1 \\ \dfrac{1}{6}, & -1\le x<1 \\ 1, & x\ge 1 \end{cases}；$$

又由于

$$X(2)=\begin{cases} 2, & \text{出现6点，} \\ 4, & \text{不出现6点,} \end{cases}$$

并且 $P\{X(2)=2\}=\dfrac{1}{6}$，$P\{X(2)=4\}=\dfrac{5}{6}$，于是

$$F(x;2)=P\{X(2)\le x\}=\begin{cases} 0, & x<2 \\ \dfrac{1}{6}, & 2\le x<4 \\ 1, & x\ge 4 \end{cases}；$$

又因为随机变量 X(-1)和 X(2)的联合分布律为

X(-1) / X(2)	-1	**1**
2	$\dfrac{1}{6}$	0
4	0	$\dfrac{5}{6}$

所以 $F(x_1,x_2;-1,2)=P\{X(-1)\le x_1, X(2)\le x_2\}$

$$=\begin{cases}0, & x_1<-1,-\infty<x_2<+\infty,\\ 0, & x_1\ge -1, x_2<2\\ \dfrac{1}{6}, & -1\le x_1<1, x_2\ge 2,\\ \dfrac{1}{6}, & x_1\ge 1, 2\le x_2<4,\\ 1, & x_1\ge 1, x_2\ge 4.\end{cases}\quad .$$

4　已知过程 $X(t)=e^{-tU}$,$-\infty<t<+\infty$,其中随机变量 $U\sim N(0,1)$，试求随机过程 $X(t)$ 的均值函数和协方差函数.

解　由假设随机变量 U 的密度函数为 $f(u)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}, u\in R$，于是均值函数

$$\mu_X(t)=E[X(t)]=E(e^{-tU})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-tu}e^{-\frac{u^2}{2}}du$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{2}-tu}du=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{t^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(u+t)^2}{2}}du$$
$$\overset{v=u+t}{=\!=\!=}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{t^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{v^2}{2}}dv=e^{\frac{t^2}{2}},$$

相关函数

$$R_X(t_1,t_2)=E\left[X(t_1)X(t_2)\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}e^{-(t_1+t_2)u}du=e^{\frac{(t_1+t_2)^2}{2}},$$

则协方差函数为

$$C_X(t_1,t_2)=R_X(t_1,t_2)-\mu_X(t_1)\mu_X(t_2)$$
$$=e^{\frac{(t_1+t_2)^2}{2}}-e^{\frac{t_1^2+t_2^2}{2}}=e^{\frac{t_1^2+t_2^2}{2}}(e^{t_1t_2}-1).$$

5　已知随机过程 $X(t)$ 的自相关函数 $R_X(t_1,t_2)$，试求

$$Y(t)=3X(t+1)-2X(t)$$

的自相关函数.

解　所求相关函数

$$R_Y(t_1,t_2)=E\left[Y(t_1)Y(t_2)\right]$$
$$=E\{[3X(t_1+1)-2X(t_1)][3X(t_2+1)-2X(t_2)]\}$$
$$=9E\left[X(t_1+1)X(t_2+1)\right]-6E\left[X(t_1+1)X(t_2)\right]$$
$$-6E\left[X(t_1)X(t_2+1)\right]+4E\left[X(t_1)X(t_2)\right]$$
$$=9R_X(t_1+1,t_2+1)-6R_X(t_1+1,t_2)-6R_X(t_1,t_2+1)+4R_X(t_1,t_2).$$

6　给定随机过程 $\{X(t), t\in T\}$, x 是任意一个实数，定义另一随机过程

$$Y(t)=\begin{cases}1, & X(t)\le x,\\ 0, & X(t)>x,\end{cases}\quad t\in T.$$

试将 $Y(t)$ 的均值函数和自相关函数用随机过程 $X(t)$ 的一维和二维分布函数来表示.

解　$Y(t)$ 的均值函数为

$$\mu_Y(t)=E\left[Y(t)\right]=1\times P\{Y(t)=1\}+0\times P\{Y(t)=0\}$$
$$=P\{X(t)\le x\}=F_X(x;t),$$

因为

$$Y(t_1)Y(t_2)=\begin{cases}1, & X(t_1)\le x_1, X(t_2)\le x_2,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

因此所求 $Y(t)$ 自相关函数为

$$\begin{aligned}R_Y(t_1,t_2)&=E[Y(t_1)Y(t_2)]\\&=1\times P\{Y(t_1)Y(t_2)=1\}+0\times P\{Y(t_1)Y(t_2)=0\}\\&=P\{Y(t_1)=1,Y(t_2)=1\}=P\{X(t_1)\le x_1, X(t_2)\le x_2\}\\&=F_X(x_1,x_2;t_1,t_2).\end{aligned}$$

7　设随机过程 $W(t)=X+tY+t^2Z$，其中 X,Y,Z 是两两不相关的随机变量，且 $E(X)=E(Y)=E(Z)=0$，$D(X)=D(Y)=D(Z)=1$.试求 $W(t)$ 的自协方差函数.

解　均值函数

$$\mu_W(t)=E[W(t)]=E(X)+tE(Y)+t^2E(Z)=0,$$

相关函数

$$\begin{aligned}R_W(t_1,t_2)&=E[W(t_1)W(t_2)]=E[(X+t_1Y+t_1^2Z)(X+t_2Y+t_2^2Z)]\\&=E(X^2)+(t_1+t_2)E(XY)+(t_1^2+t_2^2)E(XZ)+t_1t_2E(Y^2)\\&\quad+(t_1^2t_2+t_1t_2^2)E(YZ)+t_1^2t_2^2E(Z^2)\end{aligned}$$

因为 X,Y 是不相关的随机变量，则它们的相关系数为 0，即协方差为 0，所以

$$E(XY)=E(Y)E(X)=0,$$

同理

$E(ZY)=0$，$E(ZX)=0$，$E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=1=E(Y^2)=E(Z^2)$，所以有：

$$R_W(t_1,t_2)=1+t_1t_2+t_1^2t_2^2,$$

则

$$C_W(t_1,t_2)=R_W(t_1,t_2)-\mu_W(t_1)\mu_W(t_2)=1+t_1t_2+t_1^2t_2^2.$$

8　设 $Z(t)=X+Yt,-\infty<t<\infty$，若已知二维随机变量 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，试求 $Z(t)$ 的协方差函数.

解　　根据已知条件

$$E(X)=\mu_1,E(Y)=\mu_2,D(X)=\sigma_1^2,D(Y)=\sigma_2^2,\rho_{XY}=\rho,$$

则 $Z(t)$ 的均值函数

$$\mu_Z(t)=E[Z(t)]=E(X)+tE(Y)=\mu_1+t\mu_2,$$

协方差函数

$$\begin{aligned}C_Z(t_1,t_2)&=E[(Z(t_1)-\mu_Z(t_1))(Z(t_2)-\mu_Z(t_2))]\\&=E\{[(X-\mu_1)+(Y-\mu_2)t_1][(X-\mu_1)+(Y-\mu_2)t_2]\}\\&=E[(X-\mu_1)^2]+(t_1+t_2)E[(X-\mu_1)(Y-\mu_2)]+t_1t_2E[(Y-\mu_2)^2]\\&=D(X)+(t_1+t_2)Cov(X,Y)+t_1t_2D(Y)\\&=\sigma_1^2+(t_1+t_2)\rho\sigma_1\sigma_2+t_1t_2\sigma_2^2.\end{aligned}$$

9　设 $X(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t$，$t\in T=(-\infty,+\infty)$，其中 A、B 是相互独立，且都服从正态 $N(0,\sigma^2)$ 分布的随机变量，ω 是实常数．试说明 $X(t)$ 是正态过程，并求它的均值函数和自相关函数.

解　由题设，对任意 n 个时刻 $t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$ 和任意一族实数 $u_1,u_2,\cdots,u_n$，和式

$$\sum_{i=1}^n u_iX(t_i)=A\sum_{i=1}^n u_i\cos\omega t_i+B\sum_{i=1}^n u_i\sin\omega t_i$$

是独立正态变量 A、B 的线性组合，故它也是正态变量，且由概率论知识知，$(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n))$ 服从 n 维正态分布，由定义，X(t)是正态过程. 而 X(t)的均值函数和自协方差函数分别为

$$\mu_X(t)=E\left[A\cos\omega t+B\sin\omega t\right]=0$$

$$C_X(t_1,t_2)=E\left[(A\cos\omega t_1+B\sin\omega t_1)(A\cos\omega t_2+B\sin\omega t_2)\right]$$

$$=\sigma^2(\cos\omega t_1\cos\omega t_2+\sin\omega t_1\sin\omega t_2)=\sigma^2\cos\omega(t_1-t_2).$$

10　设在时间区间 $[0,t)$ 内来到图书馆的人数 $N(t)$ 是强度为 λ 的泊松过程，进入图书馆的人借书的概率为 p，不借书的概率为 $1-p$，且他们是否借书是相互独立的. 在时间区间 $[0,t)$ 内进入图书馆并借书的人数记为 $Y(t)$，试证 $\{Y(t),t\ge 0\}$ 是强度为 λp 的泊松过程.

证　(1) 因为到图书馆的人数 $N(t)$ 是强度为 λ 的泊松过程，所以在不相重叠的区间上的增量具有独立性，而借书的人数为 $Y(t)$，所以 $Y(t)$ 在不相重叠的区间上的增量也具有独立性；

(2) 随机过程 $Y(t)$ 的分率为

$$P\left[Y(t)=k\right]=\sum_{n=0}^{\infty}P\left[Y(t)=k\middle|N(t)=n\right]P\left[N(t)=n\right]$$

$$=\sum_{n=k}^{\infty}P\left[Y(t)=k\middle|N(t)=n\right]P\left[N(t)=n\right]$$

$$=\sum_{n=k}^{\infty}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$$

$$=p^k e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}[1+(1-p)\lambda t+\frac{(1-p)^2(\lambda t)^2}{2!}+$$

$$\cdots+\frac{(1-p)^n(\lambda t)^n}{n!}+\cdots]$$

$$=\frac{(\lambda pt)^k}{k!}e^{-\lambda t}e^{(1-p)\lambda t}=\frac{(\lambda pt)^k}{k!}e^{-\lambda pt};$$

(3) 因为 $N(0)=0$，所以 $Y(0)=0$. 所以 $\{Y(t),t\ge 0\}$ 是强度为 λp 的泊松过程.

11　设某公共汽车站从早晨 5 时到晚上 21 时有车出发. 从 5 时到 8 时乘客平均到达率线性增加，5 时乘客平均到达率为 200 人/小时，8 时乘客平均到达率为 1400 人/小时. 从 8 时至 18 时乘客平均到达率不变. 从 18 时至 21 时，乘客平均到达率线性减少，到 21 时乘客平均到达率为 200 人/小时. 假定在不相重叠的时间间隔内到达车站的乘客数相互独立且服从泊松分布. 试求 12 时至 14 时恰有 1200 名乘客到车站的概率与这两小时内平均到车站的乘客数.

解　把早晨早晨 5 时到晚上 21 时平移记作 0 时至 16 时. 依题意，到达公共汽车站的乘客数 $N(t)$ 是非平稳的泊松过程，且强度系数

$$\lambda(t)=\begin{cases}200+400t, & 0\le t<3,\\ 1400, & 3\le t<13,\\ 1400-400(t-13), & 13\le t\le 16.\end{cases}$$

由此可求

$$E[N(9)-N(7)]=\int_7^9\lambda(t)dt=2800$$

于是，由 $N(9)-N(7)\sim\pi(2800)$ 可求得 12 时至 14 时恰有 1200 名乘客到车站的概率为

$$P(N(9)-N(7)=1200)=\frac{2800^{1200}}{1200!}e^{-2800}.$$

这两小时内平均到车站的乘客数

$$E[N(9)-N(7)]=\int_7^9\lambda(t)dt=2800$$

12　设 $\{W(t),t\ge 0\}$ 是参数为 σ^2 的维纳过程. 记随机过程 $X(t)=W(t+2)-W(t)$，试求

$R_X(1,4)$，$R_X(1,2)$

解　均值函数 $\mu_W(t)=0$，$R_W(s,t)=C_W(s,t)=\sigma^2\min(s,t)$.

$$
\begin{aligned}
R_X(s,t)=E[X(s)X(t)]&=E\{[W(s+2)-W(s)][W(t+2)-W(t)]\}\\
&=E[W(s+2)W(t+2)]-E[W(s)W(t+2)]\\
&\quad-E[W(s+2)W(t)]+E[W(s)W(t)]\\
&=R_W(s+2,t+2)-R_W(s,t+2)-R_W(s+2,t)+R_W(s,t)\\
&=\sigma^2(\min(s+2,t+2)-\min(s,t+2)-\min(s+2,t)+\min(s,t)),
\end{aligned}
$$

则

$$R_X(1,4)=\sigma^2(\min(3,6)-\min(1,6)-\min(3,4)+\min(1,4))=0,$$

$$R_X(1,2)=\sigma^2(\min(3,4)-\min(1,4)-\min(3,2)+\min(1,2))=\sigma^2.$$

13　设 $\{W(t),t\ge 0\}$ 是以 σ^2 为参数的维纳过程，求下列过程的协方差函数：

(1) $W(t)+At$,（A 为常数）;

(2) $W(t)+Xt, X$ 为与 $\{W(t),t\ge 0\}$ 相互独立的标准正态随机变量；

(3) $aW(t/a^2), a$ 为正常数.

解　均值函数 $\mu_W(t)=0$，$R_W(s,t)=C_W(s,t)=\sigma^2\min(s,t)$。

（1）设 $X(t)=W(t)+At$,，则

$$\mu_X(t)=E[X(t)]=E[W(t)]+At=At,$$

$$C_X(s,t)=E\{[X(s)-\mu_X(s)][X(t)-\mu_X(t)]\}=E[W(s)W(t)]=R_W(s,t)=\sigma^2\min(s,t);$$

（2）设 $Y(t)=W(t)+Xt$,，则

$$\mu_Y(t)=E[Y(t)]=E[W(t)]+tE(X)=0,$$

$$
\begin{aligned}
C_Y(s,t)=E\{[Y(s)-\mu_Y(s)][Y(t)-\mu_Y(t)]\}&=E\{[W(s)+Xs][W(t)+Xt]\}\\
&=E[W(s)W(t)]+sE[XW(t)]+tE[XW(s)]+stE(X^2)\\
&=R_W(s,t)+sE(X)E[W(t)]+tE(X)E[W(s)]+stE(X^2)\\
&=\sigma^2\min(s,t)+st;
\end{aligned}
$$

（3）设 $Z(t)=aW(t/a^2)$，则 $\mu_Z(t)=E[Z(t)]=0$，

$$
\begin{aligned}
C_Z(s,t)&=E\{[Z(s)-\mu_Z(s)][Z(t)-\mu_Z(t)]\}\\
&=a^2E\left[W(\frac{s}{a^2})W(\frac{t}{a^2})\right]=a^2R_W(\frac{s}{a^2},\frac{t}{a^2})\\
&=\sigma^2\min(s,t).
\end{aligned}
$$

第 11 章　马尔可夫链

11.1.从数 1，2，3，4，5，6 的六个数字中等可能地取出一数，去后还原，如此不断地连续取下去，如在前 n 次中所取得的最大数 j，则称质点在第 n 步时的位置在状态 j，试问（1）这样的质点运动是否构成马尔可夫链？是否是齐次的？（2）写出他的一部转移概率矩阵.

解　（1）设 X_n 为质点第 n 步时的状态，则 $\{X(n), n\geq 1\}$ 为一随机过程，其状态空间 $I=\{1,2,3,4,5,6\}$．易见 $X_1\leq X_2\leq\cdots$，且 X_n 的值由 X_{n-1} 与第 n 次取的数确定，而与 X_1，$X_2,\cdots$，X_{n-2} 无关，即

$$\begin{aligned}&P\{X_n=i_n \mid X_{n-1}=i_{n-1},\cdots, X_1=i_1\}\\&=P\{X_n=i_n \mid X_{n-1}=i_{n-1}\}\end{aligned}$$

所以这样的质点运动构成马尔可夫链，而且是齐次的，因为：

$$p_{i,j}(n)=P\{X_{m+n}=a_j \mid X_m=a_i\}$$

（2）当 $i<j$ 时，$p_{ij}=\dfrac{1}{6}$；当 $i=j$ 时，$p_{ij}=\dfrac{i}{6}$；当 $i>j$ 时，$p_{ij}=0$．所以它的一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix}\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\\0&\frac{2}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\\0&0&\frac{3}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\\0&0&0&\frac{4}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\\0&0&0&0&\frac{5}{6}&\frac{1}{6}\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

11.2　设坛子中有 r 只红球，t 只白球，每次从袋中任取一只球，观察其颜色后放回，并再次放入 a 只与所取的那只球同色的球，如此不断地取放，令 $X(n)=i$ 表示在第 n 次取放后坛子有 i 只红球，试问 $\{X(n), n\geq 1\}$ 是否为齐次马尔可夫链？为什么？

解　注意到 $X(n+1)=j$，即第 $n+1$ 次取放后坛子中有 j 只红球，只与第 n 次取放后坛子中的红球输有关，也就是仅与 $X(n)=i$ 有关，而与以前若干次取方无关，即 $\{X(n), n\geq 1\}$ 是马尔可夫链，但注意 $X(n)=i$ 时 $X(n+1)=j$ 的条件概率为：

$$p_{ij}(n)=P\{X(n+1)=j \mid X(n)=i\}=\begin{cases}\dfrac{i}{r+t+na}, & j=i+a,\\ 1-\dfrac{i}{r+t+na}, & j=i.\end{cases}$$

显然，转移概率 $p_{ij}(n)$ 与绝对时间 n 有关，因而 $X(n)$ 不是齐次的，即此链 $\{X(n), n\geq 1\}$ 是非齐次马尔可夫链.

11.3　一个质点在圆周上作随机游动，圆周上共有 N 格，质点以概率 p 顺时针游动一格，以概率 $q=1-p$ 逆时针游动一格. 试用马氏链描述游动过程，并确定状态空间及一步转移概率矩阵.

解　设质点顺时针游动一格记为 1，逆时针游动一格记为 -1，设 $X_0=1, X_1, X_2,\cdots, X_n,\cdots$ 是相互

独立且都以概率 $p(0<p<1)$ 取值 1，以概率 $q=1-p$ 取值 -1 的随机变量序列．则 $S_n=\sum_{k=0}^{n}X_k$ 为质点 n 时刻所处的位置，S_n 的状态空间 $I=\{1,2,\cdots,N\}$（当 $|S_n|>N$ 时，令 S_n 为 S_n 除以 N 的余数）．对任意 $n>1,i_1,i_2,\cdots,i_n\in I$，有

$$\begin{aligned}&P\{S_n=i_n\mid S_{n-1}=i_{n-1},\cdots,\ S_1=i_1\}\\&=P\{X_n=i_n-i_{n-1}\}\\&=P\{X_n=i_n\mid X_{n-1}=i_{n-1}\}\end{aligned}$$

故 $\{S_n,n\ge1\}$ 是一个马氏链，且由

$$P\{X_n=-1\}=1-p,P\{X_n=1\}=p$$

马氏链 $\{S_n,n\ge1\}$ 的一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}0&p&0&0&\cdots&0&0&q\\q&0&p&0&\cdots&0&0&0\\0&q&0&p&\cdots&0&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots&\vdots\\p&0&0&0&\cdots&0&q&0\end{pmatrix}_{N\times N}.$$

11.4　设一随机系统状态空间 $I=\{1,2,3,4\}$，记录观测系统所处状态空间：4，2，3，1，4，3，1，1，2，3，2，1，2，3，4，4，3，3，1，1，1，3，3，2，1，2，2，4，4，4，2，3，3，2，1，1，2，3，4，1. 若该系统可用马氏链描述，描述其转移概率矩阵.

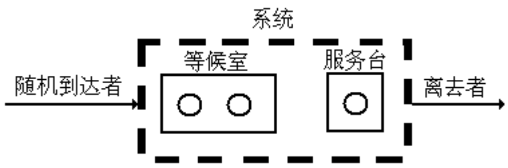
解　设 X_n 为第 $n(1,2,\cdots,40)$ 个时段系统所处的状态，它是一个齐次马氏链，状态空间 $I=\{1,2,3,4\}$．39 次状态转移的情况是：

$1\to1$	4次	$1\to2$	4次	$1\to3$	1次	$1\to4$	1次
$2\to1$	3次	$2\to2$	1次	$2\to3$	5次	$2\to4$	1次
$3\to1$	3次	$3\to2$	3次	$3\to3$	3次	$3\to4$	2次
$4\to1$	1次	$4\to2$	2次	$4\to3$	2次	$4\to4$	3次

因此，一步转移概率矩阵可用频率近似地表示为：

$$P=\begin{pmatrix}\frac{4}{10}&\frac{4}{10}&\frac{1}{10}&\frac{1}{10}\\\frac{3}{10}&\frac{1}{10}&\frac{5}{10}&\frac{1}{10}\\\frac{3}{11}&\frac{3}{11}&\frac{3}{11}&\frac{2}{11}\\\frac{1}{8}&\frac{2}{8}&\frac{2}{8}&\frac{3}{8}\end{pmatrix}.$$

11.5　设服务系统由一个服务员和只可以容纳两个人的等候室依次排队．假定一个需要服务的顾客到达系统时发现系统内已有 3 个顾客（一个正在接受服务，两个在等候室排队），则该顾客即离去．设时间间隔 Δt 内将有一个顾客进入系统的概率为 q，有一原来被服务的顾客离开系统（即服务完毕）的概率为 p．又设当 Δt 充分小时，在这时间间隔内多于一个顾客进入或离开系统实际上是不可能的．再设有无顾客来到与服务是否完毕是相互独立的．试用马氏链描述这个服务系统，并求其一步转移概率矩阵．



第 5 题图

解　设 $X_n=X(n\Delta t)$ 表示时刻 $n\Delta t$ 时系统内顾客数，即系统的状态。$\{X_n,\ n=0,1,2,\cdots\}$ 是一随机过程，状态空间 I=$\{0,1,2,3\}$，而且仿照例 1、例 2 的分析，可知它是一个齐次马氏链．下面

来计算此马氏链的一步转移概率．

P_{00}—在系统内没有顾客的条件下，经 Δt 后仍没有顾客的概率（此处是条件概率，以下同），$p_{00}=1-q$.

p_{01}—系统内没有顾客的条件下，经 Δt 后有一顾客进入系统的概率，$p_{01}=q$.

p_{10}—系统内恰有一顾客正在接受服务的条件下，经 Δt 后系统内无人的概率，它等于在 Δt 间隔内顾客因服务完毕而离去，且无人进入系统的概率，$p_{10}=p(1-q)$．—

p_{11}—系统内恰有一顾客的条件下，在 Δt 间隔内，他因服务完毕而离去，而另一顾客进入系统，或者正在接受服务的顾客将继续要求服务，且无人进入系统的概率，

$$p_{11}=pq+(1-p)(1-q).$$

p_{12}—正在接受服务的顾客继续要求服务，且另一顾客进入系统的概率，$p_{12}=q(1-p)$．

p_{13}—正在接受服务的顾客继续要求服务，且在 Δt 间隔内有两个顾客进入系统的概率。由假设，后者实际上是不可能发生的，$p_{13}=0$．类似地，有

$$p_{21}=p_{32}=p(1-q),\ p_{22}=pq+(1-p)(1-q),\ p_{23}=q(1-p),\ p_{ij}=0,\ (|i-j|\geq 2).$$

p_{33}—或者一人将离去且另一人进入系统，或者无人离开系统的概率，

$$p_{33}=pq+(1-p).$$

于是该马氏链的一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} (1-q) & q & 0 & 0 \\ p(1-q) & pq+(1-p)(1-q) & q(1-p) & 0 \\ 0 & p(1-q) & pq+(1-p)(1-q) & q(1-p) \\ 0 & 0 & p(1-q) & pq+(1-p) \end{pmatrix}.$$

11.6　设任意相继的两天中，雨天转晴天的概率为 $\frac{1}{3}$，晴天转雨天的概率为 $\frac{1}{2}$，任一天晴或雨是互为逆事件．以 0 表示晴天状态，以 1 表示雨天状态，X_n 表示第 n 天的状态（0 或 1）．

(1) 写出马氏链 $\{X_n, n\geq 1\}$ 的一步转移概率矩阵．

(2) 若已知 5 月 1 日为晴天，试问 5 月 3 日为晴天，且 5 月 5 日为雨天的概率等于多少？

(3) 试求今天为晴天，而第四天（明天算第一天）为雨天的概率.

解 (1) X_n 的状态空间 $I=\{1,0\}$，由题意知

$$p_{ij}=P\{X_n=j\mid X_{n-1}=i\}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & i=0,\ j=0, \\ \dfrac{1}{2}, & i=0,\ j=1, \\ \dfrac{1}{3}, & i=1,\ j=0, \\ \dfrac{2}{3}, & i=1,\ j=1.\end{cases}$$

从而一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3}\end{bmatrix}$$

(2) 因为

$$P^2=\begin{bmatrix}\frac{5}{12} & \frac{7}{12}\\ \frac{7}{18} & \frac{11}{18}\end{bmatrix},$$

所以已知 5 月 1 日为晴天，5 月 3 日为晴天的概率为 $p_{00}(2)=\frac{5}{12}$；已知 5 月 3 日为晴天，5 月 5 日为雨天的概率等于 $p_{01}(2)=\frac{7}{12}$，已知 5 月 1 日为晴天，5 月 3 日为晴天，且 5 月 5 日为雨天的概率

$$\begin{aligned}&P\left\{X_3=0,\ X_5=1\mid X_1=0\right\}=P\left\{X_3=0\mid X_1=0\right\}P\left\{X_5=1\mid X_3=0,\ X_1=0\right\}\\&=P\left\{X_3=0\mid X_1=0\right\}P\left\{X_5=1\mid X_3=0\right\}\\&=p_{00}(2)p_{01}(2)=\frac{5}{12}\cdot\frac{7}{12}=\frac{35}{144}\end{aligned}$$

(3) 因为

$$P^4=\begin{bmatrix}\frac{173}{432} & \frac{259}{432}\\ \frac{259}{648} & \frac{389}{648}\end{bmatrix},$$

所以今天为晴天，而第四天为雨天的概率为：$p_{01}(4)=\frac{259}{432}$.

11.7　甲乙两人进行某种比赛，在每局比赛中甲获胜的概率为 p，乙获胜的概率为 q，平局的概率为 r，$p+q+r=1$.设每局比赛后，胜者得 1 分，负者得 -1 分，平局得 0 分. 当两人中有一人得到 2 分时比赛结束. $X_n, n\ge 1$ 表示比赛至第 n 局时甲获得的分数，则 $X_n, n\ge 1$ 是齐次马氏链.

(1) 写出状态空间；

(2) 求 2 步转移概率矩阵；

(3) 如果在甲获得 1 分的条件下，试求最多再赛 2 局可以结束比赛的概率.

解 (1) 状态空间 $I=\{-2,\ \ -1,\ \ 0,\ \ 1,\ \ 2\}$；.

(2) 显然转移概率矩阵 $P=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\ q&r&p&0&0\\ 0&q&r&p&0\\ 0&0&q&r&p\\ 0&0&0&0&1\end{pmatrix}$,

$$P^2=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\ q+rp&r^2+pq&2pr&p^2&0\\ q^2&2rq&r^2+2pq&2pr&p^2\\ 0&q^2&2qr&r^2+pq&p+pr\\ 0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

(3) 经二局结束比赛包括两种情形：甲得 1 分经二步转移至 2 分而结束比赛，或甲得 1 分经两步转移至的－2 分（乙得 2 分）而结束比赛．因此，有甲获得 1 分的条件下，最多再赛 2 局可以结束比赛的概率：

$$p=p_{45}+p_{41}=(p+rp)+0=p(1+r).$$

11.8　在一计算机系统中，每一循环具有误差的概率取决于先前一个循环是否有误差．以 0 表示误差状态，以 1 表示无误差状态．设状态的一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1 & 2/3 & 1/2 \end{array}$$

试说明相应齐次马氏链是遍历的，并求其极限分布（平稳分布）：(1) 用定义解；(2) 利用遍历性定理解.

解 （1）为了求 P^n，先把 P 相似对角化，即令

$$\lambda I-P=\begin{vmatrix}\lambda-\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \lambda-\frac{1}{3}\end{vmatrix}=0$$

得 $3\lambda^2-2\lambda-1=0$，故 $\lambda_1=1, \lambda_2=-\frac{1}{3}$. 则

对于 $\lambda_1=1$，由 $Pe_1=\lambda_1 e_1$，得对应的特征向量为 $e_1=(1,\ 1)^T$，单位化，得 $e_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$.

对 于 $\lambda_2=-\frac{1}{3}$ ， 由 $Pe_2=\lambda_2 e_2$ ， 得 对 应 的 特 征 向 量 为 $e_1=(1,\ -1)^T$ ， 单 位 化 ， 得 $e_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$.

于是有对角阵 $U=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，使得

$$U^TPU=\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\end{pmatrix},$$

所以

$$P^n=U\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{3})^n\end{pmatrix}U^T=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(-\frac{1}{3})^n & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(-\frac{1}{3})^n \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(-\frac{1}{3})^n & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(-\frac{1}{3})^n\end{pmatrix}$$

故相应齐次马氏链是遍历的，其极限分布（平稳分布）为：

$$\pi=\left(\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2}\right)$$

（2）根据遍历性定理，对 $m=1$，有

$$P_{ij}(1)>0,\quad i,\ j=0,1.$$

因此此马氏链是遍历的，且有极限分布 $\pi=(\pi_1,\quad \pi_2)$，满足方程组 $\pi=\pi P$，即

$$\begin{cases}\frac{1}{3}\pi_1+\frac{2}{3}\pi_2=\pi_1 \\ \frac{2}{3}\pi_1+\frac{1}{3}\pi_2=\pi \\ \pi_1+\pi_2=1\end{cases}$$

解之得 $\pi_1=\dfrac{1}{2}, \pi_2=\dfrac{1}{2}$.

11.9 设齐次马氏链 $\{X(n), n\ge 1\}$ 的状态空间 $I=\{0,1,2\}$，一步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1/2 & 1/3 & 1/6\\ 1/3 & 2/3 & 0\\ 0 & 1/2 & 1/2\end{bmatrix}$$

它的初始状态的概率分布为

$$P\{X(0)=0\}=\frac{1}{6}, P\{X(0)=1\}=\frac{2}{3}, P\{X(0)=2\}=\frac{1}{6},$$

试求概率 $P\{X(0)=1, X(1)=0, X(2)=2\}$ 及极限分布.

解 （1） $P\{X(0)=1, X(1)=0, X(2)=2\}$

$=P\{X(0)=1\}P\{X(1)=0 \mid X(0)=1\}P\{X(2)=2 \mid X(1)=0\}$

$=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{27}$.

（2）因为

$$P(2)=P^2=\begin{pmatrix}\frac{13}{36} & \frac{17}{36} & \frac{1}{6}\\ \frac{7}{18} & \frac{5}{9} & \frac{1}{18}\\ \frac{1}{6} & \frac{7}{12} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

无零元，由遍历性定理知此齐次马氏链是遍历的，具有极限分布 $\pi=(\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3)$，满足

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\pi_1+\frac{1}{3}\pi_2=\pi_1\\ \frac{1}{3}\pi_1+\frac{2}{3}\pi_2+\frac{1}{2}\pi_3=\pi_2\\ \frac{1}{6}\pi_1+\frac{1}{2}\pi_3=\pi_3\\ \pi_1+\pi_2+\pi_3=1\end{cases}$$

解之得

$$\pi_1=\frac{6}{17},\quad \pi_2=\frac{9}{17},\quad \pi_3=\frac{2}{17}.$$

11.10 设齐次马氏链的一步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}q & p & 0\\ q & 0 & p\\ 0 & q & p\end{bmatrix}, q=1-p, 0<p<1.$$

试证明此链具有遍历性，并求其平稳分布.

解 因为 $m=2$，有

$$P(2)=P^2=\begin{bmatrix}q & p & 0\\ q & 0 & p\\ 0 & q & p\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q & p & 0\\ q & 0 & p\\ 0 & q & p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}q^2+pq & pq & p^2\\ q^2 & pq & p^2\\ q^2 & pq & pq+p^2\end{bmatrix},$$

因为 $p_{ij}(2)>0, i, j=1,2,3$. 所以由遍历性定理知此齐次马氏链是遍历的，具有极限分布 $\pi=(\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3)$，满足

$$\begin{cases} q\pi_1 + q\pi_2 = \pi_1 \\ p\pi_1 + q\pi_3 = \pi_2 \\ p\pi_2 + p\pi_3 = \pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

解之得

$$\pi_1 = \frac{q^2}{p^2+q}, \quad \pi_2 = \frac{pq}{p^2+q}, \quad \pi_3 = \frac{p^2}{p^2+q}.$$

11.11　设马氏链的一步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

试证明此链不是遍历的.

解 由第八题，$P^n \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad n \to \infty$

所以此马氏链不是遍历的.

11.12　某金融机构为保证现金充分支付,设立一笔总额$540 万的基金,分开放置在位于 A 城和 B 城的两个公司,基金在平时可以使用,但每周末结算时必须确保总额仍为$540 万.经过相当一段时期业务情况,发现每过一周,各公司的支付基金在流通过程中多数还是留在自己公司内,而 A 城公司有 10%支付基金流动到 B 城公司，B 城公司则有 12%支付基金流动到 A 城公司.此时,A 城公司基金额为$260 万,B 城公司基金额$280 万.按此规律,两公司支付基金数额变化趋势如何?如果金融专家认为每个公司的支付基金不能少于$220 万,那么是否在什么时间需要将基金作专门调动来避免这种情形?

解 不需要，因为：由题意，A 城和 B 城的两个公司的支付基金的转移概率矩阵为：

$$P = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.12 & 0.88 \end{pmatrix}.$$

根据遍历性定理，对 $m=1$，有

$$P_{ij}(1) > 0, \quad i,\ j = A,\ B.$$

因此马氏链是遍历的，且有极限分布 $\pi = (\pi_1,\ \ \pi_2)$，满足方程组 $\pi = \pi P$，即

$$\begin{cases} 0.9\pi_1 + 0.12\pi_2 = \pi_1 \\ 0.1\pi_1 + 0.88\pi_2 = \pi_2 \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

解之得 $\pi_1 = \dfrac{6}{11}, \pi_2 = \dfrac{5}{11}$. 所以 A 城和 B 城两个公司的支付基金的稳定状态转移概率矩阵为：

$$P = \begin{pmatrix} \frac{6}{11} & \frac{5}{11} \\ \frac{6}{11} & \frac{5}{11} \end{pmatrix}.$$

所以最终 A 城公司基金额为：$260 \cdot \dfrac{6}{11} + 280 \cdot \dfrac{5}{11} \approx 269 > 220$（单位为万）,B 城公司基金额

$260\cdot\frac{5}{11}+280\cdot\frac{6}{11}\approx 271>220$（单位万）. 故不需要将基金作专门调动.

11.13　公司 A、B、C 是某地区三家主要灭虫机厂商. 根据以往资料得知，公司 A、B、C 产品的市场占有率分别为 50%、30%、20%. 由于 C 公司实行了改善销售与服务方针的经营管理策略，使其产品销售额逐期稳定上升，而 A 公司却下降. 通过市场调查发现三公司间的顾客流动情况如下表所示.

三公司间的顾客流动情况

公司	周期 0 的顾客数	周期 1 的供应公司		
		A	B	C
A	5000	3500	500	1000
B	3000	300	2400	300
C	2000	100	100	1800
周期 2 的顾客数	10000	3900	3000	3100

其中产品销售周期是季度，现在的问题是按目前的趋势发展下去，A 公司的产品销售各或客户转移的影响严重到什么程度？更全面的，三公司的产品市场占有率将如何变化?

解　公司 A、B、C 的顾客转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}0.7 & 0.1 & 0.2\\ 0.1 & 0.8 & 0.1\\ 0.05 & 0.05 & 0.9\end{pmatrix},$$

设极限分布 $\pi=(\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3)$，满足

$$\begin{cases}0.7\pi_1+0.1\pi_2+0.05\pi_3=\pi_1\\ 0.1\pi_1+0.8\pi_2+0.05\pi_3=\pi_2\\ 0.2\pi_1+0.1\pi_2+0.9\pi_3=\pi_3\\ \pi_1+\pi_2+\pi_3=1\end{cases}$$

解之得

$$\pi_1=0.1765,\quad \pi_2=0.2353,\quad \pi_3=0.5882\,.$$

故 A、B 公司市场占有率逐期下降，C 公司市场占有率逐期上升．A、B、C 公司市场占有率最终分别达到 17.65%、23.53%、58.52%．

第 12 章　平稳随机过程

12.1　设随机序列$\{X(t)=\sin Ut, t\in T\}$，其中$T=\{0,1,2,3,\cdots\}, U\sim U(0,2\pi)$，试讨论此随机序列的平稳性.

解　根据已知条件随机变量U的密度函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}, & 0<x<2\pi;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

又因为

$$E[X^2(t)]=E[(\sin Ut)^2]=\int_0^{2\pi}(\sin ut)^2\cdot\frac{1}{2\pi}du<1;$$

$$E[X(t)]=E[\sin Ut]=\int_0^{2\pi}\sin ut\cdot\frac{1}{2\pi}du=\frac{1}{2\pi t}(1-\cos 2\pi t);$$

$$\begin{aligned}R_X(t,t+\tau)&=E[X(t)X(t+\tau)]\\&=\int_0^{2\pi}\sin ut\cdot\sin u(t+\tau)\cdot\frac{1}{2\pi}du\\&=-\frac{1}{4\pi}[\frac{\sin 2(2t+\tau)\pi}{2t+\tau}-\frac{\sin 2\pi\tau}{\tau}].\end{aligned}$$

所以随机序列$X(t)$是宽平稳的随机过程.

12.2　设随机过程$X(t)=X(0)(-1)^{N(t)}$，其中

$$P\{X(0)=-2\}=P\{X(0)=2\}=\frac{1}{2},$$

$\{N(t),t\geq 0\}$是强度为λ的泊松过程，且$N(t)$与$X(0)$相互独立，试讨论随机过程$\{X(t),t\geq 0\}$的平稳性.

解　由题设$P\{X(0)=-2\}=P\{X(0)=2\}=\dfrac{1}{2}$. 那么

$$E[X^2(t)]=E[X^2(0)]=2^2\times\frac{1}{2}+(-2)^2\times\frac{1}{2}=4<+\infty\ ;$$

$$E[X(t)]=E[X(0)]=2\times\frac{1}{2}+(-2)\times\frac{1}{2}=0$$

现在来计算$E[X(t)X(t+\tau)]$.

先设$\tau>0$,我们注意,如果$X(t)$在$(t,t+\tau)$内变号偶数次,则$X(t)$和$X(t+\tau)$必同号且乘积为2^2;如果变号奇数次,则乘积为-2^2.因为事件$\{X(t)X(t+\tau)=2^2\}$的概率为

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}P(X(t)X(t+\tau)=4)&=\sum_{k=0}^{\infty}P(N(t+\tau)-N(t)=2k)\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda\tau)^{2k}}{(2k)!}e^{-\lambda k}.\end{aligned}$$

而事件$\{X(t)X(t+\tau)=-4\}$的概率为

$$\sum_{k=0}^{\infty}P(X(t)X(t+\tau)=-4)=\sum_{k=0}^{\infty}P(N(t+\tau)-N(t)=2k+1)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda\tau)^{2k}}{(2k+1)!}e^{-\lambda k}\ .$$

于是

$$E[X(t)X(t+\tau)]=4(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda\tau)^{2k}}{(2k)!}e^{-\lambda\tau}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda\tau)^{2k+1}}{(2k+1)!}e^{-\lambda\tau})=4e^{-2\lambda\tau}$$

注意,上述结果与 t 无关,故若 $\tau<0$ 时,只需令 $t'=t+\tau\quad\tau$,则有

$$E[X(t)X(t+\tau)]=E[X(t')X(t'-\tau)]=4^2e^{-2\lambda\tau}.$$

故这一过程的自相关函数为

$$R_X(\tau)=E[X(t)X(t+\tau)]=4e^{-2\lambda|\tau|}\ ,$$

它只与 τ 有关.因此随机过程 $X(t)$ 是一平稳过程.

12.3　设 $\{N(t),t\geq 0\}$ 是强度为 λ 的泊松过程，试讨论随机过程 $N(t+1)-N(t),\ t\geq 0$ 的平稳性.

解　令 $Y(t)=N(t+1)-N(t)$ ，由于

$$\begin{aligned}E[Y(t)]&=E[N(t+1)-N(t)]=E[N(t+1)-N(t)]\\&=\lambda(t+1)-\lambda t=\lambda\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E[Y^2(t)]&=E[(N(t+1)-N(t))^2]\\&=E[N^2(t+1)+N^2(t)-2N(t+1)N(t)]\\&=R_N(0)+R_N(0)-2R_N(1)\\&=[\lambda^2(t+1)^2+\lambda(t+1)]+[\lambda^2t^2+\lambda t]-2[\lambda^2(t+1)t+\lambda t]\\&=\lambda^2+\lambda<+\infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_Y(t_1,t_2)&=E\{[N(t_1+1)-N(t_1)][N(t_2+1)-N(t_2)]\}\\&=E[N(t_1+1)N(t_2+1)]-E[N(t_1+1)N(t_2)]\\&\quad-E[N(t_1)N(t_2+1)]+E[N(t_1)N(t_2)]\\&=\lambda^2(t_1+1)(t_2+1)+\lambda\min\{t_1+1,t_2+1\}-\lambda^2(t_1+1)(t_2)\\&\quad-\lambda\min\{t_1+1,t_2\}-\lambda^2(t_1)(t_2+1)-\lambda\min\{t_1,t_2+1\}\\&\quad+\lambda^2(t_1t_2)+\lambda\min\{t_1,t_2\}\\&=\lambda^2+\lambda\min\{t_1+1,t_2+1\}-\lambda\min\{t_1+1,t_2\}\\&\quad-\lambda\min\{t_1,t_2+1\}+\lambda\min\{t_1,t_2\}\\&=\begin{cases}\lambda^2+\lambda(1-|\tau|), & |\tau|\leq 1,\\ \lambda^2, & |\tau|>1.\end{cases}\qquad \tau=t_2-t_1.\end{aligned}$$

所以，随机过程 $N(t+1)-N(t)$ 是平稳过程.

12.4　设 $X(t)$ 是平稳过程，$Y=X(t_0)$ 是随机变量，问 $Z(t)=X(t)+Y$ 是否仍然是平稳过程？

解　因 $\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$ 是一个平稳过程，故有

$$E[X(t)]=\mu_X\ ,\ \ R_X(t,t+\tau)=R_X(\tau)$$

即 $E[X(t)]$ ，$R_X(t,t+\tau)$ 是与 t 无关的常数.

又因为

$$E[Z(t)]=E[X(t)]+E[X(t_0)]=2\mu_X$$

$$\begin{aligned}R_Y(t,t+\tau)&=E\{[X(t_0)+X(t)][X(t+\tau)+X(t_0)]\}\\&=E[X(t)X(t+\tau)]+E[X(t_0)X(t+\tau)]+E[X(t)X(t_0)]+E[X(t_0)X(t_0)]\\&=R_X(\tau)+R_X(t+\tau-t_0)+R_X(t-t_0)+R_X(0)\end{aligned}$$

所以 $Z(t)=X(t)+Y$ 不是平稳过程.

12.5　设随机过程$\{X(t)=A\cos(\omega t+\Theta), t\in(-\infty,+\infty)\}$，其中$A,\omega,\Theta$为相互独立的随机变量，且$E(A)=2, D(A)=4$，$\omega\sim U(-5,5), \Theta\sim U(-\pi,\pi)$，讨论$X(t)$的平稳性、均值函数的遍历性和自相关函数的遍历性.

解　由于

$$E[X(t)]=E[A\cos(\omega t+\Theta)]=2E[\cos(\omega t+\Theta)]$$

$$=2\int_{-5}^{5}(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2\pi}\cos(ut+v)dv)du=0;$$

$$E[X^2(t)]=E[A^2\cos^2(\omega t+\Theta)]=4E[\cos^2(\omega t+\Theta)]$$

$$=4\int_{-5}^{5}(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2\pi}\cos^2(ut+v)dv)du=2;$$

$$R_X(t,t+\tau)=E\{A^2\cos(\omega t+\Theta)\cos[\omega(t+\tau)+\Theta]\}$$

$$=4\int_{-5}^{5}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2\pi}\cos(ut+v)\cos[u(t+\tau)+v]dv\right)du$$

$$=\frac{2\sin 5\tau}{5\tau}.$$

所以随机过程$X(t)$是平稳过程.

又因为

$$<X(t)>=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}A\cos(\omega t+\Theta)dt$$

$$=\lim_{T\to+\infty}\frac{\mathrm{A}\cos\Theta\sin\mathrm{T}\omega}{\mathrm{T}\omega}=0$$

$$<X(t)X(t+\tau)>=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)X(t+\tau)dt$$

$$=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}A^2\cos(\omega t+\Theta)\cos(\omega(t+\tau)+\Theta)dt$$

$$=\frac{A^2\cos\tau\omega}{2}$$

因此，均值函数是各态历经性的，而自相关函数不具有历经性.

12.6　设平稳过程$\{X(t), -\infty<t<+\infty\}$的均值$\mu_X(t)=0$，自相关函数

$$R_X(\tau)=Ae^{-b|\tau|}(1+b|\tau|)\ (b>0)$$

其中A,b为常数，试问$X(t)$的均值是否具有遍历性?

解　由于

$$\int_0^{2T}(1-\frac{\tau}{2T})[R_X(\tau)-\mu_X^2]d\tau=\int_0^{2T}(1-\frac{\tau}{2T})Ae^{-b|\tau|}(1+b|\tau|)d\tau$$

$$=A\left[-\frac{3-4bT}{2b^2T}+\frac{e^{-2b\tau}(3+2b\tau)}{2b^2T}\right].$$

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_0^{2T}(1-\frac{\tau}{2T})[R_X(\tau)-\mu_X^2]d\tau$$

$$=\lim_{T\to+\infty}\frac{A}{2T}\left[-\frac{3-4bT}{2b^2T}+\frac{e^{-2b\tau}(3+2b\tau)}{2b^2T}\right]=0$$

因此，均值函数具有各态历经性.

12.7　证明：随机相位周期过程是各态历经的.

证　设周期为T_0

$$E[X(t)]=E[s(t+\Theta)]=\int_0^{T_0} s(t+\Theta)\frac{1}{T_0}d\theta$$
$$=\frac{1}{T_0}\int_t^{t+T_0} s(\varphi)d\varphi=\frac{1}{T}\int_0^{T_0} s(\varphi)d\varphi$$

而

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\left[\frac{2T}{T_0}\int_0^{T_0} s(t+\theta)dt\right]$$
$$=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} s(t+\theta)dt=\int_0^{T_0} s(t+\theta)\frac{1}{T_0}\ dt$$
$$=\frac{1}{T_0}\int_\theta^{T_0+\theta} s(\varphi)d\varphi=E[X(t)]$$

由周期性得

$$<x(t)>=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} s(t+\theta)dt$$
$$=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\cdot\frac{2T}{T_0}\int_0^{T_0} s(t+\theta)dt=E\left[X(t)\right]$$

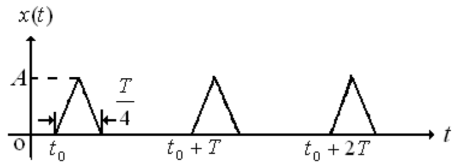
$$R_X(t,t+\tau)=E\left[s(t+\Theta)s(t+\tau+\Theta)\right]$$
$$=\int_0^{T_0} s(t+\theta)s(t+\tau+\theta)\frac{1}{T_0}d\theta$$
$$=\frac{1}{T_0}\int_t^{t+T_0} s(\varphi)s(\varphi+\tau)d\varphi=R_X(\tau)$$

注意到周期性

$$<X(t)X(t+\tau)>=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} s(t+\theta)s(t+\theta+\tau)dt$$
$$=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\frac{2T}{T_0}\int_0^{T_0} s(t+\theta)s(t+\theta+\tau)dt$$
$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T_0}\int_\theta^{\theta+T_0} s(\varphi)s(\varphi+\tau)d\varphi=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} s(\varphi)s(\varphi+\tau)d\varphi$$

根据各态历经性的定义知：随机相位周期过程是各态历经的.

12.8 设 $X(t)$ 是一随机相位周期过程，图12－1表示它的一个样本函数 $x(t)$，其中周期 T 和波幅 A 都是常数，而相位 t_0 是在 $(0,T)$ 上服从均匀分布的随机变量.



第 12.8 题图

(1) 求 μ_X,Ψ_X^2 和 σ_X^2；

(2) 求 $<x(t)>$ 和 $<x^2(t)>$.

解 由图像得出

$$X(t)=\begin{cases}\frac{8A}{T}(t-t_0) & , \quad t_0\le t<t_0+\frac{T}{8},\\ -\frac{8A}{T}(t-t_0-\frac{T}{4}) & , \quad t_0+\frac{T}{8}<t<t_0+\frac{T}{4},\\ 0 & , \quad t_0+\frac{T}{4}<t<t_0+T.\end{cases}$$

令 $t-t_0=u, x(t)=s(t-t_0)$，于是

$$\mu_X=E\left[X(t)\right]=\int_0^T\frac{1}{T}s(t-t_0)dt_0$$

$$= -\int_t^{t-T} \frac{1}{T} s(u)du = \int_{t-T}^{t} \frac{1}{T} s(u)du$$

$$= \int_0^T \frac{1}{T} s(u)du = \frac{1}{T}\left[\int_0^{\frac{T}{8}} \frac{8A}{T} udu + \int_{\frac{T}{8}}^{\frac{T}{4}} -\frac{8A}{T}\left(u-\frac{T}{4}\right)du\right]$$

$$= \frac{A}{8}.$$

$$\Psi_X^2 = E\left[X^2(t)\right] = \int_0^T \frac{1}{T} s(t-t_0)s(t-t_0)\,dt = \int_0^T \frac{1}{T} s(u)s(u)du$$

$$= \frac{1}{T}\left[\int_0^{\frac{T}{8}} \left(\frac{8A}{T}u\right)^2 du + \int_{\frac{T}{8}}^{\frac{T}{4}} \left[-\frac{8A}{T}\left(u-\frac{T}{4}\right)\right]^2 du\right]$$

$$= \frac{A^2}{12}.$$

从而

$$\sigma_X^2 = \Psi_X^2 - \mu_X^2 = \frac{A^2}{12} - \left(\frac{A}{8}\right)^2 = \frac{13}{192}A^2$$

$$\left\langle X(t)\right\rangle = \lim_{T_1\to\infty} \frac{1}{2T_1}\int_{-T_1}^{T_1} Sdt = \lim_{T_1\to\infty} \frac{1}{2T_1}\frac{2T_1}{T}\int_0^T s(t-t_0)dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t-t_0)dt = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(u)du$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T s(u)du = \frac{A}{8}$$

$$\left\langle X^2(t)\right\rangle = \lim_{T_1\to\infty} \frac{1}{2T_1}\int_{-T_1}^{T_1} s^2(t-t_0)dt = \lim_{T_1\to\infty} \frac{1}{2T_1}\frac{2T_1}{T}\int_0^T s^2(t-t_0)dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s^2(u)du = \frac{A^2}{12}$$

12.9　设 $X(t)$ 为平稳过程，其自相关函数 $R_X(\tau)$ 是以 T_0 为周期的函数，证明：$X(t)$ 是周期为 T_0 的平稳过程.

证　因平稳过程 $X(t)$ 的其自相关函数 $R_X(\tau_0)$ 是以 T_0 为周期的函数，故有

$$R_X(\tau_0) = R_X(\tau_0 + T_0)$$

有平稳性，$E[X(t) - X(t+T_0)] = 0$，又由方差性质，条件 $P\{X(t+T_0) = X(t)\} = 1$ 与 $E[X(t+T_0) = X(t)]^2 = 0$ 等价，而

$$E[X(t+T_0) = X(t)]^2$$

$$= E[X(t+T_0)]^2 - 2E[X(t+T_0)X(t)] + E[X(t)]^2$$

$$= R_X(0) - 2R_X(T_0) + R_X(0) \quad (\text{因为}X(t)\text{为平稳过程})$$

$$= 2R_X(0) - 2R_X(0) = 0$$

因此 $X(t)$ 是周期为 T_0 的平稳过程.

12.10　已知平稳过程 $X(t)$ 的谱密度为

$$S_X(\omega) = \frac{\omega^2+4}{\omega^4+10\omega^2+9},$$

求 $X(t)$ 的均方值.

解　由于

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega^2+4}{\omega^4+10\omega^2+9}\cdot e^{i\omega\tau}d\omega$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega^2+4}{(\omega^2+1)(\omega^2+9)}\cdot e^{i\omega\tau}d\omega$$
$$=\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi i\left[\mathrm{Res}\left(\frac{\omega^2+4}{(\omega^2+1)(\omega^2+9)}\cdot e^{i\omega|\tau|},i\right)+\mathrm{Res}\left(\frac{\omega^2+4}{(\omega^2+1)(\omega^2+9)}\cdot e^{i\omega|\tau|},3i\right)\right]$$
$$=i(\frac{3}{16i}e^{-|\tau|}+\frac{5}{48i}e^{-3|\tau|})=\frac{1}{16}(3e^{-|\tau|}+\frac{5}{3}e^{-3|\tau|}),$$

均方值为 $\Psi_X^2=R_X(0)=\frac{7}{24}$.

12.11　已知平稳过程 $\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$ 相关函数为

$$R_X(\tau)=\begin{cases}1-|\tau|, & |\tau|\le 1,\\ 0, & |\tau|>1.\end{cases}$$

求随机过程 $X(t)$ 的谱密度 $S_X(\omega)$.

解　根据平稳过程相关函数的谱分解定理

$$S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau=2\int_0^1(1-\tau)\cos\omega\tau d\tau$$
$$=-\frac{2\cos\omega\tau}{\omega^2}\bigg|_0^1=\frac{2(1-\cos\omega\tau)}{\omega^2}$$

12.12　设随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 的自相关函数为 $R_X(\tau)=\sigma^2e^{-2(\omega_0\tau)^2}$ ，其中 σ^2,ω_0 均为常数，试求随机过程 $X(t)$ 的谱密度 $S_X(\omega)$.

解　根据平稳过程相关函数的谱分解定理

$$S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau=a^2\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\omega_0^2\tau^2}e^{-i\omega\tau}d\tau$$
$$=\frac{2a^2}{\omega_0^2}e^{-(\frac{\omega}{2\omega_0})^2}\int_0^{+\infty}e^{-(\omega_0\tau+\frac{i\omega}{2\omega_0})^2}d(\omega_0\tau)$$
$$=\frac{a^2\sqrt{\pi}}{\omega_0}e^{-(\frac{\omega}{2\omega_0})^2}.$$