常微分方程

山东农业大学信息科学与工程学院

冯巍

基本说明

常微分方程是数学众多分支中的一个主干技术性分支。所谓“技术性”，一方面说明 ODE 是以包括微积分、线性代数等在内的许多数学分支的理论为基础的，而不是专注于最一般的数学对象的研究，另一方面，说明 ODE 在现实世界中包括物理、力学、经济社会、生态等诸多领域有着广泛的应用，揭示并描述了许多现象的数量变化规律。

ODE 中提出或属于数学科学最基本思想的部分并不算多，但是对许多数学分支和实际问题却有着直接且不可或缺的示范与指导作用。这些最基本思想主要包括 Cauchy 问题解的存在唯一性、解对初值和参数的连续依赖性、稳定性的 Lyapunov 方法和定性理论。

课程(学科)特点：(1)理论不太深奥，相对容易接受：以一元微积分、线性代数、无穷级数和简单的复变函数知识为基础；(2)推导相对繁琐，应用极其广泛：除在数学体系内的应用以外，与实际问题联系直接紧密，在许多应用学科中存在大量实例，头绪多、较为琐碎。

CHAPTER 1
INTRODUCTION

§1.1 常微分方程的实际背景与应用举例

一、RLC 电路与 Kirchhoff 第二定律（resistor-inductor-capacitor）

二、数学摆

三、人口与传染病模型

四、力学系统中的 ODE 模型

Newton 力学、Lagrange 力学、Hamilton 力学

§1.2 与常微分方程有关的基本概念

一、微分方程——常微分方程与偏微分方程

1、ODEs (ordinary differential equations)， PDEs (partial differential equations)，方程的阶

2、n 阶 ODE 的一般形式

（隐式） $F(t, x, x', \cdots, x^{(n)}) = 0,$

（显式） $x^{(n)} = f(t, x, x', \cdots, x^{(n-1)}),$

其中 $F(\cdot), f(\cdot)$ 为各有关自变量 $t, x, x', \cdots, x^{(n)}$ 的连续函数。

二、线性 ODE 与非线性 ODE

三、关于解的基本概念

1、(显式)解与隐式解

2、通解与特解

显式通解与隐式通解，任意常数(求解过程中必须做足够多次的不定积分，每一次均有一个任意常数产生,它们彼此不能相互替代，称作相互独立)

四、积分曲线与方向场

五、常微分方程组 $\frac{dy}{dt}=f(t,y), \quad y\in\mathbb{R}^n,\ f(\cdot,\cdot)\in\mathbb{R}^n.$

六、ODE(组)的驻定与非驻定

$$\frac{dy}{dt}=f(y), \qquad\qquad \frac{dy}{dt}=f(t,y).$$

七、相空间、相轨线与奇点

八、Remark 以上概念可分为三组。

1、关于微分方程(组)

阶；ODE 与 PDE；线性与非线性；显式方程与隐式方程；驻定与非驻定。

2、关于解的分析概念

通解与特解；显式解与隐式解；初始条件等。

3、关于解的几何概念

积分曲线与方向场；相空间、相轨线等

九、Remark

1、ODE 在应用中描述对象的动态演化规律，其中未知函数用以反映对象的所论数量特征。

2、理论上讲，求解一个 ODE(组)是将有关导数消去以解出未知函数的过程，所以，不定积分起到了至关重要的作用，相应地，通解中出现了适当个数的任意常数。

3、用不定积分的手段直接求解一个 ODE 组一般行之无效，而求解一个

ODE 则可能有效。常微分方程的历史和实践表明，能用不定积分并结合函数、自变量代换的手段只能求出特定类型的一些 ODE。

4、一阶显式 ODE 在常微分方程理论中起着基本作用。一方面，对任何一个高阶 ODE（组），可以引入更多的新的未知函数将它化为一个等价的一阶 ODE 组，另一方面，由隐函数定理，一般地隐式一阶 ODE（组）可以化为未知函数的局部等价的一阶显式 ODE 组。事实上，在整个 ODE 理论中，大多数情形下，一阶显式 ODE 组是唯一的研究对象。

5、常微分方程最基本的研究思想是降阶，即用一个等价的一阶显式 ODE 组代替原来的高阶 ODE 组。

§1.3 发展简史

求特定方程的通解(初等函数、超越函数)

$\downarrow$ Liouville、Bernoulli

研究定解问题的解（Cauchy 问题、边值问题）的存在唯一性

$\downarrow$

研究所有解（Poincare 定性理论、Lyapunov 稳定性理论）

$\downarrow$

微分动力系统

Chapter 2 一阶 ODE 的求解

——初等积分法

§2.1 变量可分离方程与变量代换

一、变量可分离方程及其求解

$$\frac{dy}{dx}=f(x)\cdot\varphi(y) \tag{2.1.1}$$

其中$f(\cdot)$，$\varphi(\cdot)$是连续函数。

1、求解过程

将原方程变形为$\dfrac{dy}{\varphi(y)}=f(x)dx,$两端分别关于变量作不定积分，得

$$\int\frac{1}{\varphi(y)}dy=\int f(x)dx\text{，}$$

进而可得原方程的通解。

2、例子

3、Remark (1) 整个求解过程尽管有两个积分号，但本质上只做了一次不定积分，因为只会出现一个任意常数。

(2) 原方程的解可能是隐式通解，也可能只有一个带积分的表达式。

二、可化为变量可分离方程的方程

1、齐次方程

$$\frac{dy}{dx}=g\left(\frac{y}{x}\right) \tag{2.1.2}$$

其中$g(\cdot)$是连续函数。

提示：回忆微积分中关于 m 齐次函数的定义.

作函数变换$u=\frac{y}{x}$，引入新的未知函数$u(x)$，则$y=x\cdot u$，代入原方程可得

$$\frac{du}{dx}=\frac{g(u)-u}{x}\text{，}$$

这是一个变量可分离方程，由此可得原方程的通解。

例子 $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$； $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$； $x\frac{dy}{dx}+2\sqrt{xy}=y\ \ (x<0)$。

2、可化为齐次方程的方程

(1)
$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+c}{dx+ey+f},$$

其中a,b,c,d,e,f均为已知常数。

Case 1: $\frac{a}{d}=\frac{b}{e}=\frac{c}{f}=k$（$k$是已知常数）.

此时，原方程化为$\frac{dy}{dx}=k$，因而有通解$y=kx+C$（C为任意常数）。

Case 2: $\frac{a}{d}=\frac{b}{e}=k\neq\frac{c}{f}$。

令$u=dx+ey$，将u作为新的未知函数，则有新方程

$$\frac{du}{dx}\boxed{=d+e\frac{dy}{dx}}=d+e\frac{ku+c}{u+f},$$

这是一个变量可分离方程。

Case 3: $\frac{a}{d}\neq\frac{b}{e}$。

当c,f不全为零时，解二元一次方程组$\begin{cases}ax+by+c=0,\\ dx+ey+f=0\end{cases}$得解$(\alpha,\beta)$，引入新的自变量、未知函数$\begin{cases}X=x-\alpha,\\ Y=y-\beta,\end{cases}$ 由$\begin{cases}ax+by+c=aX+bY,\\ dx+ey+f=dX+eY\end{cases}$可知，原方程可化为

$$\frac{dY}{dX}=\frac{aX+bY}{dX+eY}=g\left(\frac{Y}{X}\right)。$$

当c,f全为零时，原方程形如$\frac{dY}{dX}=\frac{aX+bY}{dX+eY}=g\left(\frac{Y}{X}\right)$，直接令$u=\frac{y}{x}$即可。

(2) 其它类型

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{dx+ey+f}\right);$$

$$\frac{dy}{dx}=f(ax+by+c);$$

$$yf(xy)dx+xg(xy)dy=0;$$

$$x^2\frac{dy}{dx}=f(xy);$$

$$\frac{dy}{dx}=x\cdot f\left(\frac{y}{x^2}\right)。$$

§2.2 一阶 LODE 与常数变易法

一、一阶 LODE 及其求解

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x), \tag{2.2.1}$$

其中$P(x),Q(x)$是连续函数，当$Q(x)\equiv 0$时，得相应的齐次 LODE 方程$\frac{dy}{dx}=P(x)y$。

1、求解过程

齐次 LODE 方程$\frac{dy}{dx}=P(x)y$是一个变量可分离方程，故有通解

$$y=Ce^{\int P(x)dx}\text{（}C\text{ 为任意常数）。} \tag{2.2.2}$$

此时，考虑到(2.2.1)的结构，可以推测其通解形如

$$y=c(x)\cdot e^{\int P(x)dx}, \tag{2.2.3}$$

其中函数$c(x)$待定。为确定$c(x)$，将(2.2.3)代入(2.2.1)，可知满足如下 ODE

$$\frac{dc(x)}{dx}=Q(x)\cdot e^{-\int P(x)dx},$$

积分即得

$$c(x)=\int Q(x)\cdot e^{-\int P(x)dx}dx+C\text{（}C\text{ 为任意常数）}$$

从而，(2.2.1)有通解

$$y=e^{\int P(x)dx}\cdot\left(\int Q(x)\cdot e^{-\int P(x)dx}dx+C\right)\quad\text{（}C\text{ 为任意常数）。} \tag{2.2.4}$$

这一将齐次LODE通解中任意常数变为函数得到非齐次LODE通解的方法称为**常数变易法**，它同样适用于求解一般 LODE (组)。

2、解的结构

(2.2.4)可以变形为$y=Ce^{\int P(x)dx}+e^{\int P(x)dx}\cdot\int Q(x)\cdot e^{-\int P(x)dx}dx$，它的第一项为齐

次 LODE 方程 $\frac{dy}{dx} = P(x)y$ 的通解，且可以验证，第二项为(2.2.1)的一个解，由于没有未知常数，所以第二项为(2.2.1)的特解，即：

一阶 LODE (2.2.1)的通解等于它的齐次 ODE 的通解与自身任一特解之和。

3、例子

$\frac{dy}{dx} = y + \sin x$；　　$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x - y^2}$。

二、可化为一阶 LODE 的 Bernoulli 方程及其求解

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)y^n, \tag{2.2.5}$$

其中 $P(x), Q(x)$ 是连续函数，且常数 $n \neq 0, 1$。

只要将(2.2.5)化为一阶 LODE 即可。因为

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} = P(x)y^{1-n} + Q(x),$$

故可以作未知函数代换 $u = y^{1-n}$，引入新的未知函数 u。易知，未知函数 u 满足

$$\frac{du}{dx} = (1-n)P(x)u + (1-n)Q(x),$$

这是一个一阶 LODE。

§2.3 恰当微分方程与积分因子

一、恰当微分方程(exact differential equations)

1、对称形式的一阶 ODE

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \tag{2.3.1}$$

其中 $M(x,y), N(x,y)$ 是二元连续函数。

2、恰当微分方程

称(2.3.1)为单连通区域内$\Omega\subset\mathbb{R}^2$的一个恰当微分方程，如果$M(x,y), N(x,y)$在$\Omega$内连续可微，且满足

$$\frac{\partial M}{\partial y}\equiv\frac{\partial N}{\partial x},\quad \forall (x,y)\in\Omega\text{。} \tag{2.3.2}$$

此时，利用单连通区域Ω内曲线积分

$$\int M(x,y)dx+N(x,y)dy$$

的路径无关性，由函数$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}M(x,y)dx+N(x,y)dy$可得的隐式通解

$$u(x,y)=C\quad（C\text{为任意常数}），$$

因为，(2.3.1)可以表示为$0=M(x,y)dx+N(x,y)dy=du(x,y)$。

3、例子　$(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0$。

4、恰当微分方程的凑微分法

利用如下各关系式可以简化恰当微分方程的求解：

$$ydx+xdy=d(xy)\text{；}\qquad \frac{ydx-xdy}{y^2}=d\left(\frac{x}{y}\right)\text{；}$$

$$\frac{-ydx+xdy}{x^2}=d\left(\frac{y}{x}\right)\text{；}\qquad \frac{ydx-xdy}{xy}=d\left(\ln\left|\frac{x}{y}\right|\right)\text{；}$$

$$\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=d\left(\arctan\frac{x}{y}\right)\text{；}\qquad \frac{ydx-xdy}{x^2-y^2}=\frac{1}{2}d\left(\ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right|\right)$$

二、积分因子(integrating factor)

1、积分因子　称一个连续可微的函数$\mu(x,y)$为 ODE(2.3.1)的一个积分因子，若$\mu=\mu(x,y)\neq 0$且使得(2.3.1)为恰当微分方程，即

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}\equiv\frac{\partial(\mu N)}{\partial x},\ \forall (x,y)\in\Omega\text{，} \tag{2.3.3}$$

亦即存在连续可微函数$u(x,y)$使得

$$0=\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=du(x,y)\text{。}$$

2、注　(2.3.1)的积分因子不一定总存在，存在时也不一定唯一。

3、凑积分因子的例子

§2.4 一阶隐式 ODE 的若干类型及其求解

一般的一阶隐式 ODE 形如

$$F(x,y,y')=0\text{，}\tag{2.4.1}$$

其中 F 是各变量的连续函数。通常情况下，求出(2.4.1)的解是不可能的，对极个别特殊类型，有可能解得隐式通解或者带常数的通解。

一、可以解出 y（或 x）的方程

1、$y=f(x,y')$（其中 f 有连续偏导数）

对这类方程，可能得到含参数形式的通解。为此，引入参数 $\frac{dy}{dx}=p$，则原方程变为 $y=f(x,p)$，两边关于 x 求导得

$$p\boxed{=\frac{dy}{dx}}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}\tag{2.4.2}$$

这是一个关于未知函数 $p=p(x)$ 的 ODE。

若(2.4.2)有通解 $p=\varphi(x,C)$，则原方程有通解（C 为任意常数）

$$y=f(x,\varphi(x,C))\text{；}$$

若(2.4.2)有通解 $x=\omega(p,C)$，则原方程有通解（C 为任意常数）

$$\begin{cases}x=\omega(p,C),\\ y=f(\omega(x,C),p);\end{cases}$$

若(2.4.2)有隐式通解 $\Phi(x,p,C)=0$，则原方程有通解（C 为任意常数）

$$\begin{cases}\Phi(x,p,C)=0,\\ y=f(x,\,p).\end{cases}$$

2、$x=f(y,y')$（其中 f 有连续偏导数）

对这类方程，也可能得到含参数形式的（隐式）通解。为此，引入参数 $\frac{dy}{dx}=p$，则原方程变为 $x=f(y,p)$，再将 x 作为函数，y 作为自变量，关于 y 求导得

$$\frac{1}{p}\boxed{=\frac{dx}{dy}}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy} \qquad (2.4.3)$$

这是一个关于未知函数 $p=p(x)$ 的 ODE。

若(2.4.3)有隐式通解 $\Phi(y,p,C)=0$，则原方程有通解（C 为任意常数）

$$\begin{cases}\Phi(y,p,C)=0,\\ x=f(y,p).\end{cases}$$

二、不显含 y（或 x）的隐式方程

1、$F(x,y')=0$（其中 F 有连续偏导数）

对这类方程，可能得到含参数形式的通解。为此，令 $\frac{dy}{dx}=p$，原方程变为 $F(x,p)=0$，若其有参数方程

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ p=\psi(t),\end{cases} \qquad (2.4.4)$$

则可得以 y 为函数，t 为自变量的新方程

$$dy\boxed{=pdx}=\psi(t)\varphi'(t)\,dt, \qquad (2.4.5)$$

对(2.4.5)积分即得原方程的含参数的通解 $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\int\psi(t)\varphi'(t)\,dt.\end{cases}$

2、$F(y,y')=0$（其中 F 有连续偏导数）

令 $\frac{dy}{dx}=p$，原方程变为 $F(y,p)=0$，若其有参数方程

$$\begin{cases}y=\varphi(t),\\ p=\psi(t),\end{cases} \qquad (2.4.6)$$

则可得以 x 为函数，t 为自变量的新方程

$$\varphi'(t)\,dt\boxed{=dy=pdx}=\psi(t)dx \text{。} \qquad (2.4.7)$$

对(2.4.5)积分即得原方程的含参数的通解

$$\begin{cases} y = \varphi(t), \\ x = \displaystyle\int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\, dt + C. \end{cases}$$

Chapter 3 一阶 ODE 解的基本理论
——存在、唯一性、连续依赖性定理

为什么研究 ODE 解的基本理论？

一方面，大量 ODE 不能用初等方法求解(不具备可解类型方程的特定形式)，从而，用初等方法得不到方程的解析解。另一方面，应用中可能只需要近似解或解的性质，为此，首要关心的问题是解是否存在？若存在的话，一定唯一吗？有哪些性质呢？参看下例：

例子 考虑 Cauchy 问题 $\begin{cases} y'(x) = 2\sqrt{y(x)}, \\ y(0) = 0, \end{cases}$ 则可以验证 $y(x) \equiv 0$ 和

$$y(x) \equiv \begin{cases} 0, & 0 \le x \le c, \\ (x-c)^2, & c \ < x \le 1 \end{cases} \left(\ \forall c \in (0,1) \ \right)$$

均为问题的解，此时问题的解存在而不唯一。

进而，若解是存在唯一的，如何定义并确定一个满足条件的近似解？当初始条件或方程系数有一定误差时，相应的近似解与真实解有何关系？

§3.1 一阶 ODE 解的存在唯一性与逐次逼近法

一、一阶显式方程的存在唯一性定理

Theorem 3.1.1 若$f(x,y)$在矩形区域R：

$$\{(x,y): |x-x_0| \le a, |y-y_0| \le b\}$$

上连续且关于y满足 Lipschitz 条件：$\exists L>0$，使

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \le L|y_1-y_2|, \quad \forall (x,y_1),(x,y_2)\in \mathrm{R}$$

则一阶 ODE 的 Cauchy 问题：

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y), \quad y(x_0)=y_0$$

在区间$|x-x_0|\le h$上存在唯一的连续解

$$y=\varphi(x),$$

其中$h=\min(a,\frac{b}{M}), \quad M= \max_{(x,y)\in\mathrm{R}}|f(x,y)|$。

1、证明方法：逐次逼近法(method of successive approximations)。

2、证明思路：

(1) 将 Cauchy 问题转化为一个等价的积分方程：

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,y(s))ds, \quad \forall x\in[x_0-a,x_0+a];$$

(2) 任取$\varphi_0(x)\in C[x_0-a,x_0+a]$使得$|\varphi_0(x)-y_0|\le b$，代入积分方程，依次迭代可得到解的近似序列：

$$\varphi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,\varphi_{n-1}(s))ds, \quad n=1,2,\cdots,$$

特别地，可以取解的近似序列为 $\begin{cases}\varphi_0(x)=y_0,\\ \varphi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,\varphi_{n-1}(s))ds, \quad n=1,2,\cdots;\end{cases}$

(3) 对$\forall n$，证明$\varphi_n(x)\in[y_0-b,y_0+b], \forall x\in[x_0,x_0+h]$：

已知$|\varphi_0(x)-y_0|\le b$，则由 Lipschitz 条件，应用数学归纳法可得

$$\begin{aligned}|\varphi_n(x)-y_0| &\le \left|\int_{x_0}^{x} f(s,\varphi_{n-1}(s))ds\right| \\ &\le \int_{x_0}^{x} |f(s,\varphi_{n-1}(s))|ds \\ &\le M|x-x_0| \le Mh \le b;\end{aligned}$$

(4) 证$\{\varphi_n(x)\}$在$[x_0,x_0+h]$上一致收敛到连续函数$\varphi(x)$且$|\varphi(x)-y_0|\le b$：

只需证明$\{\varphi_n(x)\}$在$[x_0,\,x_0+h]$上是一个 Cauchy 序列。

首先，

$$\begin{aligned}|\varphi_1(x)-\varphi_0(x)| &\le \left|y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,\varphi_0(s))ds-\varphi_0(x)\right| \\ &\le \int_{x_0}^{x} |f(s,\varphi_0(s))|ds+|\varphi_0(x)-y_0| \le M\,|\,x-x_0\,|+b,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)| &\le \left|\int_{x_0}^{x}[f(s,\varphi_1(s))-f(s,\varphi_0(s))]ds\right| \\ &\le \int_{x_0}^{x}|f(s,\varphi_1(s))-f(s,\varphi_0(s))|ds \\ &\le L\int_{x_0}^{x}|\varphi_1(s)-\varphi_0(s)|ds \\ &\le L\int_{x_0}^{x}\left(M[s-x_0]+b\right)ds \\ &\le LM\frac{1}{2!}(x-x_0)^2+Lb(x-x_0)\boxed{\le \frac{M}{L}\frac{L^2}{2!}h^2+Lbh},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\varphi_3(x)-\varphi_2(x)| &\le \int_{x_0}^{x}|f(s,\varphi_2(s))-f(s,\varphi_1(s))|ds \\ &\le L\int_{x_0}^{x}|\varphi_2(s)-\varphi_1(s)|ds \\ &\le L\int_{x_0}^{x}\left(LM\frac{1}{2!}(s-x_0)^2+Lb(s-x_0)\right)ds \\ &\le M\frac{L^2}{3!}(x-x_0)^3+b\frac{L}{2!}(x-x_0)^2\boxed{\le \frac{M}{L}\frac{L^3}{3!}h^3+b\frac{L^2}{2!}h^2}\end{aligned}$$

由数学归纳法，设$|\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)|\le \frac{M}{L}\frac{L^n}{n!}(x-x_0)^n+b\frac{L^{n-1}}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}$，相应地，有$|\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)|\le \frac{M}{L}\frac{L^n}{n!}h^n+b\frac{L^{n-1}}{(n-1)!}h^{n-1}$，则

$$
\begin{aligned}
\left|\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)\right| &\le \int_{x_0}^{x}\left|f(s,\varphi_n(s))-f(s,\varphi_{n-1}(s))\right|ds \\
&\le L\int_{x_0}^{x}\left|\varphi_n(s)-\varphi_{n-1}(s)\right|ds \\
&\le L\int_{x_0}^{x}\left(\frac{M}{L}\frac{L^n}{n!}(s-x_0)^n+b\frac{L^{n-1}}{(n-1)!}(s-x_0)^{n-1}\right)ds \\
&\le \frac{M}{L}\frac{L^{n+1}}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}+b\frac{L^n}{n!}(x-x_0)^n \\
&\boxed{\le \frac{M}{L}\frac{L^{n+1}}{(n+1)!}h^{n+1}+b\frac{L^n}{n!}h^n},
\end{aligned}
$$

进而，对任意$\forall n,m\in\mathbb{N}$，可得

$$
\begin{aligned}
\left|\varphi_{n+m}(x)-\varphi_n(x)\right| &\le \left|\varphi_{n+m}(x)-\varphi_{n+m-1}(x)\right|+\left|\varphi_{n+m-1}(x)-\varphi_{n+m-2}(x)\right|+\cdots+\left|\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)\right| \\
&\le \frac{M}{L}\sum_{k=1}^{m}\frac{L^{n+k}}{(n+k)!}(x-x_0)^{n+k}+b\sum_{k=0}^{m-1}\frac{L^{n+k}}{(n+k)!}(x-x_0)^{n+k} \\
&\le \frac{M}{L}\sum_{k=1}^{m}\frac{(Lh)^{n+k}}{(n+k)!}+b\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(Lh)^{n+k}}{(n+k)!},
\end{aligned}
$$

因而，由级数关系式$e^{Lh}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(Lh)^k}{k!}$可知，$\forall\varepsilon>0,\ \exists N>0$，当$\forall n\ge N$，$\forall m\ge 0$时，总有$\left|\varphi_{n+m}(x)-\varphi_n(x)\right|<\varepsilon$对$[x_0,x_0+h]$一致成立。

由定义，$\{\varphi_n(x)\}$在$[x_0,x_0+h]$上 Cauchy 序列，从而，存在连续函数$\varphi(x)$使得$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\varphi(x)$一致成立，且

$$
\begin{aligned}
|\varphi(x)-y_0| &\le |\varphi(x)-\varphi_n(x)|+|\varphi_n(x)-y_0| \\
&\le |\varphi(x)-\varphi_n(x)|+b,\quad \forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in[x_0,x_0+h].
\end{aligned}
$$

令$n\to\infty$即有$|\varphi(x)-y_0|\le b,\forall x\in[x_0,x_0+h]$；

(5) $\varphi(x),x\in[x_0,x_0+h]$是 Cauchy 问题的连续解，因而可微：

由于$\{\varphi_n(x)\}$在$[x_0,x_0+h]$上的一致收敛性，且$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\varphi(x)$和$f(x,y)$在$[x_0,x_0+h]$上 Lipschitz 连续可得，$\{f(\varphi_n(x))\}$在$[x_0,x_0+h]$上的一致收敛，且

$$\lim_{n\to\infty}f(\varphi_n(x))=f(\varphi(x))。$$

结合$\{\varphi_n(x)\}$和$\{f(\varphi_n(x))\}$在$[x_0,x_0+h]$上的一致收敛性，在

$$\varphi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(s,\varphi_{n-1}(s))ds,\quad \forall n=1,2,\cdots$$

两端令$n\to\infty$即得$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(s,\varphi(s))ds$，因而$\varphi(x)$在$[x_0,x_0+h]$上是 Cauchy

问题的连续解，可微性是明显的。

(6) 解的唯一性：

只要证明任意两解 $\varphi(x), \widehat{\varphi}(x)$ 在 $[x_0, x_0+h]$ 上恒等即可。

事实上，由 $\varphi(x), \widehat{\varphi}(x)$ 满足各自的等价积分方程

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))ds \text{，}$$

$$\widehat{\varphi}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \widehat{\varphi}(s))ds \text{，}$$

两式相减并取绝对值，得估计

$$|\varphi(x) - \widehat{\varphi}(x)| \le \int_{x_0}^{x} |f(s,\varphi(s)) - f(s,\widehat{\varphi}(s))| ds \le L \int_{x_0}^{x} |\varphi(s) - \widehat{\varphi}(s)| ds \text{，}$$

记 $u(x) = \int_{x_0}^{x} |\varphi(s) - \widehat{\varphi}(s)| ds$，则 $u(x) \ge 0$、可微，且上式说明

$$u'(x) \le Lu(x), \quad u(x_0) = 0 \text{，}$$

进而，$0 \le u(x) \le u(x_0)e^{L(x-x_0)} = 0$。这表明 $u(x) \equiv 0, x \in [x_0, x_0+h]$。

(7) 说明：问题的解在 $[x_0 - h, x_0]$ 上的存在唯一性同理可证。

3、**注**：（1）关于参数 $h = \min(a, \frac{b}{M})$ 的几何意义：因 $h \le \frac{b}{M}$，故由 $\frac{b}{\frac{b}{M}} = M$ 可知直线 $\mathrm{BC_1}$ 与 $\mathrm{B_1C}$ 的斜率分别为 M 和 $-\mathrm{M}$。

（2）关于 $f(x,y)$ 的 Lipschitz 条件常代之以：

$$f_y(x,y) \in \mathcal{C}(\mathrm{R}) \text{，}$$

此时，$| f_y(x,y) | \le L, \ \forall (x,y) \in \mathrm{R}$，从而由 Lagrange 中值定理，

$$| f(x,y_1) - f(x,y_2) | \le L \, | y_1 - y_2 |, \quad \forall (x,y_1),(x,y_2) \in \mathrm{R} \text{；}$$

但反之不真。

（3）当 $f(x,y) = P(x)y + Q(x)$ 且 $P(x), Q(x) \in \mathcal{C}[\alpha, \beta]$ 时，Theorem 1 总成立。

二、一阶隐式方程的存在唯一性定理

1、Theorem 3.1.2 对函数 $F(x,y,z)$，若 $F(x,y,z)$ 连续且存在连续的偏导数，

$F(x_0,y_0,y_0')=0$ 且 $\frac{\partial}{\partial z}F(x_0,y_0,y_0')\neq 0$，则 Cauchy 问题

$$F\big(x,y(x),y'(x)\big)=0,\quad y(x_0)=y_0$$

在 $|x-x_0|\le h$ (h 足够小)上存在唯一的连续可微解

$$y=\varphi(x)$$

且满足(约束条件) $y'(x_0)=y_0'$。

证明思路：由定理条件，在 (x_0,y_0,y_0') 的某个邻域（不妨设其为闭的长方形区域）内，方程 $F(x,y,z)=0$ 决定隐函数 $z=f(x,y)$。

因而隐式方程 $F\big(x,y(x),y'(x)\big)=0$ 等价于

$$y'(x)=f(x,y(x)),$$

使得 $y_0'=y'(x_0)=f(x_0,y_0)$，且 $f_y(x,y)=-\frac{F_y}{F_z}$ 在邻域内连续，从而具有 Lipschitz 连续性。由 Theorem 1，Cauchy 问题 $\begin{cases}y'=f(x,y),\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$ 存在唯一的连续可微解 $y=\varphi(x)$，显然 $y=\varphi(x)$ 也是 Cauchy 问题

$$F\big(x,y(x),y'(x)\big)=0,\quad y(x_0)=y_0$$

的唯一的连续可微解。

2、Remark：(1) 在 Theorem 2 中，条件 $F(x_0,y_0,y_0')=0$ 和 $\frac{\partial}{\partial z}F(x_0,y_0,y_0')\neq 0$ 是为了保证能由

$$F\big(x,y(x),y'(x)\big)=0$$

中解得显式方程(应用隐函数定理)

$$y'=f(x,y);$$

在此过程中，$F(x,y,z)$ 具有连续偏导数 $F_z(x,y,z)$ 是不可缺少的，而偏导数 $F_x(x,y,z)$，$F_y(x,y,z)$ 的连续性是为了保证显式方程

$$y'=f(x,y)$$

中函数 $f(x,y)$ 具有连续偏函数 $f_y(x,y)$，即

$\boxed{F_z(x,y,z),F_y(x,y,z)\text{连续}\Rightarrow f_y(x,y)\text{连续，且由隐函数求导，}\ f_y(x,y)=-\frac{F_y}{F_z}}$

$\boxed{F_z(x,y,z)\text{连续，}\ \frac{\partial}{\partial z}F(x_0,y_0,y_0')\neq 0\Rightarrow F(x,y,z)=0\text{存在连续的隐函数}\ z=f(x,y)\text{。}}$

(2) y_0' 是一个预先给定的数，其值由 $F(x_0,y_0,y_0')=0$ 确定。但 $y'(x_0)=y_0'$ 最终只是作为一个自然满足的约束条件，即在定理条件下，$y'(x_0)=y_0'$ 必然成立。

三、关于等价的积分方程与 ODE 关系的讨论

1、对给定的 ODE 及其 Cauchy 问题

$$\begin{cases} y'=f(x,y), \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

有与之等价(即解完全相同)的积分方程(integral equation, IE)

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y(t))dt\text{。}$$

2、为什么将 ODE 转化为一个等价的 IE？

ODE 等价地转化为 IE，从本质上体现了积分相对于微分的优越性。事实上，即使连续性、可微性在一个区间上得以满足，也不能否认它们研究的是函数的点的性质，即局部性质，而积分（相应地，积分方程）则是从整体上（或宏观上）研究函数性质。

换言之，从连续性、可微性的角度考察函数，一个好的函数是指它在各点都好(连续、可微)，而从积分角度来看，函数只要积分存在，可以容许它在“部分”点上很坏，即整体上好的函数可以在局部很“坏”。

现代数学，特别是实分析、PDE 正是从整体上研究对象的性质的，这就是广义函数及与之有关的性质。

§3.2 一阶 ODE 的 Cauchy 问题解的延拓

一、为什么研究一阶 ODE-Cauchy 问题解的延拓？

——对存在唯一性问题的评价

1、**存在唯一性定理仅是局部的**，而解 $y=\varphi(x)$ 可能在

$$|x-x_0|\le h \quad (\text{这里 } h=\min(a,\frac{b}{M}))$$

之外存在。

2、$h=\min(a,\frac{b}{M})$ 表示了解存在的范围，但是由 h 的定义可知，关于 $f(x,y)$ 的条件，成立的范围越大，h 越小，这是因为 M 越大，h 越小；反之，适当缩小与 $f(x,y)$ 的定义区域(矩形) $\mathrm{R}=\{(x,y):|x-x_0|\le a,|y-y_0|\le b\}$，则不一定会使得真正的 h 减小。

二、Cauchy 问题解延拓的过程——向两个方向延拓

1、**延拓的过程与几何表示** (设 $f(x,y)$ 在有界区域 G 内连续且满足局部 Lipschitz 的条件)，由 $y=\varphi(x), x:|x-x_0|\le h$ 得延拓解

$$\searrow \qquad y=\begin{cases}\varphi(x), & |x-x_0|\le h\\ \psi(x) & x_0+h\le x\le x_0+h+h_1,\end{cases}$$

$$\searrow \qquad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots$$

即使原来的积分曲线 $y=\varphi(x)$ 以左、右端点

$$(x_0-h,\varphi(x_0-h)) \text{和} (x_0+h,\varphi(x_0+h))$$

为起始点向自变量增大和减少的两个方向分别延长一段。

2、**饱和解及其定义域**

当解在有界区域G内延拓至不能再延拓时，就获得该 Cauchy 问题相应的饱和解。

用反证法可以说明，任一饱和解$y=\tilde{\varphi}(x)$的定义区间必定是一个开区间$\alpha<x<\beta$。

三、Cauchy 问题解的延拓定理

1、有界区域情形

Theorem 3.2.1 **设 Cauchy 问题**$\begin{cases} y'=f(x,y), \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$**中的**$f(x,y)$**在有界区域**G**内连续，其中**$\forall(x_0,y_0)\in \mathrm{G}$。**若**$f(x,y)$**在**G**内满足局部 Lipschitz 条件，则该问题的任一解**$y=\varphi(x)$**可以延拓，直至动点**$(x,\varphi(x))$**任意接近区域**G**的边界，即**G**的边界上有点成为**$(x,\varphi(x))$**的关于**x**的极限。**

2、无界区域情形

Theorem 3.2.2 **设 Cauchy 问题**$\begin{cases} y'=f(x,y), \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$**中的**$f(x,y)$**在无界区域**G**内连续，其中**$\forall(x_0,y_0)\in \mathrm{G}$，**若**$f(x,y)$**在**G**内满足局部 Lipschitz 条件，则解**$y=\varphi(x)$**可延拓，具体而言，以**x**增大的方面为例，有两种可能:**

(a) $y=\varphi(x)$**可延拓至区间**$[x_0,+\infty)$；

(b) $y=\varphi(x)$**可延拓至区间**$[x_0,d)$，**且**

$$\lim_{x\to d-}\varphi(x)=\infty \qquad \text{或} \quad (x,\varphi(x))\to\partial\mathrm{G}\ (x\to d\text{-})$$

3、特殊情况

Theorem 3.2.3 **若**$f(x,y)$**在**$\mathbb{R}^2$**上连续、有界且**$f_y(x,y)$**在**$\mathbb{R}^2$**上连续，则** Cauchy **问题的任一解**$y=\varphi(x)$**均可延拓至区间**$[-\infty,+\infty)$.

注：在 Theorem 3.2.3 中，$f(x,y)$在$\mathbb{R}^2$上的有界性是非常重要的，否则解可能只在有界区间上存在。

§3.3 Cauchy 问题解对初值的连续性和可微性定理

一、为什么研究 Cauchy 问题解与初值参数的关系

一个 ODE 从本质上讲是将一个实际(即物理)问题完成数学化的过程后得到的结果，在此过程中，由不同人、不同地点、不同时间，用不同方法量测到的初始条件和方程中的参数通常是不一样的。

此时，对应的数学问题(即 ODE 的定解问题)的解由初值与参数的不同而有一定的误差，预测、估计这类误差及其动态演化是非常重要的。

二、解关于初值的对称性

Theorem 3.3.1 设 Cauchy 问题

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的解唯一，记之为 $y=\varphi(x;x_0,y_0)$，则

$$y_0 = \varphi(x_0;x,y)$$

对积分曲线 $(x,\varphi(x;x_0,y_0))$ 上的任一点 (x,y) 均成立。

三、解对初值的连续依赖性

Theorem 3.3.2 设 $f(x,y)$ 在区域 G 内连续且关于 y 满足局部 Lipschitz 条件，$\forall (x_0,y_0),(\overline{x}_0,\overline{y}_0)\in \mathrm{G}$，记

$$y=\varphi(x;x_0,y_0) \text{ 与 } y=\varphi(x;\overline{x}_0,\overline{y}_0)$$

分别是 Cauchy 问题 $\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(\overline{x}_0) = \overline{y}_0 \end{cases}$ 的解，则在它们存在的公共区间的任一闭子区间 $[a,b]$ 上（显然 $x_0,\overline{x}_0\in[a,b]$），对 $\forall \varepsilon>0, \exists \delta=\delta(\varepsilon,a,b)>0$，当

$|(x_0,y_0)-(\overline{x}_0,\overline{y}_0)| \le \delta$ **时，**

$$\left|\varphi(x;\overline{x}_0,\overline{y}_0)-\varphi(x;x_0,y_0)\right|<\varepsilon,\quad \forall x\in[a,b].$$

另一种“证明”之大概： 对 $\forall(x_0,y_0),(\overline{x}_0,\overline{y}_0)\in \mathrm{G}$，则

$$y'=f(x,y)$$

在 $y(x_0)=y_0$， $y(\overline{x}_0)=\overline{y}_0$ 下的解（设 $x_0\le\overline{x}_0$）

$$y=\varphi(x;x_0,y_0)\triangleq\varphi_1(x) \text{ 与 } y=\varphi(x;\overline{x}_0,\overline{y}_0)\triangleq\varphi_2(x)$$

以等价积分方程的形式满足

$$\varphi_1(x)-\varphi_2(x)=y_0-\overline{y}_0+\int_{x_0}^{\overline{x}_0}f(s,\varphi_1(s))ds+\int_{\overline{x}_0}^{x}\left[f(s,\varphi_1(s))-f(s,\varphi_2(s))\right]ds$$

从而，由积分的性质和局部 Lipschitz 条件可得

$$\left|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\right|\le\left|y_0-\overline{y}_0\right|+M\,|\,x_0-\overline{x}_0\,|+\int_{\overline{x}_0}^{x}|\,\varphi_1(s)-\varphi_2(s)\,|\,ds$$

由 Gronwall 不等式得： $\forall x\in[a,b]$,

$$\left|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\right|\le\left[\left|y_0-\overline{y}_0\right|+M\,|\,x_0-\overline{x}_0\,|\right]\cdot e^{L(b-a)},$$

所以 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\delta(\varepsilon,a,b)>0$，当 $|(x_0,y_0)-(\overline{x}_0,\overline{y}_0)| \le\delta$ 时，

$$\left|\varphi(x;\overline{x}_0,\overline{y}_0)-\varphi(x;x_0,y_0)\right|<\varepsilon,\quad \forall x\in[a,b].$$

Theorem 3.3.3 **若函数 $f(x,y)$ 在区域 G 内连续且关于 y 满足局部 Lipschitz 条件，则问题：** $\begin{cases} y'=f(x,y), \\ y(x_0)=y_0, \end{cases}$ $(x_0,y_0)\in\mathrm{G}$ **的解** $y=\varphi(x;x_0,y_0)$ **在其存在区间的任一子区间** $[a,b]$ **决定的区域**

$$\left\{(x,y)\mid x\in[a,b],\ \ y\in\mathbb{R}^1\right\}\bigcap \mathrm{G}$$

内是三变元 (x,x_0,y_0) **的连续函数。**

证明 注意到

$$\begin{aligned}\left|\varphi(\overline{x};\overline{x}_0,\overline{y}_0)-\varphi(x;x_0,y_0)\right|<&\left|\varphi(\overline{x};\overline{x}_0,\overline{y}_0)-\varphi(\overline{x};x_0,y_0)\right|\\&+\left|\varphi(\overline{x};x_0,y_0)-\varphi(x;x_0,y_0)\right|\end{aligned}$$

对第一式利用解的连续性，对第二式利用解关于初值的连续依赖性，则可得结

论，即$y=\varphi(x;x_0,y_0)$是三变元(x,x_0,y_0)的连续函数。

四、解与方程参数和初值的关系

在区域$\mathrm{G}_\lambda:(x,y)\in\mathrm{G},\ \lambda\in(\alpha,\beta)$内考虑方程：

$$y'=f(x,y,\lambda).$$

设函数$f(x,y,\lambda)$满足条件(C)：$f(x,y,\lambda)\in\mathcal{C}(\mathrm{G}_\lambda)$且在$\mathrm{G}_\lambda$内（关于$\lambda$一致地）是$y$的局部 Lipschitz 连续函数，即$\forall(\bar{x},\bar{y},\bar{\lambda})\in\mathrm{G}_\lambda$，存在以$(\bar{x},\bar{y},\bar{\lambda})$为心的球$\mathrm{U}\left((\bar{x},\bar{y},\bar{\lambda})\right)\subset\mathrm{G}_\lambda$和常数$L$，使对$\forall(x,y_1,\lambda),(x,y_2,\lambda)\in\mathrm{U}\left((\bar{x},\bar{y},\bar{\lambda})\right)$，有

$$|f(x,y_1,\lambda)-f(x,y_2,\lambda)|\le L|y_1-y_2|,$$

其中L与λ无关。

1、注：显然，在条件(C)下，含参数λ_0的 ODE 的 Cauchy 问题存在唯一解$y=\varphi(x;x_0,y_0,\lambda_0)$。此时，由 Theorem 1，有$y_0=\varphi(x_0;x_0,y_0,\lambda_0)$.

2、解对初值和参数的连续依赖性

Theorem 3.3.4 **设$f(x,y,\lambda)$满足条件(C)，对$(x_0,y_0,\lambda_0)\in\mathrm{G}_\lambda$，记**

$$y=\varphi(x;x_0,y_0,\lambda_0)$$

是 Cauchy 问题：$\begin{cases}y'=f(x,y,\lambda_0),\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$**的解，则对**$\forall(\bar{x}_0,\bar{y}_0,\bar{\lambda}_0)\in\mathrm{G}_\lambda$，**在**$y=\varphi(x;x_0,y_0,\lambda_0)$**与**$y=\varphi(x;\bar{x}_0,\bar{y}_0,\bar{\lambda}_0)$**存在的公共区间的任一闭子区间**$[a,b]$**上，**$\forall\varepsilon>0,\quad\exists\delta=\delta(a,b,\varepsilon)>0$，**只要**$\left|(x_0,y_0,\lambda_0)-(\bar{x}_0,\bar{y}_0,\bar{\lambda}_0)\right|<\delta$，**总有**

$$\left|\varphi(x;x_0,y_0,\lambda_0)-\varphi(x;\bar{x}_0,\bar{y}_0,\bar{\lambda}_0)\right|<\varepsilon,\quad\forall x\in[a,b].$$

3、解关于自变量（初值、参数）的连续性

Theorem 3.3.5 **设$f(x,y,\lambda)$在G_λ内满足条件(C)，则问题**

$$\begin{cases}y'=f(x,y,\lambda),\quad\lambda\in(\alpha,\beta),\\ y(x_0)=y_0,\quad(x_0,y_0)\in\mathrm{G}\end{cases}$$

的解$y=\varphi(x;x_0,y_0,\lambda_0)$在其存在区间的任一闭子区间决定的区域

$$\left\{(x,y,\lambda) \mid x\in[a,b],\ \ y\in\mathbb{R}^1,\lambda\in(\alpha,\beta)\right\}\bigcap \mathrm{G}_\lambda$$

内是变量(x,x_0,y_0,λ)的连续函数。

五、解关于初值的可微性

1、Cauchy 问题解关于初值的可微性

Theorem 3.3.6 若函数$f(x,y)$和$\dfrac{\partial f}{\partial y}$在区域$\mathrm{G}$内连续，则$\begin{cases} y'=f(x,y), \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$的解

$$y=\varphi(x;x_0,y_0)$$

作为x,x_0,y_0的函数在其存在范围内连续可微性。

证明 Step-1 在定理条件下，解$y=\varphi(x;x_0,y_0)$是存在唯一的，这是因为由$\dfrac{\partial f}{\partial y}\in\mathcal{C}(\mathrm{G})$，故$f(x,y)$是$y$的一致局部 Lipchitz 连续函数。从而，$y=\varphi(x;x_0,y_0)$在其存在范围内是$x,x_0,y_0$的连续函数。

Step-2 $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_0}$存在且连续。事实上，对足够小函数$\alpha$，设$|\Delta x_0|<\alpha$，则根据$(x_0,y_0)$和$(x_0+\Delta x_0,y_0)$确定的 Cauchy 问题解

$$y=\varphi(x)\triangleq\varphi(x;x_0,y_0),\quad y=\varphi_\Delta(x)\triangleq\varphi(x;x_0+\Delta x_0,y_0)$$

满足积分方程

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,\varphi(t))dt,$$

$$\varphi_\Delta(x)=y_0+\int_{x_0+\Delta x_0}^{x}f(t,\varphi_\Delta(t))dt,$$

故$\varphi(x;x_0+\Delta x_0,y_0)-\varphi(x;x_0,y_0)=\varphi_\Delta(x)-\varphi(x)$

$$=-\int_{x_0}^{x_0+\Delta x_0}f(t,\varphi_\Delta(t))dt+\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f}{\partial y}\big(t,\varphi(t)+\theta\left(\varphi_\Delta(t)-\varphi(t)\right)\big)\cdot\left(\varphi_\Delta(t)-\varphi(t)\right)dt,$$

其中$\theta\in(0,1)$。为估计并求$\dfrac{\varphi_\Delta(x)-\varphi(x)}{\Delta x_0}$，当$\Delta x_0\to 0$时的极限，注意到$\dfrac{\partial f}{\partial y}$，$\varphi(x)$，$\varphi_\Delta(x)$的连续性，可得

$$\frac{\partial f}{\partial y}\big(t,\varphi(t)+\theta\left(\varphi_\Delta(t)-\varphi(t)\right)\big)=\frac{\partial f}{\partial y}\big(t,\varphi(t)\big)+\gamma_1,$$

$$-\frac{1}{\Delta x_0}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x_0} f(t,\varphi_\Delta(t))dt=-f(x_0,y_0)+\gamma_2,$$

其中γ_1,γ_2是$\Delta x_0\to 0$时的无穷小量且

$$\Delta x_0=0: \quad \gamma_1=\gamma_2=0.$$

以上分别使用了连续性，积分第一中值定理、连续性。故当$\Delta x_0\neq 0$时，有

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(x;x_0+\Delta x_0,y_0)-\varphi(x;x_0,y_0)}{\Delta x_0}&=\frac{\varphi_\Delta(x)-\varphi(x)}{\Delta x_0}\\&=[-f(x_0,y_0)+\gamma_2]+\int_{x_0}^{x}\left[\frac{\partial f(t,\varphi(t))}{\partial y}+\gamma_1\right]\cdot\frac{\varphi_\Delta(t)-\varphi(t)}{\Delta x_0}dt\end{aligned},$$

可见，函数$z(x)=\dfrac{\varphi_\Delta(x)-\varphi(x)}{\Delta x_0}$是 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\dfrac{dz}{dx}=\left[\dfrac{\partial f(x,\varphi(x))}{\partial y}+\gamma_1(x)\right]z(x),\\ z(x_0)=-f(x_0,y_0)+\gamma_2=z_0\end{cases}$$

的解，其中视$\Delta x_0\neq 0$为参数。

由解对初值和参数的连续性定理，$z(x)=\dfrac{\varphi_\Delta(x)-\varphi(x)}{\Delta x_0}$是$x,x_0,z_0,\Delta x_0$的连续函

数，从而$\lim_{\Delta x_0\to 0}z(x)$存在，即

$$\lim_{\Delta x_0\to 0}\frac{\varphi(x;x_0+\Delta x_0,y_0)-\varphi(x;x_0,y_0)}{\Delta x_0}$$

存在，由定义$\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_0}$存在。易知$\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_0}$满足 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{\partial f(x,\varphi(x))}{\partial y}z(x),\\ z(x_0)=-f(x_0,y_0)\end{cases}$$

解得$z(x)=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_0}=-f(x_0,y_0)e^{\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(t,\varphi(t))}{\partial y}dt}$，故$\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_0}$是$x,x_0,y_0$的连续函数。

Step-3 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_0}$存在且连续。记$\overline{\varphi}_\Delta(x)\triangleq y=\varphi(x;x_0,y_0+\Delta y_0)$是由$(x_0,y_0+\Delta y_0)$

$(|\Delta y_0|\le\alpha)$确定的解，则易知$\dfrac{\overline{\varphi}_\Delta(x)-\varphi(x)}{\Delta y_0}$满足 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\dfrac{dz}{dx}=\left[\dfrac{\partial f(x,\varphi(x))}{\partial y}+\gamma_3(x)\right]z(x),\\ z(x_0)=1,\end{cases}$$

其中 $\gamma_3\to 0\ (\Delta y_0\to 0)$，故

$$\frac{\overline{\varphi}_\Delta(x)-\varphi(x)}{\Delta y_0}=\exp\left(\int_{x_0}^{x}\left[\frac{\partial f(t,\varphi(t))}{\partial y}+\gamma_3(t)\right]dt\right),$$

令 $\Delta y_0\to 0$ 得 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_0}=\lim_{\Delta y_0\to 0}\dfrac{\overline{\varphi}_\Delta(x)-\varphi(x)}{\Delta y_0}=\exp\left(\int_{x_0}^{x}\dfrac{\partial f(t,\varphi(t))}{\partial y}dt\right)$。

从而 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_0}$ 是 x,x_0,y_0 的连续函数。

Step-4 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$ 的存在及连续性。由于 $y=\varphi(x;x_0,y_0)$ 是问题 $\begin{cases}y'=f(x,y),\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$ 的连续可微解，故视 φ 为多元函数，即得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{dy}{dx}=f(x,y)=f(x,\varphi(x;x_{,0}\,y_0))$$

是 x,x_0,y_0 的连续函数。

Step-5 由于 $\varphi(x;x_{,0}\,y_0)$ 的偏导数均连续，故 φ 可微。

§3.4 奇解和包络(envelope)

一、奇解和包络

1、曲线族的包络：设有曲线族 C，称曲线 l 是 C 的包络，若过 l 上的任一点处均有 C 中某一曲线在此点处与 l 相切。

2、奇解：在一个 ODE，其积分曲线族的包络仍是此 ODE 的一条积分曲线，称其对应的解为方程的奇解。

3、注：通俗地说，所谓奇解是指不能由通解得到的一个特解。

二、曲线族包络的求解与判别——判别曲线

一般而言，曲线族(单参数）Σ：

$$\Phi(x,y,c)=0,$$

(其中c是参数)不一定有包络曲线，如同心圆族、平行直线族等。

当一曲线是上面曲线族的包络时，记其方程为

$$x=\varphi(t), y=\psi(t), \quad t\in(\alpha,\beta),$$

则包络上任一点对应地均在某一曲线（对应于参数c）上，从而$\Phi(x,y,c)=0$即

$$\Phi(\varphi(t),\psi(t),c)=0，$$

且在这样的点处，包络与相应的曲线$\Phi(x,y,c)=0$相切。

此时视c为常数，对t求导得

$$\Phi_1'\cdot\varphi'(t)+\Phi_2'\cdot\psi'(t)=0,$$

即切向量$\left(\varphi'(t),\psi'(t)\right)$与法向量$\left(\Phi_1',\ \Phi_2'\right)$正交。同时

$$\Phi(\varphi(t),\psi(t),c(t))\equiv 0, \quad \forall t\in[\alpha,\beta].$$

两边关于t求导，得

$$\Phi_1'\cdot\varphi'(t)+\Phi_2'\cdot\psi'(t)+\Phi_c'\cdot c'(t)=0,$$

进而$\Phi_c'\cdot c'(t)=0$。

显然$c'(t)\neq 0,$，即不同t（对应于包络上的不同点）对应的c不相等，故

$$0\equiv\Phi_c'\left(\varphi(t),\psi(t),c(t)\right)=\Phi_c'(x,y,c).$$

Theorem 3.4.1 *若曲线Γ是单参数曲线族$\Phi(x,y,c)=0$的包络曲线，则Γ上的点必满足*

$$\begin{cases}\Phi(x,y,c)=0,\\ \Phi_c'(x,y,c)=0.\end{cases}$$

从而包络曲线必包含在满足上述方程组的曲线中(消去c可得)。

三、一阶 ODE 奇解的判别——p判别曲线

1、性质 由奇解的定义，一阶 ODE 通解对应的解放曲线族的包络（若存在）必是奇解，反之，ODE 的奇解也必是通解的包络。

2、性质 由奇解定义，其上每一点处至少还有方程的另一解存在，从而在奇解上的每一点处，解均不是为唯一的。

3、求奇解的过程 求解 ODE$\longrightarrow$通解$\longrightarrow$包络(奇解)。

4、p-判别曲线

由一阶隐式 ODE：$F(x,y,y')=0$的存在唯一性定理可知，当$F(x,y,y')$连续可微时，$\dfrac{\partial F}{\partial y'}\neq 0$保证了解的唯一性，因而奇解(若存在)将使

$$\frac{\partial F}{\partial y'}=0,\quad F(x,y,y')=0$$

Theorem 3.4.2 一阶 ODE：$F\left(x,y,\dfrac{dy}{dx}\right)=0$的可能的奇解包含在由方程组

$$\begin{cases}F(x,y,p)=0,\\ F_p'(x,y,p)=0\end{cases}$$

消去p得到的曲线中，其中$F(\cdot,\cdot,\cdot)$是$x,\,y,\,p$的连续可微函数。

5、注：$p-$判别曲线法只适用于求隐式方程$F(x,y,y')=0$的奇解，对显式方程$y'=f(x,y)$无效，因为总有$\dfrac{\partial F}{\partial y'}=-1\neq 0$，这时可用$C-$判别曲线。

四、Clairaut 方程及其包络特征

形如$y=xp+f(p)$的方程称为 Clairaut 方程，其中$p=y',\ f(p)$是p的连续可微函数。

令$p=y'$，对$y=xp+f(p)$两边关于x求导得

$$p=xp'+p+f'(p)\cdot p',$$

从而$\dfrac{dp}{dx}\big(x+f'(p)\big)=0.$ 若$\dfrac{dp}{dx}=0$，则$p=c$，代入原方程有$y=cx+f(c)$，其中c是

任意常数。这是一个单参数曲线族。若 $x+f'(p)=0$，则由 $\begin{cases} x+f'(p)=0, \\ y=xp+f(p) \end{cases}$ 消去 p 得方程的另一解，它是包络。事实上，令

$$F(x,y,y')=xy'+f(y')-y,$$

则 $\begin{cases} x+f'(p)=0, \\ y=xp+f(p) \end{cases}$ 正是隐式一阶 ODE

$$F(x,y,y')=xy'+f(y')-y=0$$

（即方程）的 p-判别曲线

$$\begin{cases} F(x,y,y')=0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y'}(x,y,y')=0. \end{cases}$$

Chapter 4　高阶微分方程
（Higher order ODEs)

二阶及其以上的 ODE 称为高阶 ODE。

高阶 ODE 的主要研究手段是引入新的变量降阶为低阶（一般为一阶）ODE 组。但是对高阶 LODE，也可以直接类比于线性代数中线性方程组的理论进行研究，一方面，LODE 的解可以由其齐次部分的通解和非齐次对应的一个特解表示，另一方面齐次部分的通解构成一个线性空间。特别对常系数的高阶 LODE，借助于矩阵特征值理论可以对其作出详尽的通解。

同时，在应用，一方面 LODE 是 NLODE 的基础，另一方面它本身也有直接的应用，特别在物理、力学、工程技术（特别是自动化领域）等领域中。

§4.1　LODE 的一般理论

一、LODE 的一般形式及其存在唯一性

考虑如下 n 阶 LODE

$$x^{(n)}(t)+a_1(t)x^{(n-1)}(t)+\cdots+a_{n-1}(t)x'(t)+a_n(t)x(t)=f(t), \tag{4.1.1}$$

其中 $a_i(t)(i=1,2,\cdots,n),\ f(t)\in\mathcal{C}[a,b]$.

1、基本概念

n-order homogeneous LODE

n-order inhomogeneous LODE

2、Cauchy 问题解的存在唯一性

Theorem 4.1.1 设 $a_i(t)(i=1,2,\cdots,n),\ f(t)\in\mathcal{C}[a,b]$，则对 $\forall x_0,\ x_0',\cdots,\ x_0^{(n-1)}$, $\forall t_0\in[a,b]$，n 阶非齐次 LODE(4.1.1)存在唯一解 $x=\varphi(t)\in\mathcal{C}^{(n)}[a,b]$，满足

$$\varphi^{(k)}(t_0)=x_0^{(k)},\quad k=0,1,\cdots,n-1.$$

二、函数的线性相关性与朗斯基行列式

1、函数组的线性相关与无关 设有函数 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_k(t),\ t\in[a,b]$，若存在不全为零的常数 $c_1,c_2,\cdots,c_k$，使

$$c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_kx_k(t)\equiv 0,\ \forall t\in[a,b]$$

则称 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_k(t)$ 在 $[a,b]$ 上线性相关；否则称它们是线性无关的。

2、朗斯基行列式

给定 $[a,b]$ 上的 k 个 $k-1$ 次可微函数 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_k(t)$，称行列式

$$\mathcal{W}[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_k(t)] \equiv \mathcal{W}(t) \triangleq \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_k(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots & x_k'(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(k-1)}(t) & x_2^{(k-1)}(t) & \cdots & x_k^{(k-1)}(t) \end{vmatrix}$$

为函数$x_1(t),x_2(t),\cdots,x_k(t)$的朗斯基行列式。

3、函数的线性相关性与其朗斯基行列式的关系

Theorem 4.1.2 **若函数$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)$在$[a,b]$上线性相关，则它们的$\mathcal{W}(t) \equiv 0, \forall t \in [a,b]$；反之，不真。**

Proof 由已知，存在k个不全为零的常数$c_1,c_2,\cdots,c_k$使得

$$c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_kx_k(t) \equiv 0,\ \forall t \in [a,b],$$

依次对上式求出直到$k-1$阶导，得

$$c_1x_1^{(l)}(t)+c_2x_2^{(l)}(t)+\cdots+c_nx_n^{(l)}(t) \equiv 0 \quad (l=0,1,\cdots,k-1)。$$

从而，$\forall t \in [a,b]$，齐次线性代数方程组

$$\begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_k(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots & x_k'(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(k-1)}(t) & x_2^{(k-1)}(t) & \cdots & x_k^{(k-1)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

存在非零解$(c_1,c_2,\cdots,c_k)^T$，因此它的系数行列式$\mathcal{W}(t) \equiv 0, \forall t \in [a,b]$。

考虑到应用时更便捷，给出 Theorem 4.1.2 的逆否命题如下：

在$[a,b]$上，若函数$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)$的 Wronsky 行列式$\mathcal{W}(t)$不恒为零，则$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)$在$[a,b]$上线性无关。

三、齐次 LODE 解的性质与结构

考虑如下的齐次 LODE

$$x^{(n)}(t)+a_1(t)x^{(n-1)}(t)+\cdots+a_{n-1}(t)x'(t)+a_n(t)x(t)=0. \qquad (4.1.2)$$

则依次有如下几个性质。

Theorem 4.1.3　LODE(4.1.2)的任意有限个解的任意线性组合仍是(4.1.2)的解。

Theorem 4.1.4 设$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$是(4.1.2)在$[a,b]$上的解，若$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$线性无关，则

$$\mathcal{W}(t) \equiv \mathcal{W}\left[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)\right] \neq 0, \quad \forall t \in [a,b]。$$

Proof　反证，设$\exists t_0 \in [a,b]$使$\mathcal{W}(t_0) = 0$，则以$\mathcal{W}(t_0)$为系数行列式的齐次线性代数方程组

$$c_1 x_1^{(k)}(t_0) + c_2 x_2^{(k)}(t_0) + \cdots + c_n x_n^{(k)}(t_0) \equiv 0 \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1) \tag{4.1.3}$$

有非零解$c_1, c_2, \cdots, c_n$，从而函数

$$x(t) \triangleq c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_n x_n(t), \quad t \in [a,b]$$

是齐次 LODE(4.1.2)的解，且满足初始条件

$$x(t_0) = x'(t_0) = \cdots = x^{(n-1)}(t_0) = 0.$$

注意到零函数同样满足上述初始条件和齐次 LODE(4.1.2)，则由解的唯一性知$x(t) \equiv 0, t \in [a,b]$，即

$$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_n x_n(t) \equiv 0, \quad \forall t \in [a,b]。$$

由$c_1, c_2, \cdots, c_n$不全为零知与已知矛盾。

注：由 Theorem 4.1.2 的逆否命题和 Theorem 4.1.4 知，LODE(4.1.2)的任意n个解的 Wronsky 行列式$\mathcal{W}(t)$在$[a,b]$上恒等于零或恒不等于零。这一结论也可以参见本节后的习题第 5 题。

Theorem 4.1.5　n阶齐次 LODE(4.1.2)存在n个线性无关的解

$$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)。$$

Proof 依次用以下n个初始条件

$$\left(x(t_0), x'(t_0), \cdots, x^{(n-1)}(t_0)\right)^T = e_k, \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

出发可获得相应的几个解$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$，则

$$\mathcal{W}[x_1(t_0), x_2(t_0), \cdots, x_n(t_0)] = |\mathrm{I}_n| = |e_1, e_2, \cdots, e_n| = 1 \neq 0,$$

从而，由 Theorem 4.1.4 可知，

$$\mathcal{W}[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)] \neq 0, \forall t \in [a,b],$$

再由 Theorem 4.1.2，$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$线性无关。

注：在 Theorem 4.1.5 的证明中，$\left(x(t_0), x'(t_0), \cdots, x^{(n-1)}(t_0)\right)^T$ 不局限于 $e_k (k=1, \cdots, n)$，可以任取n个线性无关的向量$\gamma_k (k=1, \cdots, n)$作为初始条件

$$\left(x(t_0), x'(t_0), \cdots, x^{(n-1)}(t_0)\right)^T = \gamma_k \quad (k=1, \cdots, n)$$

求出相应的线性无关解$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$。

以下是齐次 LODE(4.1.2)解的结构定理。

Theorem 4.1.6 **给定 LODE(4.1.2)的任意n个线性无关的解$x_1(t), x_2(t), \cdots,$ $x_n(t)$，其任一通解可表示为**

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_n x_n(t), \quad t \in [a,b],$$

其中$c_1, c_2, \cdots, c_n$是任意常数。

Proof 易知，对任意常数$c_1, c_2, \cdots, c_n$，$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_n x_n(t)$是齐次 LODE(4.1.2)的解，且由行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial c_1} & \frac{\partial x}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial x}{\partial c_n} \\ \frac{\partial x'}{\partial c_1} & \frac{\partial x'}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial x'}{\partial c_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x^{(n-1)}}{\partial c_1} & \frac{\partial x^{(n-1)}}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial x^{(n-1)}}{\partial c_n} \end{vmatrix} = \mathcal{W}[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)] \neq 0, \quad \forall t \in [a,b]$$

知常数$c_1, c_2, \cdots, c_n$相互独立。

可见$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_n x_n(t)$是齐次 LODE(4.1.2)的通解。

另一方面，对齐次 LODE(4.1.2)的满足任一初始条件

$$\left(x(t_0), x'(t_0), \cdots, x^{(n-1)}(t_0)\right) = \left(x_0, x_0', \cdots, x_0^{(n-1)}\right) \tag{4.1.4}$$

的解$x(t)$，存在常数$c_1, c_2, \cdots, c_n$使得$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_nx_n(t)$。

事实上，令形如$c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_nx_n(t)$的函数满足初始条件(4.1.4)，则

$$\begin{cases} c_1x_1(t_0) + c_2x_2(t_0) + \cdots + c_nx_n(t_0) = x_0, \\ c_1x_1'(t_0) + c_2x_2'(t_0) + \cdots + c_nx_n'(t_0) = x_0, \\ \qquad\quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ c_1x_1^{(n-1)}(t_0) + c_2x_2^{(n-1)}(t_0) + \cdots + c_nx_n^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}, \end{cases} \tag{4.1.5}$$

的系数行列式为$\mathcal{W}(t_0)$，由 Theorem 4.1.4 $\mathcal{W}(t_0) \neq 0$，从而有唯一的$c_1, c_2, \cdots, c_n$，满足(4.1.5)。以此为系数可得满足(4.1.4)的任一解$x(t)$有表示$x(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot x_k(t)$。

Theorem 4.1.7　齐次 LODE(4.1.2)的所有解构成一个n维线性空间，且称其任一组n个无关解为其基本解组。

四、非齐次(Inhomogeneous) LODE 和常数变易法

1、齐次 LODE(4.1.2)与非齐次 LODE(4.1.1)解的关系

Theorem 4.1.8 若$\overline{x}(t)$是(4.1.1)的解，$x(t)$是(4.1.2)的解，则$x(t) + \overline{x}(t)$是(4.1.1)的解；反之，(4.1.1)的任意两个解之差是(4.1.2)的一个解。

Theorem 4.1.9 任给齐次 LODE(4.1.2)的任一基本解组$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)$，任给非齐次 LODE(4.1.1)的任一解$\overline{x}(t)$，则(4.1.1)的任一解$x(t)$可表示为

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_nx_n(t) + \overline{x}(t),$$

其中$c_1, c_2, \cdots, c_n$为任意常数。

2、非齐次 LODE(4.1.1)的特解——常数变易法

设$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)$是(4.1.2)的基本解组，则(4.1.1)有通解

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_nx_n(t) + \overline{x}(t).$$

令非齐次 LODE(4.1.1)有特解

$$x_*(t)=c_1(t)x_1(t)+c_2(t)x_2(t)+\cdots+c_n(t)x_n(t),$$

代入(4.1.1)即得$x_1(t),x_2(t),\cdots,x_k(t)$应该满足的约束 ODE。

问题：约束 ODE 形式上过于复杂，难于求解；决定n个函数$c_k(t)(k=1,2,\cdots,n)$仅有一个约束 ODE 是不够的。

解决途径：人为制造另外的$n-1$个约束条件，在将约束 ODE 大大地简化的同时，唯一地定出一组$c_k(t)(k=1,2,\cdots,n)$。

具体过程：依次计算$x(t)=\sum_{k=1}^{n}c_k\cdot x_k(t)$的各阶导数，并令与$c_1'(t),c_2'(t),\cdots,c_k'(t)$有关的部分之和均为零，则可得

$$c_1'(t)x_1^{(l)}(t)+c_2'(t)x_2^{(l)}(t)+\cdots+c_n'(t)x_n^{(l)}(t)=0,\quad l=0,1,2,\cdots,n-2, \tag{4.1.6}$$

$$x_*^{(l)}(t)=c_1(t)x_1^{(l)}(t)+c_2(t)x_2^{(l)}(t)+\cdots+c_n(t)x_n^{(l)}(t),\quad l=1,2,\cdots,n-1. \tag{4.1.7}$$

对(4.1.7)中的函数$x_*^{(n-1)}(t)$再求导，得

$$\begin{aligned}x_*^{(n)}(t)&=c_1(t)x_1^{(n)}(t)+c_2(t)x_2^{(n)}(t)+\cdots+c_n(t)x_n^{(n)}(t)\\&\quad+c_1'(t)x_1^{(n-1)}(t)+c_2'(t)x_2^{(n-1)}(t)+\cdots+c_n'(t)x_n^{(n-1)}(t)\end{aligned} \tag{4.1.8}$$

注意到$x_*(t)$是(4.1.1)的解，依次将$x_*^{(l)}(t)$，$l=1,2,\cdots,n-1$时的(4.1.7)和(4.1.8)代入非齐次 LODE(4.1.1)，结合(4.1.6)可得

$$c_1'(t)x_1^{(n-1)}(t)+c_2'(t)x_2^{(n-1)}(t)+\cdots+c_n'(t)x_n^{(n-1)}(t)=f(t). \tag{4.1.9}$$

将(4.1.9)与(4.1.6)中的$n-1$个方程联立，可得$c_k'(t)\ (k=1,2,\cdots,n)$，进而积分可得$c_k(t)\ (k=1,2,\cdots,n)$，代入$x_*(t)$中可得非齐次 LODE 的通解。

§4.2 常系数 LODE 的求解

对一般的 LODE(4.1.1)和(4.1.2)的解通常只有理论结果，因为(4.1.2)的基本解组 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)$ 难以准确得到。但是对常系数的 LODE 则可以只通过解一个特定的<u>**线性代数方程组**</u>而获得其通解。

一、基本准备——复值函数和 LODE 的复值解

1、复值函数： $z(t): t \in [a,b] \to \varphi(t) + \mathrm{i}\psi(t) \in \mathbb{C}$，其中 $\varphi(t), \psi(t)$ 是 $[a,b]$ 上的实值函数，$\mathrm{i}^2 = -1$。

2、复值函数的极限和连续：

$$\lim_{t \to t_0} z(t) = \lim_{t \to t_0} \varphi(t) + \mathrm{i} \cdot \lim_{t \to t_0} \psi(t);$$

$$z(t) \text{在} t_0 \text{连续} \Leftarrow\!=\!=\!\Rightarrow \varphi(t), \psi(t) \text{在} t_0 \text{连续；}$$

$$z(t) \text{在} [a,b] \text{上连续} \Leftarrow\!=\!=\!\Rightarrow \varphi(t), \psi(t) \text{在} [a,b] \text{中任一点连续；}$$

3、复值函数的导数及其求导法则

(1) $z(t)$ 在 t_0 在可导，若 $\lim_{t \to t_0} \dfrac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0}$ 存在，且导数为

$$z'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0} = \varphi'(t_0) + \mathrm{i}\psi'(t_0);$$

(2) $z(t)$ 区间 $[a,b]$ 上可导，若 $z(t)$ 在 $[a,b]$ 中任一点可导；

(3) 求导法则

线性运算、乘法运算

4、复值函数的特例——指数函数

对 $K \triangleq \alpha + \mathrm{i}\beta$（其中 α, β 为实数），t 为实变量，定义函数

$$e^{Kt} = e^{\alpha t}(\cos \beta t + \mathrm{i} \sin \beta t),$$

则 e^{Kt} 满足性质： $\overline{e^{Kt}} = e^{\overline{K}t}$， $e^{(K_1 + K_2)t} = e^{K_1 t} \cdot e^{K_2 t}$，

$$\frac{de^{Kt}}{dt} = Ke^{Kt} \text{（} t \text{为实变量），}$$

$$\frac{d^n}{dt^n}\left(e^{Kt}\right) = K^n e^{Kt}$$

5、LODE 的复值解及其性质

对 LODE：$\mathcal{L}x(t)=f(t)$，若复值函数 $z(t),\, t\in[a,b]$，满足

$$\mathcal{L}z(t)=f(t),\quad \forall t\in[a,b]$$

则称函数 $z(t)$ 为 $\mathcal{L}x(t)=f(t)$ 的一个复值解。

Theorem 4.2.1 **设齐次 LODE**

$$\mathcal{L}x(t)=x^{(n)}(t)+a_1(t)x^{(n-1)}(t)+\cdots+a_n(t)x(t)=0 \tag{4.1.2}$$

中系数 $a_k(t)\ (k=1,2,\cdots,n)$ **均为实值函数，若**

$$z(t)=\varphi(t)+\mathrm{i}\psi(t)$$

是 $\mathcal{L}x(t)=0$ **的复值解，则** $\varphi(t),\psi(t)$ **与** $\overline{z(t)}=\varphi(t)-\mathrm{i}\psi(t)$ **均为** $\mathcal{L}x(t)=0$ **的解。**

Theorem 4.2.2 **若** $x(t)=U(t)+\mathrm{i}\,V(t)$ **是** LODE

$$\mathcal{L}x(t)=u(t)+\mathrm{i}v(t)$$

的复值解，其中 $u(t),v(t)$ **和系数函数** $a_k(t)\ (k=1,2,\cdots,n)$ **均为实值函数，则** $U(t),V(t)$ **分别是** LODE $\mathcal{L}x(t)=u(t)$ **和** $\mathcal{L}x(t)=v(t)$ **的解。**

二、常系数齐次 LODE 的通解——待定指数函数法

考虑常系数齐次 LODE

$$\mathcal{L}x(t)=x^{(n)}(t)+a_1x^{(n-1)}(t)+\cdots+a_{n-1}x'(t)+a_nx(t)=0, \tag{4.2.1}$$

其中 $a_k\ (k=1,2,\cdots,n)$ 均为常数。

考虑到(4.2.1)的特定形式，可以设 $\mathcal{L}x(t)=0$ 有形如 $x(t)=e^{\lambda t}$ 的解，则

$$\mathcal{L}\left(e^{\lambda t}\right)=\left(\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n\right)e^{\lambda t}\triangleq F(\lambda)e^{\lambda t},$$

从而 $x(t)=e^{\lambda t}$ 是 $\mathcal{L}x(t)=0$ 的解，当且仅当 $F(\lambda)=0$ 有根 λ。

称 $F(\lambda)=0$ 为 $\mathcal{L}x(t)=0$ 的**特征方程**，其根 λ 称为 $\mathcal{L}x(t)=0$ 的**特征根**。

1、特征根均为单根时(4.2.1)的通解

当$F(\lambda)=0$有n个彼此不等的实根$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$时，$\mathcal{L}x(t)=0$有$n$个线性无关解

$$e^{\lambda_1 t},\ e^{\lambda_2 t},\ \cdots,\ e^{\lambda_n t},$$

由定义，它们是(4.2.1)的一个基本解组，从而(4.2.1)有通解

$$x(t)=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}+\cdots+c_n\ e^{\lambda_n t}。$$

当$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$存在复数时，必成对出现，利用方程解的性质 Theorem 4.2.1、Theorem 4.2.2 可将相应的根（$\lambda=\alpha+\mathrm{i}\beta$）

$$e^{\lambda t},\quad e^{\bar{\lambda} t},$$

等价地，可以代换为两个无关的实值函数解

$$e^{\alpha t}\cos\beta t,\quad e^{\alpha t}\sin\beta t,$$

这是因为$e^{\alpha t}\cos\beta t=\frac{1}{2}\left(e^{\lambda t}+e^{\bar{\lambda}t}\right),\quad e^{\alpha t}\sin\beta t=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\lambda t}-e^{\bar{\lambda}t}\right)$。

2、重特征根情形的通解

若特征方程$F(\lambda)=0$有k重根$\lambda=\lambda_0$，则

$$F(\lambda_0)=F'(\lambda_0)=\cdots=F^{(k-1)}(\lambda_0)=0,\quad F^{(k)}(\lambda_0)\neq 0 \tag{4.2.2}$$

因为$e^{\lambda_0 t}$是常系数 LODE(4.2.1)的解，故对应于λ_0的其它无关解$y(t)$与$e^{\lambda_0 t}$线性无关。因此，如下表示

$$y(t)=e^{\lambda_0 t}\ u(t),$$

中的$u(t)$不是常数，否则与$y(t)$，$e^{\lambda_0 t}$的线性无关性矛盾。

将$y(t)=e^{\lambda_0 t}\ u(t)$代入方程(4.2.1)，由$n$阶导数的 Leibnitz 公式可得$u(t)$满足

$$\begin{aligned}u^{(n)}(t)&+\frac{1}{(n-1)!}F^{(n-1)}(\lambda_0)u^{(n-1)}(t)+\cdots+\frac{1}{3!}F^{(3)}(\lambda_0)u^{(3)}(t)\\&+\frac{1}{2!}F''(\lambda_0)u''(t)+\frac{1}{1!}F'(\lambda_0)u'(t)+\frac{1}{0!}F(\lambda_0)u(t)=0,\end{aligned}$$

由(4.2.2)，上式可化简为

$$u^{(n)}(t)+\frac{1}{(n-1)!}F^{(n-1)}(\lambda_0)u^{(n-1)}(t)+\cdots+\frac{1}{k!}F^{(k)}(\lambda_0)u^{(k)}(t)=0.$$

可见任意一个与$e^{\lambda_0 t}$无关的解$y(t)$，相应的$u(t)$总满足以上方程。

为取最简单形式的$u(t)$，令$u^{(k)}(t)=0$，则可得

$$u(t)=1,\ t,\ t^2,\ \cdots,\ t^{k-1}.$$

易知，$e^{\lambda_0 t}, te^{\lambda_0 t}, \cdots, t^{k-1}e^{\lambda_0 t}$线性无关，这与$\lambda_0$是$k$重根，从而应解得$k$个线性无关解是一致的。

3、复特征根情形的通解

同样，当λ中有复数重根(设其重数为k)时，因$F(\lambda)=0$是实系数的，故其复根成对出现；从而可将$\lambda=\alpha+\mathrm{i}\beta$与$\overline{\lambda}=\alpha-\mathrm{i}\beta$对应的$2k$个无关复值解

$$e^{\lambda_0 t}, te^{\lambda_0 t}, \cdots, t^{k-1}e^{\lambda_0 t};\ e^{\overline{\lambda_0}\,t}, te^{\overline{\lambda_0}\,t}, \cdots, t^{k-1}e^{\overline{\lambda_0}\,t}$$

重新替换为$2k$个线性无关的实值解：

$$\begin{array}{llll} e^{\alpha t}\cos\beta t, & te^{\alpha t}\cos\beta t, & \cdots, & t^{k-1}e^{\alpha t}\cos\beta t, \\ e^{\alpha t}\sin\beta t, & te^{\alpha t}\sin\beta t, & \cdots, & t^{k-1}e^{\alpha t}\sin\beta t. \end{array}$$

三、非齐次常系数 LODE 的求解——比较系数法与 Laplace 变换法

考虑常系数非齐次 LODE $\mathcal{L}x(t)=f(t)$，其中方程系数是常数，$f(t)$连续。

除了对一般的$f(t)$使用§4.1 中的方法求方程的解以外，还可针对某些特殊形式的$f(t)$使用更为简便的方法。

1、比较系数法

(1) 设$f(t)=P_m(t)e^{\lambda t}$，其中$P_m(t)$为次多项式，λ是常数。

此时，非齐次 LODE $\mathcal{L}x(t)=f(t)$的解有形式

$$x(t)=Q(t)e^{\lambda t},$$

其中$Q(t)$为关于t的多项式。代入方程，类似第二段可得$Q(t)$满足

$$Q^{(n)}(t)+\frac{1}{(n-1)!}F^{(n-1)}(\lambda)Q^{(n-1)}(t)+\cdots+\frac{1}{3!}F^{(3)}(\lambda)Q^{(3)}(t)$$
$$+\frac{1}{2!}F''(\lambda)Q''(t)+\frac{1}{1!}F'(\lambda)Q'(t)+\frac{1}{0!}F(\lambda)Q(t)=P_m(t).$$

若λ是特征方程$F(\lambda)=0$的k $(1\le k\le n)$重根，则

$$F(\lambda)=F'(\lambda)=\cdots=F^{(k-1)}(\lambda)=0,\quad F^{(k)}(\lambda)\neq 0.，$$

$$Q^{(n)}(t)+\frac{1}{(n-1)!}F^{(n-1)}(\lambda)Q^{(n-1)}(t)+\cdots+\frac{1}{k!}F^{(k)}(\lambda)Q^{(k)}(t)=P_m(t)，\qquad (4.2.3)$$

故$Q^{(k)}(t)$是m次多项式，取最简单形式，则

$$Q(t)=t^k(b_0+b_1t+\cdots+b_mt^m).$$

代入上述关于$Q(t)$的方程(4.2.3)，比较等式左右两边的幂次可得

$$b_0,\quad b_1,\quad \cdots,\quad b_m.$$

若λ不是$F(\lambda)=0$的特征根，则$Q(t)$是m次多项式

$$Q(t)=b_0+b_1t+\cdots+b_mt^m.$$

同样代入关于$Q(t)$的方程(4.2.3)比较两端同幂次系数可得$b_0,b_1,\cdots,b_m$。

(2) 设$f(t)=[A(t)\cos\beta t+B(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}$，其中$\alpha,\beta$为常数，$A(t),B(t)$是$t$的实系数多项式，则求非齐次 LODE $\mathcal{L}x(t)=f(t)$的特解$x^*(t)$可以转化为前一种情形。

事实上，由 Euler 公式可知$\cos\beta t=\dfrac{e^{\mathrm{i}\beta t}+e^{-\mathrm{i}\beta t}}{2}$, $\sin\beta t=\dfrac{e^{\mathrm{i}\beta t}-e^{-\mathrm{i}\beta t}}{2i}$，故

$$f(t)=\left(\frac{A(t)}{2}+\frac{B(t)}{2i}\right)e^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)t}+\left(\frac{A(t)}{2}-\frac{B(t)}{2i}\right)e^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)t}，$$

记$P_m(t)=\dfrac{A(t)}{2}+\dfrac{B(t)}{2i}$, $\lambda=\alpha+\mathrm{i}\beta$，且$m$表示多项式$A(t),B(t)$的幂次的最大者，则易知(其中$f_0(t)\triangleq P_m(t)\,e^{\lambda t}$)

$$f(t)=P_m(t)\,e^{\lambda t}+\overline{P_m(t)}\,e^{\bar{\lambda}t}=f_0(t)+\overline{f_0(t)}。$$

由 Theorem 4.2.2(叠加原理)可知，若$x_0(t)$是非齐次 LODE $\mathcal{L}x(t)=f_0(t)$的一个解，则$\overline{x_0(t)}$是非齐次 LODE $\mathcal{L}x(t)=\overline{f_0(t)}$的一个解，且

$$x^*(t) = x_0(t) + \overline{x_0(t)}\text{。}$$

可见，若求 $\mathcal{L}x(t) = f(t)$ 的特解 $x^*(t)$，只要求 $\mathcal{L}x(t) = P_m(t)\, e^{\lambda t}$ 的特解 $x_0(t)$ 即可，这里 $f_0(t) \triangleq P_m(t)\, e^{\lambda t}$ 属于前一种情形。进而，可知 $\mathcal{L}x(t) = f(t)$ 有形如

$$t^k[P(t)\cos\beta t + Q(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}$$

的根，其中 k 为特征方程 $F(\lambda) = 0$ 的根 $\alpha + \mathrm{i}\beta$ 的重数，$k \geq 0$。

2、Laplace 变换法

(1) Laplace 变换及其性质

对 $[0, +\infty)$ 上的函数 $f(t)$，设 $|f(t)| \leq Me^{\sigma t}$, M, σ 为正常数，称

$$F : s \in \mathbb{C} \to F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

为函数 $f(t)$ 的 Laplace 变换，记为 $F(s) = \mathbf{L}[f]$。

易知，Laplace 变换有如下几个简单性质：

(a) **定义域：** $\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, s > \sigma\}$；

(b) **线性性质：** $\mathbf{L}[af + bg] = a\mathbf{L}[f] + b\mathbf{L}[g], \quad a, b$ 是常数；

(c) 设 $f^{(n)}(t)$ 存在，则

$$\boxed{\mathbf{L}[f^{(n)}(t)] = s^n\mathbf{L}[f] - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).}$$

(2) **求解过程**　对常系数 LODE $\mathcal{L}x(t) = f(t)$ 两边作 Laplace 变换, 则

$$\begin{aligned}\left(s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n\right)X(s) = F(s) &+ \left(s^{n-1} + a_1 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\right)x_0 \\ &+ \left(s^{n-2} + a_1 s^{n-3} + \cdots + a_{n-2}\right)x_0' + \cdots + x_0^{(n-1)},\end{aligned}$$

其中 $F(s) = \mathbf{L}[f]$。记 $A(s) = \left(s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n\right)$，且

$$B(s) = \left(s^{n-1} + a_1 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\right)x_0 + \left(s^{n-2} + a_1 s^{n-3} + \cdots + a_{n-2}\right)x_0' + \cdots + x_0^{(n-1)},$$

则 $X(s) = \dfrac{F(s) + B(s)}{A(s)}$，且右端可以分解为部分分式之和(请参照《数学分析》)。

分别求各部分分式的 Laplace 逆变换，可得解 $X(s)$ 的 Laplace 逆变换 $x(t)$。

3、注：§4.1 中求 $\mathcal{L}x(t) = f(t)$ 特解的方法是最一般的，而本节中的比较系数

法、Laplace 变换法是针对特殊的 $f(t)$ 的特定方法，对其它形式的 $f(t)$ 并不适用。

详细而言，本节的两种方法适用的范围和限制如下：

(1) **比较系数法**：$f(t)$ 应有指数函数与多项式乘积的形式；

(2) **Laplace 变换法**：方程 $\mathcal{L}x(t)=f(t)$ 应有明确的初始条件，即只能求 Cauchy 问题的特解，否则不能分解为部分分式之和，从而不能对 $X(s)=\dfrac{F(s)+B(s)}{A(s)}$ 作 Laplace 逆变换，且 $f(t)$ 的 $F(s)=\mathbf{L}[f]$ 应存在。

四、应用举例——质点振动

1、无阻尼自由振动

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\omega^2\varphi=0,\quad \omega^2=\frac{g}{l}$$

有特征根 $\lambda=\pm \mathrm{i}\omega$ 和通解 $\varphi(t)=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t$，其中 c_1,c_2 为常数。令

$$\sin\theta=\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}},\ \cos\theta=\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}},\ A=\sqrt{c_1^2+c_2^2}\ ,$$

则 $\varphi(t)=A(\sin\theta\cdot\cos\omega t+\cos\theta\cdot\sin\omega t)=A\sin(\omega t+\theta)$。易知，对 $\varphi(0)=\varphi_0,\varphi'(0)=0$，有 $\theta=\frac{\pi}{2},A=\varphi_0$。

2、有阻尼自由振动

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+2n\frac{d\varphi}{dt}+\omega^2\varphi=0,\quad 2n=\frac{\mu}{m},\omega^2=\frac{g}{l}$$

有特征根 $\lambda=-n\pm\sqrt{n^2-\omega^2}$。

(1) 小阻尼（$n<\omega$）：通解为

$$\varphi(t)=e^{-nt}\left(c_1\cos\omega_1 t+c_2\sin\omega_1 t\right)=Ae^{-nt}\sin(\omega_1 t+\theta),$$

其中 A,θ 为任意常数，$\omega_1=\sqrt{\omega^2-n^2}$。

(2) 大阻尼（$n>\omega$）：通解为 $\varphi(t)=c_1e^{-\lambda_1 t}+c_2e^{-\lambda_2 t},\ \lambda_1,\lambda_2<0$。

(3) 临界阻尼（$n=\omega$）:通解为 $\varphi(t)=e^{-nt}\left(c_1+c_2t\right)$。

3、无阻尼强迫振动

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\omega^2\varphi=F(t),\quad \omega^2=\frac{g}{l}$$

当$F(t)=H\sin pt$，H为已知常数，p为外力“频率”，通解为

$$\varphi(t)=\underbrace{A\sin(\omega t+\theta)}_{\text{固有振动部分}}+\underbrace{\frac{H}{\omega^2-p^2}\sin pt}_{\text{强迫振动部分}}\quad (p\neq\omega),$$

或$\varphi(t)=A\sin(\omega t+\theta)+\frac{H}{2\omega}t\cos\omega t$，（$p=\omega$，共振发生）。

4、有阻尼强迫振动（$n<\omega$）：

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+2n\frac{d\varphi}{dt}+\omega^2\varphi=H\sin pt,\quad 2n=\frac{\mu}{m},\omega^2=\frac{g}{l}$$

通解$\varphi(t)=Ae^{-nt}\sin(\omega_1 t+\theta)+\frac{H}{\sqrt{\left(\omega^2-p^2\right)+4n^2p^2}}\sin\left(pt+\theta^*\right)$，其中

$$\theta^*=\arctan\left(-\frac{2np}{\omega^2-p^2}\right)。$$

易见，当$2n^2<\omega^2$（阻尼很小时）时，$p=\sqrt{\omega^2-2n^2}$，$\varphi(t)$的强迫振动项有最大振幅值

$$H^*_{\max}=\frac{H}{2n\sqrt{\omega^2-n^2}},$$

而有共振现象，称$p=\sqrt{\omega^2-2n^2}$为共振频率。

§4. 3 高阶 ODE 的降阶和幂级数解法

高阶 ODE 的基本处理思路是降阶，将原方程等价地转化为一个阶数较低的新 ODE 或一阶 ODE 组）。尽管如此，高阶 ODE 一般不能求出通解。

本节介绍的高阶 ODE 的求解仅是其中的几种极为特殊的类型。

ODE 的幂级数解法适用范围非常广。通常既适用于非线性 ODE 的求解，也适应于线性 ODE 的求解，且对 ODE 的阶数没有限制，但是所得解仅为幂级数形式的，且求解过程会涉及到多重级数，特别是多重幂级数的知识，并伴随复杂的计算(通常是非线性代数方程的迭代计算)。

此处顺便指出，幂级数解法也可以推广到偏微分方程的求解。

一、非线性高阶 ODE 情形

1、方程 $F\left(t, x^{(k)}, x^{(k+1)}, \cdots, x^{(n)}\right)=0$.

特点：不显含 $x, x', \cdots, x^{(k-1)}$。引入新的未知函数

$$y=x^{(k)}，$$

则可降阶得到 $n-k$ 阶的 ODE $\quad F\left(t, y, y', \cdots, y^{(n-k)}\right)=0$。

2、方程 $F\left(x, x', \cdots, x^{(n)}\right)=0$。

特点：不显含自变量 t。引入新的自变量 x 和新的未知函数 $y=x'$，则

$$x''=\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot y，\quad x^{(3)}=\frac{d}{dt}(x'')=y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y^2\frac{d^2y}{dx^2}，\quad \cdots\cdots\cdots，$$

代入原方程可得如下的 $n-1$ 阶 ODE

$$G\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)=0。$$

二、线性方程情形(齐次 ODE)

$$\mathcal{L}x(t)=x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(t)x'+a_n(t)x=0. \tag{4.3.1}$$

对(4.3.1) $\mathcal{L}x(t)=0$，在§4.3 中的求解过程中，并没有涉及到求其基本解组，实际上其基本解组的计算并无一般方法。

然而，若(4.3.1)有 k 个无关解 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)$，则可将其转化为一个 $n-k$ 阶的 LODE。

事实上，对(4.3.1)的任一非零且与$x_k(t)$无关的解$x(t)$，$\frac{x}{x_k}$不恒等于常数，记为y，即$x=y\cdot x_k$。代入(4.3.1)可得

$$x_k\cdot y^{(n)}+[nx_k'+a_1(t)x_k]\cdot y^{(n-1)}+\cdots+\left[x_k^{(n)}+a_1(t)x_k^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x_k\right]\cdot y=0\text{。}$$

由$x_k(t)$是(4.3.1)的解，且记$y'=\left(\frac{x}{x_k}\right)'=z$，则有$n-1$阶 ODE

$$z^{(n-1)}+b_1(t)z^{(n-2)}+\cdots+b_{n-1}(t)z=0\text{。}$$

它有$k-1$个线性无关解$z_i=\left(\frac{x_i}{x_k}\right)'$ $(i=1,2,\cdots,k-1)$。

依上述过程重复进行k次，可得一个$n-k$阶 LODE。

三、**ODE 的幂级数解法**（本段只需了解求解的基本思想和过程）

对一个给定的 ODE，可以考虑其幂级数形式解。

1、**形式幂级数解**：具体作法是将 ODE

$$F\left(t,x,x',\cdots,x^{(n)}\right)=0 \tag{4.3.2}$$

的左端作为多元函数，任意选定$F\left(t,x,x',\cdots,x^{(n)}\right)$定义域内的一点$t_0,x_0,x_0',\cdots,x_0^{(n)}$，再将$F\left(t,x,x',\cdots,x^{(n)}\right)$展开成变量

$$t-t_0,\ x-x_0,\ x'-x_0',\cdots,x^{(n)}-x_0^{(n)}$$

的$n+1$重幂级数（**易知，如果(4.3.2)本身就是线性 ODE，则此步不需要做**），再将幂级数形式的$x(t)=\sum_{m=0}^{+\infty}c_m(t-t_0)^m$及其各阶形式导数（**假定逐项求导合理**）

$$x^{(k)}(t)=\sum_{m=k}^{+\infty}c_m(t-t_0)^m\quad(k=1,2,\cdots,n)$$

代入以上的$n+1$重幂级数中，进而利用各t^n的系数为零，得到系数满足的递归方程组，将c_m $(m=0,1,2,\cdots,n-1)$作为任意常数，最后可将c_m $(m\ge n)$递归确定出来，得到形式幂级数的通解。

特别地，对 Cauchy 问题

$$\begin{cases} F\left(t, x, x', \cdots, x^{(n)}\right) = 0, \\ x^{(k)}(t_0) = x_0^{(k)}(k = 0, 1, \cdots, n-1), \end{cases} \tag{4.3.3}$$

可以利用初值条件得到全部c_m $(m = 0, 1, 2, \cdots)$，因而有形式幂级数的特解。

2、幂级数解(收敛区间)： 在形式幂级数特解的收敛区间和$n+1$重幂级数 ODE 的收敛区域的交集内，称之为方程(4.3.3)的幂级数特解。

而对形式幂级数的通解，因为存在任意常数c_m $(m = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$，所以一般不能也不需要考虑收敛区间。

3、收敛区间的确定： 理论上需要用到多重级数的收敛定理，但是对常见的简单 ODE 来说，$F\left(t, x, x', \cdots, x^{(n)}\right)$的非线性关系非常简单，一般不需要考虑它的幂级数展开，而至多需要将有关的系数函数作幂级数展开，因而只需考虑它们和形式幂级数解的收敛区间。

4、注： 幂级数解法不局限于 ODE，更不局限于低阶 LODE。

事实上，在 PDE 中幂级数解法有极其重要的应用，这进一步体现了其理论上的价值；同时，在应用中，此方法也可以满足工程领域求 ODE 近似解的需要，即有限和形式的$\sum_{m=0}^{N} c_m t^m$，相应地，

$$x(t) \approx \sum_{m=0}^{N} c_m t^m \text{ 。}$$

显然，只要N足够大，则近似解必有足够的精确度。

5、例子：下面是两个最简单的例子。

(1) 形式幂级数通解的例 求方程$y'' - ty = 0$的通解。

解： 设$y(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m t^m$为方程的解，其中系数$a_m$ $(m = 0, 1, 2, \cdots)$待定。将

$$y''(t) = \sum_{m=2}^{+\infty} m(m-1) a_m t^{m-2}$$

和$y(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m t^m$代入方程，得

$$y'' - ty = 2a_2 + \sum_{m=1}^{+\infty} \left[(m+2)(m+1) a_{m+2} - a_{m-1}\right] t^m = 0 \text{，}$$

因而，有递归关系式$a_2=0$和

$$(m+2)(m+1)a_{m+2}=a_{m-1}\quad (m=1,2,\cdots)\text{。}$$

于是，解得
$$a_{3k}=\frac{a_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot\cdots\cdot(3k-1)\cdot 3k},$$
$$a_{3k+1}=\frac{a_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot\cdots\cdot 3k\cdot(3k+1)},$$
$$a_{3k+2}=0\text{。}$$

（2）**形式幂级数特解的例** 求 Cauchy 问题$\begin{cases}y''-2ty'-4y=0,\\ y(0)=0,\ \ y'(0)=1\end{cases}$的解。

解：设$y(t)=\sum_{m=0}^{+\infty}a_m t^m$为方程的解，其中系数$a_m\ (m=0,1,2,\cdots)$待定。将

$$y'(t)=\sum_{m=1}^{+\infty}ma_m t^{m-1},$$
$$y''(t)=\sum_{m=2}^{+\infty}m(m-1)a_m t^{m-2}$$

和$y(t)=\sum_{m=0}^{+\infty}a_m t^m$代入方程，得

$$y''-2ty'-4y=\left(2a_2-4a_0\right)+\sum_{m=1}^{+\infty}\left[(m+2)(m+1)a_{m+2}-2(m+2)a_m\right]t^m=0\text{。}$$

因而，有递归关系式$a_2=2a_0$和

$$(m+1)a_{m+2}=2a_m\quad (m=1,2,\cdots)\text{。}$$

于是，结合初值条件$y(0)=0,\ \ y'(0)=1$，解得 $a_0=0,\ \ a_1=1,\ \ a_2=0$，且

$$a_{2k}=0\text{，}\quad a_{2k+1}=\frac{1}{k!}\quad (k=1,2,\cdots)\text{。}$$

Chapter 5　一阶线性方程(LODE)组理论

一阶线性 ODE 组的理论，无论在理论中还是在具体应用领域，均起着非常基本的作用。作为 ODE 理论的核心之一，一方面它有着非常系统、明确的结论，另一方面又因广泛使用了矩阵代数的语言而非常简洁。

§5.1 LODE 组的基本理论

一、预备知识——矩阵范数与矩阵值函数的相关概念

1、范数与收敛性

(1) 范数：为了在向量、矩阵情形下应用类似于实（函）数的绝对值性质，引入如下定义。

设 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$，$x=\left(x_i\right)_{n\times 1}$，定义其范数分别为

$$\|A\|=\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|,\qquad \|x\|=\sum_{i=1}^{n}|x_i|。$$

关于矩阵、向量的范数有多种定义，但可以证明它们之间的等价性，即由它们可以确立相同的收敛概念。

(2) 范数的性质：对 $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$u,v\in\mathbb{R}^n$，有

$$\|A\cdot B\|\le\|A\|\cdot\|B\|,\qquad \|Au\|\le\|A\|\cdot\|u\| \quad \text{(范数相容性)}$$

$$\|A+B\|\le\|A\|+\|B\|,\qquad \|u+v\|\le\|u\|+\|v\|. \quad \text{(三角不等式)}$$

(3) 收敛性及其判定：

对 $\{x_k\}\subset\mathbb{R}^n$，$x\in\mathbb{R}^n$，$\{A_k\}\subset\mathbb{R}^{n\times n}$，$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$，

若 $\|x_k-x\|\to 0\ (k\to\infty)$，称 x_k 收敛到 $x\ (k\to\infty)$。

若 $\|A_k-A\|\to 0\ (k\to\infty)$，称 A_k 收敛到 $A\ (k\to\infty)$。

Theorem 5.1.1 **$\{x_k\}$ 收敛到 x 等价于对 $\forall j=1,2,\cdots,n$，由 $\{x_k\}$ 的第 j 个分量组成的数列 $\{x_j^{(k)}\}$ 收敛到 x 的第个分量 x_j；$\{A_k\}$ 收敛到 A 等价于，对 $\forall i,j=1,2,\cdots,n$，由 $\{A_k\}$ 的所有第 (i,j) 元素依原序组成的数列 $\{a_{ij}^{(k)}\}$ 收敛到 A 的第 (i,j) 元素 a_{ij}。**

证明　注意到不等式

$$\left|x_j^{(k)}-x_j\right| \le \|x_k - x\| \le n\cdot \max_{1\le j\le n}\left|x_j^{(k)}-x_j\right|,$$

$$\left|a_{ij}^{(k)}-a_{ij}\right| \le \|A_k - A\| \le n^2\cdot \max_{1\le i,j\le n}\left|a_{ij}^{(k)}-a_{ij}\right|,$$

令 $k\to\infty$，即得结论。

2、矩阵（向量）值函数的几个概念

(1) 矩阵值函数 $A(t)=\left(a_{ij}(t)\right)_{n\times n}$， $t\in[a,b]$：

由 $[a,b]$ 上函数 $a_{ij}(t)$ 构成的 $n\times n$ 矩阵。

(2) 连续性及其判定：对 $\forall\ t, t_0\in[a,b]$，

$A(t)$ 在 t_0 连续，若 $\|A(t)-A(t_0)\|\to 0\ (t\to t_0)$；

$A(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续，若 $A(t)$ 在 $\forall t\in[a,b]$ 连续。

Theorem 5.1.2 **$A(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续当且仅当 $a_{ij}(t)\in\mathcal{C}[a,b]$，** $\forall i,j=1,2,\cdots,n$ 。

(3) 可导性及其判定：

称 $A(t)$ 在 $t_0\in[a,b]$ 上可导，若存在 $n\times n$ 阵 B 使

$$\left\|\frac{A(t_0+\Delta t)-A(t_0)}{\Delta t}-B\right\|\to 0 \quad (\Delta t\to 0),$$

记 $B=A'(t_0)$ 。若 $A(t)$ 在 $\forall t\in[a,b]$ 上可微，称 $A(t)$ 在 $[a,b]$ 上可微。

Theorem 5.1.3 **$A(t)$ 在 $[a,b]$ 上可导当且仅当 $a_{ij}(t)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且**

$$A'(t)=\left(a_{ij}'(t)\right)_{n\times n}。$$

求导法则：对 $n\times n$ 的 $A(t), B(t)$， $n\times 1$ 的 $u(t), t\in[a,b]$，有

$$[A(t)\pm B(t)]'=A'(t)\pm B'(t),$$

$$[A(t)B(t)]'=A'(t)B(t)+A(t)B'(t),$$

$$[A(t)u(t)]'=A'(t)u(t)+A(t)u'(t)。$$

(4) 可积性： $A(t), t\in[a,b]$ 在 $[a,b]$ 上可积，若

$$a_{ij}(t)\in\mathcal{R}[a,b],\ i,j=1,2,\cdots,n,$$

且定义 $\int_a^b A(t)dt = \left(\int_a^b a_{ij}(t)dt\right)_{n\times n}$。

(5) 一致收敛性及其性质

根据 Theorem 5.1.1，给出如下定义：

对 $n\times n$ 的矩阵值函数列 $\{A_k(t)\}$ 和函数 $A(t)\in\mathbb{R}^{n\times n}, t\in[a,b]$，称 $A_k(t)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到 $A(t)$，记为 $A_k(t)\xrightarrow{u} A(t)\ (k\to\infty)$，若

$$a_{ij}^{(k)}(t)\xrightarrow{u} a_{ij}(t)\ (k\to\infty),\quad i,j=1,2,\cdots,n \text{。}$$

Theorem 5.1.4 若 $[a,b]$ 上 $n\times n$ 的矩阵值函数列 $\{A_k(t)\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathcal{C}[a,b]$，且

$$A_k(t)\xrightarrow{u} A(t)\ (k\to\infty)\text{，}$$

则 $A(t)\in\mathcal{C}[a,b]$，且 $\int_a^b A(t)dt = \int_a^b \lim_{k\to\infty} A_k(t)dt = \lim_{k\to\infty}\int_a^b A_k(t)dt$。

3、矩阵值函数的无穷级数

(1) 收敛性：称矩阵函数级数 $\sum_{k=1}^{+\infty}A_k(t)$（一致）收敛，若其部分和序列 $\{S_m(t)\}\subset\mathbb{R}^{n\times n}$（一致）收敛，其中

$$S_m(t)=\sum_{k=1}^{m}A_k(t),\quad t\in[a,b]\text{。}$$

(2) 性质与判定

Theorem 5.1.5 $[a,b]$ 上 $n\times n$ 的矩阵值函数级数 $\sum_{k=1}^{+\infty}A_k(t)\xrightarrow{u} A(t), t\in [a,b]$ 当且仅当 $\sum_{k=1}^{+\infty}a_{ij}^{(k)}(t)\xrightarrow{u} a_{ij}(t),\quad t\in[a,b], i,j=1,2,\cdots,n$。

Theorem 5.1.6 对 $[a,b]$ 上 $n\times n$ 的矩阵值函数列 $\{A_k(t)\}$，若 $\exists M_k\ge 0\ (k=1,2,\cdots)$ 使 $\|A_k(t)\|\le M_k\ (k=1,2,\cdots)$，且 $\sum_{k=1}^{+\infty}M_k$ 收敛，则 $\sum_{k=1}^{+\infty}A_k(t)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛。

进而，对一致收敛的矩阵值函数级数可以逐项求导、逐项积分等。

二、一阶 LODE 组基本概念

1、一阶 LODE 组 $x'(t)=A(t)x(t)+f(t), t\in[a,b]$，

其中 $x\in\mathbb{R}^n$；$A(t)\in\mathbb{R}^{n\times n}, f(t)\in\mathbb{R}^n$ 在 $[a,b]$ 上连续。

2、解的定义 称向量 $u(t)$ 是 $x'(t)=A(t)x(t)+f(t)$ 的解，若 $u'(t)\in C[a,b]$ 且满足方程，即 $u'(t)\equiv A(t)u(t)+f(t),\, t\in[a,b]$。

3、Cauchy 问题及其解

$$\begin{cases} x'(t)=A(t)x(t)+f(t),\, t\in[a,b], \\ x(t_0)=x_0. \end{cases}$$

三、n 阶 LODE 与一阶 LODE 组的联系

1、任意 n 阶 LODE 可以转化为等阶的一阶 LODE 组

对 $\begin{cases} x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x=f_0(t),\, t\in[a,b], \\ x(t_0)=x_0, x'(t_0)=x_0',\cdots, x^{(n-1)}(t_0)=x_0^{(n-1)}, \end{cases}$ 设 $a_1(t),\cdots,a_n(t),f_0(t)\in C[a,b]$，令

$$x_1(t)=x(t),\, x_2(t)=x'(t),\, x_3(t)=x''(t),\cdots,\, x_n(t)=x^{(n-1)}(t)，$$

则 $x_1'(t)=x_2(t),\, x_2'(t)=x_3(t),\cdots,\, x_{n-1}'(t)=x_n(t)$，且

$$x_n'=-a_n(t)x_1-a_{n-1}(t)x_2-\cdots-a_1(t)x_n+f_0(t)，$$

同时，$x_1(t_0)=x_0,\, x_2(t_0)=x_1'(t_0)=x'(t_0)=x_0',\, x_3(t)=x_0'',\cdots,\, x_n(t_0)=x_0^{(n-1)}$。

定义向量 $X(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$，$A(t)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}$，$f(t)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f_0(t) \end{pmatrix}$，则有

$$\begin{cases} X'(t)=A(t)X(t)+f(t), \\ X(t_0)=X_0=\left(x_0,\, x',\cdots,\, x_0^{(n-1)}\right)^T. \end{cases}$$

显然，二者之间有完全对应的解。

2、一阶 LODE 组不是总能化成一个对应的高阶 LODE

例如，$X'(t)=A(t)X(t)+f(t),\quad A=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}_{n\times n}$。

四、一阶 LODE 组 Cauchy 问题的存在唯一性定理

Theorem 5.1.7 对一阶 LODE 组

$$x'(t)=A(t)x(t)+f(t),\quad t\in[a,b]，$$

设 $A(t), f(t)\in\mathcal{C}[a,b]$，则对 $\forall t_0\in[a,b], x_0\in\mathbb{R}^n$，Cauchy 问题

$$\begin{cases}x(t)=A(t)x(t)+f(t),\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$$

在 $[a,b]$ 上存在唯一的连续可微解。

证明仍可以用 Picard 逐次逼近法。

§5.2 一阶 LODE 组解的一般理论

考虑一阶线性常微分方程（LODE）组

$$x'(t)=A(t)x(t)+F(t)，\tag{5.2.1}$$

其中 $t\in[a,b], A(t)\in\mathbb{R}^{n\times n}, x(t)\in\mathbb{R}^n$。

若 $F(t)\equiv 0$，则方程称为齐次的(homogeneous)；若 $F(t)\neq 0$，方程称为非齐次的(inhomogeneous)。

一、向量值函数的线性相关性与 Wronsky 行列式

1、向量值函数的线性相关　称区间 $[a,b]$ 上的向量值函数 $x_1(t), x_2(t),$

$\cdots, x_m(t) \in \mathbb{R}^n$ 是线性相关的，若存在不全为零的常数 $c_1, c_2, \cdots, c_m$ 使得

$$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_m x_m(t) \equiv 0, \quad \forall t \in [a,b];$$

否则称 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_m(t) \in \mathbb{R}^n$ 是线性无关的。

2、向量值函数的朗斯基行列式 $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}^n)$

设有向量值函数 $x_k(t):[a,b] \to \mathbb{R}^n, k = 1, 2, \cdots, m$，称行列式

$$\mathcal{W}(t) = \mathcal{W}[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_m(t)] = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_m(t) \end{vmatrix}$$

为 $x_k(t)\ \left(k = 1, 2, \cdots, m\right)$ 的朗斯基(Wronsky)行列式。

3、线性相关性与朗斯基行列式的判定

Theorem 5.2.1 设向量函数组 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$， $t \in [a,b]$ 线性相关，则

$$\mathcal{W}(t) = \mathcal{W}[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)] \equiv 0, \quad \forall t \in [a,b]。$$

Proof 由已知，存在 n 个不全为零的常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 使得

$$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_n x_n(t) \equiv 0, \ \forall t \in [a,b],$$

即 $\forall t \in [a,b]$，齐次线性代数方程组

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \ x_2(t) \cdots x_n(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_n x_n(t) \equiv 0, \ \forall t \in [a,b]$$

存在非零解 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)^T$，因此它的系数行列式 $\mathcal{W}(t) \equiv 0, \forall t \in [a,b]$。

为了以下更便捷地应用 Theorem 5.2.1，给出它的逆否命题如下：

在 $[a,b]$ 上，若函数 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 的 Wronsky 行列式 $\mathcal{W}(t)$ 不恒为零，则 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 在 $[a,b]$ 上线性无关。

二、一阶齐次 LODE 组的通解及其性质

$$x'(t) = A(t)x(t), \tag{5.2.2}$$

1、叠加原理 LODE 组(5.2.2)的任意两个解 $x_1(t), x_2(t)$ 的任意线性组合

$\alpha\, x_1(t) + \beta\, x_2(t)$ 仍是(5.2.2)的解，这里 α, β 是任意常数。

2、解的线性无关判定

Theorem 5.2.2 若 $x'(t) = A(t)x(t)$ 的解 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t),\ t \in [a,b]$ 线性无关，则

$$\mathcal{W}(t) = \mathcal{W}[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)] \neq 0, \quad \forall t \in [a,b]\text{。}$$

Proof 反证，设 $\exists t_0 \in [a,b]$ 使 $\mathcal{W}(t_0) = 0$，则以 $\mathcal{W}(t_0)$ 为系数行列式的齐次线性代数方程组

$$c_1 x_1(t_0) + c_2 x_2(t_0) + \cdots + c_n x_n(t_0) \equiv 0 \tag{5.2.2-1}$$

有非零解 $c_1, c_2, \cdots, c_n$，从而函数

$$x(t) \triangleq c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_n x_n(t), \quad t \in [a,b]$$

是齐次 LODE 组(5.2.2)的解，且满足初始条件

$$x(t_0) = 0.$$

注意到零函数同样满足上述初始条件和齐次 LODE 组(5.2.2)，则由解的唯一性知 $x(t) \equiv 0,\ t \in [a,b]$，即

$$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_n x_n(t) \equiv 0, \quad \forall t \in [a,b]\text{。}$$

由 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 不全为零知与已知矛盾。

注：由 Theorem 5.2.1 的逆否命题和 Theorem 5.2.2 知，LODE(5.2.2)的任意 n 个解的 Wronsky 行列式 $\mathcal{W}(t)$ 在 $[a,b]$ 上恒等于零或恒不等于零。

3、线性无关解的存在性与基(本)解矩阵

Theorem 5.2.3 一阶齐次 LODE 组 $x'(t) = A(t)x(t)$ 必有 n 个线性无关解。

Proof 依次由以下 n 个初始条件

$$x(t_0) = e_k, \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

出发可获得相应的 n 个解 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$，则

$$\mathcal{W}[x_1(t_0), x_2(t_0), \cdots, x_n(t_0)] = |\,\mathrm{I}_n\,| = |\,e_1, e_2, \cdots, e_n\,| = 1 \neq 0\text{，}$$

从而，由 Theorem 5.2.2 可知，

$$\mathcal{W}[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)] \neq 0, \qquad \forall t \in [a,b],$$

再由 Theorem 5.2.2， $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 线性无关。

注：在 Theorem 5.2.3 的证明中，$x(t_0)$ 不局限于 $e_k(k=1,\cdots,n)$，可以任取 n 个线性无关的向量 $\gamma_k(k=1,\cdots,n)$ 作为初始条件

$$x(t_0) = \gamma_k \quad (k=1,\cdots,n)$$

求出相应的线性无关解 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 。

4、通解表示

Theorem 5.2.4 (1) 设有一阶齐次 LODE 组(5.2.2)：$x'(t) = A(t)x(t)$ 的 n 个无关解 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$，则其任一解 $x(t)$ 均可表示为

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_nx_n(t) = \Phi(t)C \text{，} \tag{5.2.3}$$

其中 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 为任意常数， $C = \left(c_1, c_2, \cdots, c_n\right)^T$， $\Phi(t) \triangleq \left(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)\right)$。

称 $n \times n$ 的矩阵 $\Phi(t)$ 为(5.2.2)的基解矩阵。

进而，一阶齐次 LODE 组(5.2.2)必有一个基解矩阵 $\Phi(t)$，且通解为(5.2.3)。

(2) $x'(t) = A(t)x(t)$ 的线性无关解的最大个数为 n 。

(3) 若已知 $x'(t) = A(t)x(t)$ 的 k 个线性无关解，则可将其转化为一个含 $n-k$ 个未知函数的 LODE 组。

Proof (1) 易知，对任意常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$， $x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_nx_n(t)$ 是齐次 LODE 组 $x'(t) = A(t)x(t)$ 的解，且由行列式

$$\det\left(\frac{\partial x}{\partial c_1}, \frac{\partial x}{\partial c_2}, \cdots, \frac{\partial x}{\partial c_n}\right) = \mathcal{W}[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)] \neq 0, \quad \forall t \in [a,b]$$

知常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 相互独立。

可见 $x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_nx_n(t)$ 是齐次 LODE 组 $x'(t) = A(t)x(t)$ 的通解。

另一方面，对齐次 LODE 组 $x'(t)=A(t)x(t)$ 的满足任一初始条件

$$x(t_0)=x_0\in\mathbb{R}^n \tag{5.2.3-1}$$

的解 $x(t)$，存在常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 使得 $x(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)$。

事实上，令形如 $c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)$ 的函数满足初始条件(5.2.3-1)，则

$$c_1x_1(t_0)+c_2x_2(t_0)+\cdots+c_nx_n(t_0)=x_0 \tag{5.2.3-2}$$

的系数行列式为 $\mathcal{W}(t_0)$，由 Theorem 5.2.2 知 $\mathcal{W}(t_0)\neq 0$。

从而(5.2.3-2)有唯一的解 $c_1,c_2,\cdots,c_n$。由解的唯一性知，以 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 为系数的解 $c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)$ 与解 $x(t)$ 恒等，即

$$x(t)=\sum_{k=1}^{n}c_k\cdot x_k(t)\text{。}$$

(2) 只需证 $x'(t)=A(t)x(t)$ 的任一解 $x(t)$ 必与已知的 n 个无关解

$$x_1(t),\ x_2(t),\ \cdots,\ x_n(t)$$

线性相关即可。事实上，由(1)，存在唯一的一组系数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 使得

$$x(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)\text{，}$$

即存在不全为零的常数 $c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n,\ -1$，使得

$$c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)+(-1)x(t)\equiv 0\text{，}$$

由定义，$x(t)$ 与 $x_1(t),\ x_2(t),\ \cdots,\ x_n(t)$ 是 $x'(t)=A(t)x(t)$ 的线性相关的解

(3) 参见习题 5.2 的第 4 题。

5、基解矩阵的判定与性质

Theorem 5.2.5 $x'(t)=A(t)x(t)$ 的解矩阵 $\Phi(t)$ 是基解矩阵，当且仅当

$$\det\Phi(t)\neq 0\quad (a\le t\le b)\text{；}$$

且若 $\exists t_0\in[a,b]$ 使 $\det\Phi(t_0)\neq 0$，则必有 $\det\Phi(t)\neq 0,\forall t\in[a,b]$。

Proof 由 Theorem 5.2.1 的逆否命题可证充分性。

事实上，$\det\Phi(t)\neq 0\ (a\le t\le b)$ 表明解矩阵 $\Phi(t)$ 的各列是 $x'(t)=A(t)x(t)$ 的 n 个

线性无关解，因而$\Phi(t)$是基解矩阵。

必要性由 Theorem 5.2.2 直接可证。

Theorem 5.2.6 设$\Phi(t)$是$x'(t)=A(t)x(t)$在$[a,b]$上的基解矩阵，则对任意$n\times n$非奇异常数矩阵C，矩阵$\Phi(t)C$也是$x'(t)=A(t)x(t)$在$[a,b]$上的基解矩阵。

Proof　由 Theorem 5.2.5 可知，只需证明矩阵$\Phi(t)C$的行列式非零。

事实上，由已知$\det\Phi(t)\neq 0, \forall t\in[a,b]$且$\det C\neq 0$，故

$$\det\big(\Phi(t)C\big)=\det\Phi(t)\det C\neq 0, \forall t\in[a,b]。$$

Theorem 5.2.7 对$x'(t)=A(t)x(t), t\in[a,b]$，若$\Phi(t),\Psi(t)$是其任意两个基解矩阵，则$\exists C_{n\times n}$，满足$|C|=\det C\neq 0$使

$$\Psi(t)=\Phi(t)C,\quad t\in[a,b]。$$

Proof　由基解矩阵的定义，$\Psi(t)=\Big(\psi_1(t),\psi_2(t),\cdots,\psi_n(t)\Big)$的各列$\psi_j(t)$ $(j=1,2,\cdots,n)$可以由$\Phi(t)$的列线性表示，因而存在向量c_j $(j=1,2,\cdots,n)$使得

$$\psi_j(t)=\Phi(t)c_j\ (j=1,2,\cdots,n)。$$

令$C=\Big(c_1,c_2,\cdots,c_n\Big)$，则$\Psi(t)=\Phi(t)C, t\in[a,b]$。进而，由$\Phi(t),\Psi(t)$是基解矩阵可知，$C$的非奇异性时明显的。

三、非齐次 LODE 组解的表示

以下讨论(5.2.1)：$x'(t)=A(t)x(t)+F(t),\ \ t\in[a,b]$，其中

$$A(t)\in\mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{R}^{n\times n}\big), F(t)\in\mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{R}^n\big)。$$

1、解的性质

Theorem 5.2.8 (1) 设$\varphi(t),\psi(t)$分别是(5.2.1)与(5.2.2)：$x'(t)=A(t)x(t)$的解，则$\varphi(t)+\psi(t)$是一阶非齐次 LODE(5.2.1)的解；

(2) 对(5.2.1)的任意两个解$\varphi_1(t),\varphi_2(t)$，向量值函数$\varphi_1(t)-\varphi_2(t)$是齐次 LODE 组(5.2.2)：$x'(t)=A(t)x(t)$的解。

2、通解的一般公式，常数变量法

设(5.2.1)对应的齐次 LODE 组 $x'(t)=A(t)x(t)$ 有通解

$$x=\Phi(t)C,$$

以下用常数变易法求(5.2.1)的特解 $\varphi(t)$。

设 $\varphi(t)=\Phi(t)C(t)$，代入(5.2.1)易得 $\Phi(t)C'(t)=F(t)$。

为方便起见，设(5.2.1)有初始条件 $x(t_0)=\eta\in\mathbb{R}^n$，故 $C(t)=\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)F(s)ds$。

可见，$\varphi(t)=\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)F(s)ds$ 是(5.2.1)的特解。

进而，由叠加原理知，(5.2.1)的 Cauchy 问题 $\begin{cases}x'(t)=A(t)x(t)+F(t),\\ x(t_0)=\eta\in\mathbb{R}^n\end{cases}$ 有解

$$x(t)=\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\eta+\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)F(s)ds\text{。}$$

注：常数变量法的基础是(5.2.1)的通解表示

$$x=\Phi(t)C+\varphi(t)\text{。}$$

事实上，由基解矩阵的非奇异性，通解可表示为 $x(t)=\Phi(t)\left(C+\Phi^{-1}(t)\varphi(t)\right)$，记

$$C(t)=C+\Phi^{-1}(t)\varphi(t),$$

则可知常数变易法中对特解结构的猜测和假设是合理的。

注：若不给定初始条件 $x(t_0)=\eta\in\mathbb{R}^n$，则有通解公式

$$x(t)=\Phi(t)\left(C+\int\Phi^{-1}(t)F(t)dt\right)\text{。}$$

它与一阶 ODE 的通解公式相同，但是不便于应用。

Theorem 5.2.9 (1) 设 $x'(t)=A(t)x(t)$ 有基解矩阵 $\Phi(t)$，则对(5.2.1)的任意给定的特解 $\varphi(t)$，(5.2.1)的通解为

$$x=\Phi(t)C+\varphi(t);\qquad(5.2.4)$$

(2) Cauchy 问题 $\begin{cases}x'(t)=A(t)x(t)+F(t),\\ x(t_0)=\eta\in\mathbb{R}^n,\end{cases}$ $\left(t,\,t_0\in[a,b]\right)$ 有唯一解

$$x(t)=\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\eta+\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)F(s)ds;\qquad(5.2.5)$$

(3) $\varphi(t)=\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)F(s)ds$ 是 Cauchy 问题 $\begin{cases}x'(t)=A(t)x(t)+F(t),\\ x(t_0)=0\in\mathbb{R}^n\end{cases}$ 的解。

3、应用——高阶 LODE 的解的表示

记 $\mathcal{L}[x]\triangleq x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x$，对如下 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\mathcal{L}[x]=f(t),\\ x(t_0)=x'(t_0)=\cdots=x^{(n-1)}(t_0)=0,\end{cases}$$

其中 $t\in[a,b]$， $a_1(t),\cdots,a_n(t),f(t)\in\mathcal{C}[a,b]$， 设对应的齐次方程 $\mathcal{L}[x]=0$ 有基本解组 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$，则与 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\mathcal{L}[x]=f(t),\\ x(t_0)=x'(t_0)=\cdots=x^{(n-1)}(t_0)=0,\end{cases}\tag{5.2.6}$$

对应的一阶 ODE 组 $X'(t)=A(t)X(t)+F(t)$ 有基解矩阵

$$\Phi(t)=\big(X_1(t),X_2(t),\cdots,X_n(t)\big)=\Big(x_i^{(j)}(t)\Big)_{n\times n}=\begin{pmatrix}x_1(t)&x_2(t)&\cdots&x_n(t)\\ x_1'(t)&x_2'(t)&\cdots&x_n'(t)\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ x_1^{(n-1)}(t)&x_2^{(n-1)}(t)&\cdots&x_n^{(n-1)}(t)\end{pmatrix}$$

因此可将 Cauchy 问题 $\begin{cases}X'(t)=A(t)X(t)+F(t),\\ X(t_0)=0\end{cases}$ 的唯一解表示为如下形

$$\begin{pmatrix}x(t)\\ x'(t)\\ \vdots\\ x^{(n-1)}(t)\end{pmatrix}=\varphi(t)=\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)F(s)ds$$

$$=\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\mathcal{W}(s)}\operatorname{adj}\Phi(s)\cdot\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ f(t)\end{pmatrix}ds$$

$$=\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\mathcal{W}(s)}\begin{pmatrix} & A_{n1}(s)\\ * & A_{n2}(s)\\ & \vdots\\ & A_{nn}(s)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ f(s)\end{pmatrix}ds$$

$$= \Phi(t)\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\mathcal{W}(s)}\begin{pmatrix} A_{n1}(s)f(s) \\ A_{n2}(s)f(s) \\ \vdots \\ A_{nn}(s)f(s) \end{pmatrix}ds = \Phi(t)\begin{pmatrix} \int_{t_0}^{t}\frac{1}{\mathcal{W}(s)}\ A_{n1}(s)\ f(s)\ ds \\ \int_{t_0}^{t}\frac{1}{\mathcal{W}(s)}\ A_{n2}(s)\ f(s)\ ds \\ \vdots \\ \int_{t_0}^{t}\frac{1}{\mathcal{W}(s)}\ A_{nn}(s)\ f(s)\ ds \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} x_k(t)\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\mathcal{W}(s)}\ A_{nk}(s)\ f(s)\ ds \\ \\ * \\ \\ \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

故 $$x(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k(t)\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\mathcal{W}(s)}\ A_{nk}(s)\ f(s)\ ds = \sum_{k=1}^{n} x_k(t)\int_{t_0}^{t}\frac{\mathcal{W}_k[x_1(s),\cdots,x_n(s)]}{\mathcal{W}[x_1(s),\cdots,x_n(s)]}\ f(s)\ ds \text{。}$$

§5.3 常系数一阶 LODE 组的求解

一、矩阵指数的定义和性质

1、**定义**：设有 $n\times n$ 阵 A，定义

$$e^{A} = E + A + \frac{1}{2!}A^{2} + \cdots + \frac{1}{m!}A^{m} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}A^{k}\ ,$$

其中，E 为 $n\times n$ 的单位矩阵。易知 $\left\|\frac{1}{k!}A^{k}\right\| \le \frac{1}{k!}\|A\|^{k}$，故由级数

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\|A\|^{k}$$

的收敛性知 e^{A} 因级数 $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}A^{k}$ 绝对收敛而有意义。

同理，矩阵值函数 e^{At} 在 t 的任何有限区间上一致收敛。

2、**性质**：**(1) 设** $AB = BA$，**则** $e^{A+B} = e^{A}\cdot e^{B}$；

(2) 对任意 $n\times n$ **阵** A，e^{A} **可逆，且**

$$\left(e^{A}\right)^{-1}=e^{-A};$$

(3) **设 T 可逆，则 $e^{T^{-1}AT}=T^{-1}e^{A}T$ 。**

Proof　只证(1). 由已知 $AB=BA$ 和二项式定理，可得

$$\begin{aligned}
e^{A+B} &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}(A+B)^{k} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{l=0}^{k}\frac{A^{l}B^{k-l}}{l!(k-l)!}\right) \\
&= \quad E \\
&\quad +\frac{1}{1!}B+\cancel{\frac{1}{1!}A} \\
&\quad +\frac{1}{2!}B^{2}+\cancel{\frac{1}{1!1!}AB} \qquad +\frac{1}{2!}A^{2} \\
&\quad +\quad \cdots\cdots \\
&\quad +\frac{1}{k!}B^{k}+\cancel{\frac{1}{1!(k-1)!}AB^{k-1}}+\frac{1}{2!(k-2)!}A^{2}B^{k-2}+\cdots+\frac{1}{k!}A^{k} \\
&\quad +\quad \cdots\cdots \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\left[\frac{A^{k}}{k!}\left(\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{B^{l}}{l!}\right)\right]=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{A^{k}}{k!}\cdot\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{B^{l}}{l!}=e^{A}\cdot e^{B},
\end{aligned}$$

其中，第四个等号利用了矩阵级数 e^{A+B} 的绝对收敛性。

3、应用——基解矩阵的表示之一

Theorem 5.3.1　**$n\times n$ 阵 $\Phi(t)=e^{At}$ 是一阶齐次 LODE 组 $x'=Ax$ 的基解矩阵，且 $\Phi(0)=E$；从而，任一解 $\varphi(t)=e^{At}c$，c 是任意向量。**

Proof　由于矩阵值函数 e^{At} 在 t 的任何有限区间上一致收敛，所以可以逐项求导。从而，由矩阵值函数的求导公式，可得

$$\Phi'(t)=\left(e^{At}\right)'=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\left((At)^{k}\right)'=A\cdot\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k-1)!}(At)^{k-1}=A\cdot\Phi(t),$$

即 $\Phi(t)=e^{At}$ 是 $x'=Ax$ 的解矩阵。同时，$\Phi(0)=E$ 表明 $\Phi(t)=e^{At}$ 对 $\forall\, t\in\mathbb{R}^{1}$ 是非奇异的，故 $\Phi(t)=e^{At}$ 是 $x'=Ax$ 的基解矩阵。

二、基解矩阵 e^{At} 的计算

以下，讨论一阶 LODE 组 $x'=Ax$ 的基解矩阵(特别是 e^{At})的计算。

1、$n\times n$ 阵 A 的特征值与特征向量（θ 表示零向量）

由 Theorem 5.3.1 知，$x'=Ax$ 的任一解 $\varphi(t)=e^{At}c$，c 是任意向量。

因为许多时候 $\varphi(t)=e^{At}c$ 可以表示为若干个形如 $\varphi(t)=e^{\lambda t}v\ (v\neq\theta)$ 的向量函数之和，所以 $x'=Ax$ 可能存在形如 $\varphi(t)=e^{\lambda t}v$ 的解。

为了寻找 $x'=Ax$ 的最简形式的解 $\varphi(t)=e^{\lambda t}v,\ v\neq\theta$，代入 $x'=Ax$ 可得

$$e^{\lambda t}(\lambda E-A)v=\theta\text{。}$$

因 $e^{\lambda t}\neq 0$，故有 $(\lambda E-A)v=\theta$。可见，λ 与非零向量 v 使

$$(\lambda E-A)v=\theta,$$

从而 $\det(\lambda E-A)=0$。

一阶齐次 LODE 组 $x'=Ax$ 的特征值、特征向量、特征多项式、特征方程。

2、基解矩阵的表示之二

Theorem 5.3.2 **若 A 有 n 个线性无关的特征向量 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 对应于特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ (可以重根)，则**

$$\Phi(t)=\left(e^{\lambda_1 t}v_1,e^{\lambda_2 t}v_2,\cdots,e^{\lambda_n t}v_n\right),\quad t\in\mathbb{R}^1 \tag{5.3.1}$$

是 $x'=Ax$ 的一个基本解阵。

Proof 由 A 的特征值与特征向量的关系，$Av_k=\lambda_k v_k\ \left(k=1,2,\cdots,n\right)$。故

$$\begin{aligned}\Phi'(t)&=\left(e^{\lambda_1 t}v_1,e^{\lambda_2 t}v_2,\cdots,e^{\lambda_n t}v_n\right)'=\left(\left(e^{\lambda_1 t}v_1\right)',\left(e^{\lambda_2 t}v_2\right)',\cdots,\left(e^{\lambda_n t}v_n\right)'\right)\\&=\left(e^{\lambda_1 t}\lambda_1 v_1,e^{\lambda_2 t}\lambda_2 v_2,\cdots,e^{\lambda_n t}\lambda_n v_n\right)\\&=\left(e^{\lambda_1 t}Av_1,e^{\lambda_2 t}Av_2,\cdots,e^{\lambda_n t}Av_n\right)\\&=A\left(e^{\lambda_1 t}v_1,e^{\lambda_2 t}v_2,\cdots,e^{\lambda_n t}v_n\right)=A\,\Phi(t),\quad\forall t\in\mathbb{R}^1,\end{aligned}$$

可见，(5.3.1)是 $x'=Ax$ 的解矩阵，且显然

$$\det\Phi(0)=\det\left(v_1,v_2,\cdots,v_n\right)\neq 0,$$

因而(5.3.1)中的 $\Phi(t)$ 是 $x'=Ax$ 的一个基本解阵。

Theorem 5.3.3　对 $x' = Ax$ 的任一基解矩阵 $\Phi(t)$，有

$$e^{At} = \Phi(t)\cdot\Phi^{-1}(0)\text{，} \tag{5.3.2}$$

且无论 $\Phi(t)$ 是否复值矩阵，e^{At} 是实值矩阵。

Proof　由 Theorem 5.2.7 可知，存在非奇异矩阵 C，使得基解矩阵 $\Phi(t)$ 和 e^{At} 满足 $\Phi(t) = e^{At}C$，相应地，$\Phi(0) = E\cdot C = C$。故有(5.3.2)。

3、基解矩阵的表示之三

Theorem 5.3.4　设 $n\times n$ 阵 A 有 k 个重数分别为 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 的不同特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$，其中 $\sum_{j=1}^{k} n_j = n$。对 Cauchy 问题

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t), \\ x(0) = \eta \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{5.3.3}$$

设 $\eta = v_1 + v_2 + \cdots + v_k$ 是 η 关于线性代数方程组

$$\left(A - \lambda_j E\right)^{n_j} u = 0$$

的解空间 $U_j (j = 1, 2, \cdots, k)$ 的一个分解，则(5.3.3)的解

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= e^{At}\eta = e^{At}v_1 + e^{At}v_2 + \cdots + e^{At}v_k \\ &= \sum_{j=1}^{k} e^{\lambda_j t}\left(\sum_{m=0}^{n_j-1}\frac{t^m}{m!}\left(A - \lambda_j E\right)^m\right)v_j\text{。} \end{aligned}$$

证明　由设 $\left(A - \lambda_j E\right)^l v_j = 0,\ l \ge n_j,\ j = 1, 2, \cdots, k.$，注意到

$$e^{\lambda_j t}e^{-\lambda_j Et} = e^{\lambda_j t}\begin{pmatrix} e^{-\lambda_j t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{-\lambda_j t} \end{pmatrix} = E\text{，}$$

故

$$\begin{aligned} e^{At}v_j &= e^{At}\left(e^{\lambda_j t}e^{-\lambda_j Et}\right)v_j = e^{\lambda_j t}e^{(A-\lambda_j E)t}v_j \\ &= e^{\lambda_j t}\left[E + t\left(A - \lambda_j E\right) + \frac{t^2}{2!}\left(A - \lambda_j E\right)^2 + \cdots + \frac{t^{n_j-1}}{\left(n_j - 1\right)!}\left(A - \lambda_j E\right)^{n_j-1}\right]v_j\text{。} \end{aligned}$$

4、基解矩阵的表示——Jordan 矩阵法

设非异阵 T 使 $T^{-1}AT=J$，其中 J 有 Jordan 标准形 $J=\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_k \end{pmatrix}$，其中

$$J_j=\begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_j \end{pmatrix} \quad \left(j=1,2,\cdots,k\right)$$

为 n_j 阶阵，$n_1+n_2+\cdots+n_k=n,\ k$ 为 $A-\lambda E$ 的初等因子的个数，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 是 A 的

特征值，则 $e^{Jt}=\begin{pmatrix} e^{J_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{J_k t} \end{pmatrix}$，其中

$$e^{J_j t}=\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n_j-1}}{\left(n_j-1\right)!} \\ & 1 & t & \cdots & \frac{t^{n_j-2}}{\left(n_j-2\right)!} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix} e^{\lambda_j t},$$

从而 $e^{At}=Te^{Jt}T^{-1}$，且知 Te^{Jt} 也是 $x'(t)=Ax(t)$ 的一个基解矩阵。

5、基解阵的表示——Caylay-Hamilton 定理的应用

可以验证(应用 Caylay-Hamilton 定理)

$$e^{At}=\sum\nolimits_{j=0}^{n-1} r_{j+1}(t)\,P_j,,$$

其中 $P_0=E,\ P_j=\prod\nolimits_{k=1}^{j}\left(A-\lambda_k E\right)\ (j=1,2,\cdots,n)$，而 $r_1(t),\cdots,r_n(t)$ 满足 Cauchy 问题

$$\begin{cases} r_1'(t)=\lambda_1 r_1(t), \\ r_j'(t)=r_{j-1}(t)+\lambda_j r_j(t)\ (j=2,3,\cdots,n), \\ r_1(0)=1,\ r_j(0)=0\ (j=2,3,\cdots,n), \end{cases}$$

显然，递归地依次可解得 $r_1(t),\cdots,r_n(t)$。进而，可得基解矩阵 $e^{At}=\sum\nolimits_{j=0}^{n-1} r_{j+1}(t)\,P_j$。

三、用 Laplace 变换法求解常系数 LODE 组

除了求解高阶线性常系数 ODE 外，Laplace 变换也可以用于求解常系数线性 ODE 组，包括一阶或高阶 ODE 组，且没有额外所需的性质。

在 Laplace 变换下，一阶或高阶常系数线性 ODE 组将转化为函数方程组，先求解得到各未知量的 Laplace 变换，再求逆变换可得原方程组的解。

与求解高阶线性常系数 ODE 一样，Laplace 变换求解常系数线性 ODE 组时，对非齐次项的要求也比较高。

以下为两个例子。

例 1 求解 Cauchy 问题 $\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + x_2(t), \\ x_2'(t) = -x_1(t) + 4x_2(t), \\ \left(x_1(0), x_2(0)\right)^T = (0,1)^T. \end{cases}$

解： 记 $X_1(s) = \mathbf{L}[x_1(t)]$，$X_2(s) = \mathbf{L}[x_2(t)]$，对方程组各方程两端取 Laplace 变换，由初值条件得 $\begin{cases} sX_1(s) - x_1(0) = 2X_1(s) + X_2(s), \\ sX_2(s) - x_2(0) = -X_1(s) + 4X_2(s), \end{cases}$ 整理即得

$$\begin{cases} (s-2)\,X_1(s) - X_2(s) = 0, \\ X_1(s) + (s-4)\,X_2(s) = 1. \end{cases}$$

进而，$X_1(s) = \dfrac{1}{(s-3)^2}$，$X_2(s) = \dfrac{s-2}{(s-3)^2} = \dfrac{1}{s-3} + \dfrac{1}{(s-3)^2}$，再取 Laplace 逆变换即得 Cauchy 问题的解 $x_1(t) = te^{3t}$，$x_2(t) = (1+t)e^{3t}$。

例 2 求解 Cauchy 问题 $\begin{cases} x_1'' - 2x_1' - x_2' + 2x_2 = 0, \\ x_1' - 2x_1 + x_2' = -2e^{-t}, \\ x_1(0) = 3, x_1'(0) = 2, x_2(0) = 0. \end{cases}$

解： 记 $X_1(s) = \mathbf{L}[x_1(t)]$，$X_2(s) = \mathbf{L}[x_2(t)]$，对方程组各方程两端取 Laplace 变换，由初值条件得 $\begin{cases} \left(s^2X_1(s) - 3s - 2\right) - 2\left(sX_1(s) - 3\right) - sX_2(s) + 2X_2(s) = 0, \\ \left(sX_1(s) - 3\right) - 2X_1(s) + sX_2(s) = -\dfrac{1}{s+1}, \end{cases}$ 整理即得

$$\begin{cases} \left(s^2 - 2s\right)X_1(s) - (s-2)\,X_2(s) = 3s - 4, \\ (s-2)\,X_1(s) + sX_2(s) = \dfrac{3s+1}{s+1}. \end{cases}$$

进而，$X_1(s)=\dfrac{3s^2-4s-1}{(s+1)(s-1)(s-2)}=\dfrac{1}{s+1}+\dfrac{1}{s-1}+\dfrac{1}{s-2},$，

$$X_2(s)=\frac{2}{(s+1)(s-1)}=\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s+1}$$

再取 Laplace 逆变换即得 Cauchy 问题的解

$$x_1(t)=e^t+e^{-t}+e^{2t},\quad x_2(t)=e^t-e^{-t}$$。

Chapter 6 非线性微分方程组的基本理论

(Theory of systems of nonlinear ODE)

对一般的非线性常微分方程（组），其通解和特解很难确切地求出，而大部分实际问题也无需得到精确解，而只是利用其一些特定的性质或求得数值解。

稳定性理论适应了实际问题的需要，研究常微分方程（组）的解相对于初始值误差的敏感性及相对时间的演化特征。这一理论在工程中具有极其重要的意义，所有问题均是针对一般的方程组展开的，对未知函数的个数没有限制。

定性理论则是 ODE 理论中的另一个支柱。它研究方程组的未知变量之间的关系，即解轨线的性态，基本方法局限于二维方程组，在某些情形下还可起到对稳定性理论的补充。

§6.0 一阶 ODE 组 Cauchy 问题及其解

考虑一阶非线性 ODE 组

$$y'(t)=g\big(t,y(t)\big),\quad y(t)\in\mathbb{R}^n。\tag{6.1.1}$$

一、一阶 ODE 组 Cauchy 问题解的存在唯一性

Theorem 6.0.1 对 Cauchy 问题$\begin{cases}y'(t)=g\big(t,y(t)\big),\\ y(t_0)=y_0,\end{cases}$ 设$g(t,y)$在

$$\mathrm{R}=\Big\{(t,y):t\in[t_0-a,t_0+a],\|y-y_0\|\le b\Big\}$$

中连续且满足关于y的 Lipschitz 条件：存在常数L，使$\forall(t,y_1),(t,y_2)\in\mathrm{R}$，有

$$\|g(t,y_1)-g(t,y_2)\|\le L\|y_1-y_2\|,$$

则问题在区间$|t-t_0|\le h=\min\Big(a,\dfrac{b}{M}\Big)$上存在唯一的连续解$y=\varphi\Big(t;t_0,y_0\Big)$，其中

$$M=\max_{(t,y)\in\mathrm{R}}\|g(t,y)\|。$$

证明 与一维情形下的证明过程完全相同，仅简述要点。

Step 1. 转化 Cauchy 问题为如下等阶的一阶积分方程组

$$y(t)=y_0+\int_{t_0}^{t}g\big(s,y(s)\big)ds,\quad t\in[t_0-h,t_0+h]。\tag{6.1.2}$$

Step 2. 构造逐次逼近函数列(以下限制$t\in[t_0,\,t_0+h]$):

$$\begin{cases}\varphi_0(t)=y_0,\\ \varphi_k(t)=y_0+\displaystyle\int_{t_0}^{t}g\big(s,\varphi_{k-1}(s)\big)ds,\end{cases}\quad k=1,2,\cdots\tag{6.1.3}$$

则$\varphi_n(t)\in\mathcal{C}\Big([t_0,\,t_0+h];\mathbb{R}^n\Big)$且$\|\varphi_n(t)-y_0\|\le b$，即

$$\Big(t,\ \varphi_n(t)\Big)\in\mathrm{R},\quad\forall t\in[t_0,\,t_0+h],\,n=1,2,\cdots$$

Step 3. 函数列$\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{+\infty}$在$[t_0,\,t_0+h]$上一致收敛.

事实上，从(6.1.3)可知，对$\forall n,m\ge1$，有

$$\left\|\varphi_{n+1}(t)-\varphi_{n}(t)\right\| \leq \int_{t_0}^{t}\left\|g(s,\varphi_{n}(s))-g(s,\varphi_{n-1}(s))\right\| ds,$$

特别对 $n=0$，有

$$\left\|\varphi_{1}(t)-\varphi_{0}(t)\right\| \leq \int_{t_0}^{t}\left\|g(s,\varphi_{0}(s))\right\| ds \leq M\left(t-t_{0}\right),$$

对 $n\geq 1$，由 Lip 条件和归纳法，

$$\begin{aligned}\left\|\varphi_{2}(t)-\varphi_{1}(t)\right\| &\leq \int_{t_0}^{t}\left\|g(s,\varphi_{1}(s))-g(s,\varphi_{0}(s))\right\| ds\\ &\leq \int_{t_0}^{t} L\left\|\varphi_{1}(s)-\varphi_{0}(s)\right\| ds \leq \frac{ML}{2!}\left(t-t_{0}\right)^{2},\end{aligned}$$

$$\circ\circ\circ \quad \circ\circ\circ \quad \circ\circ\circ$$

$$\begin{aligned}\left\|\varphi_{n+1}(t)-\varphi_{n}(t)\right\| &\leq \int_{t_0}^{t} L\left\|\varphi_{n}(s)-\varphi_{n-1}(s)\right\| ds\\ &\leq \cdots\cdots\\ &\leq \frac{ML^{n-1}}{n!}\left(t-t_{0}\right)^{n} \leq \frac{ML^{n-1}}{n!}h^{n}, \quad n=2,3,\cdots\end{aligned}$$

从而，$\forall\, n,m\geq 1$，可得

$$\begin{aligned}\left\|\varphi_{n+m}(t)-\varphi_{n}(t)\right\| &\leq \left\|\varphi_{n+m}(t)-\varphi_{n+m-1}(t)\right\|+\left\|\varphi_{n+m-1}(t)-\varphi_{n+m-2}(t)\right\|\\ &\quad+\cdots+\left\|\varphi_{n+1}(t)-\varphi_{n}(t)\right\|\\ &\leq \frac{ML^{n+m-2}}{(n+m-1)!}h^{n+m-1}+\frac{ML^{n+m-3}}{(n+m-2)!}h^{n+m-2}\\ &\quad+\cdots+\frac{ML^{n-1}}{n!}h^{n} \to 0 \quad (n,m\to\infty).\end{aligned}$$

可见，$\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{+\infty}$ 是基本列，从而有一致收敛的极限 $\varphi(t)$，且 $\varphi(t)\in\mathcal{C}\Big([t_0,t_0+h];\mathbb{R}^n\Big)$。

Step 4. 极限函数 $\varphi(t)$ 是等价积分方程(6.1.2)的解。

由 $\varphi_n(t)\xrightarrow{u}\varphi(t)\ (n\to\infty)$ 且 $g(\cdot,\cdot)$ 在 R 上一致 Lip 连续，故

$$g\left(t,\varphi_{n}(t)\right)\xrightarrow{u} g\left(t,\varphi(t)\right)\ (n\to\infty), \quad t\in[t_0,t_0+h]。$$

在 $\varphi_n(t)=y_0+\int_{t_0}^{t} g\left(s,\varphi_{n-1}(s)\right)ds$ 的两端令 $n\to\infty$ 得

$$\varphi(t)=y_0+\int_{t_0}^{t} g\left(s,\varphi(s)\right)ds。$$

在 $[t_0-h,t_0]$ 上同样可证。

Step 5. 解 $\varphi(t)$ 的唯一性。设 $\psi(t)$ 是积分方程另一解，则

$$\left\|\varphi(t)-\psi(t)\right\| \leq L\int_{t_0}^{t}\left\|\varphi(s)-\psi(s)\right\| ds,$$

记 $F(t)=\int_{t_0}^{t}\|\varphi(s)-\psi(s)\|\,ds$，则 $F(t)\in\mathcal{C}[t_0-h,\,t_0+h]$，且

$$F'(t)\le L\cdot F(t),\quad F(t_0)=0\text{。}$$

可见 $0\le F(t)\le 0$，从而 $F(t)\equiv 0$，进而，由 $\|\varphi(t)-\psi(t)\|\equiv 0$ 得 $\varphi(t)\equiv\psi(t)$。 □

注：(1) 同样可用 $g\in\mathcal{C}(\mathrm{R})$ 且 $\dfrac{\partial g}{\partial y}\in\mathcal{C}(\mathrm{R})$ 代替 Lip 条件；(2) 类似于方程情形，利用隐函数定理证明一阶隐式方程组

$$G\left(t,\,y,\,y'\right)=0\quad\left(y\in\mathbb{R}^n,\ G\in\mathbb{R}^n\right)$$

解的存在唯一性定理。

二、Cauchy 问题解的延拓和连续（依赖）性

Theorem 6.0.2 设区域 $\mathrm{G}\subset\mathbb{R}^{n+1}$，向量值函数 $g(t,y)\in\mathcal{C}(\mathrm{G};\mathbb{R}^n)$，且关于 y 满足局部 Lip 条件，则 Cauchy 问题 $\begin{cases}y'(t)=g\left(t,y(t)\right),\\ y(t_0)=y_0\end{cases}$ 的解

$$y=\varphi(t;t_0,y_0),\ (t_0,y_0)\in\mathrm{G}$$

可以延拓至 $t=+\infty$ 或 $-\infty$，者使点 $\left(t,\varphi(t;t_0,y_0)\right)\in\mathrm{G}$ 任意接近区域 G 的边界；作为 $t,\,t_0,\,y_0$ 的函数在其存在范围内连续，且连续依赖于 $t,\,t_0,\,y_0$。

三、Cauchy 问题解的可微性定理

Theorem 6.0.3 设 $g(t,y),\dfrac{\partial g}{\partial y}=\left(\dfrac{\partial g_i}{\partial y_j}\right)_{n\times n}\in\mathcal{C}(\mathrm{G})$，则

$$\begin{cases}y'(t)=g\left(t,y(t)\right),\\ y(t_0)=y_0\end{cases}$$

的解 $y=\varphi(t;t_0,y_0)$ 在其存在范围内是 $t,\,t_0,\,y_0$ 的连续可微函数。

§6.1 Lyapunov 稳定性理论

一、任一特解与(零)平衡解

1、平衡解

Definition 6.1.1 对 NODE 组 $y'(t)=g\big(t,y(t)\big), y(t)\in\mathbb{R}^n$，称其常数解为该方程组的平衡解(或驻定解)。

2、任一特解与零平衡解的转化

一个方程组的任一特解可转化为新方程组的一个零平衡解。

事实上，对 $y'(t)=g\big(t,y(t)\big)$，设其有解 $y=\varphi(t)$，令 $x=y-\varphi(t)$，则

$$\begin{aligned} x' &= y'-\varphi'(t)=g(t,y)-\varphi'(t) \\ &= g\Big(t,\,x+\varphi(t)\Big)-g\big(t,\varphi(t)\big), \end{aligned}$$

记 $f(t,x)=g\Big(t,\,x+\varphi(t)\Big)-g\big(t,\varphi(t)\big)$，则新方程

$$x'(t)=f\big(t,x(t)\big) \tag{6.1.1}$$

有零平衡解，即 $f(t,0)\equiv 0$。从而，可将 $y'(t)=g\big(t,y(t)\big)$ 在任一平衡解处的稳定性转化为 $x'(t)=f\big(t,x(t)\big)$ 在零平衡解处的稳定性。

二、稳定性的物理意义

1、背景：ODE(组)中的常数，即参数，而参数和初始值的量测均有误差，此种误差对问题解的影响是否与误差在某种度量下的大小相适应？

2、现实：利用 ODE(组)的解固然可以精确地预见问题解对参数、初值误差的依赖特性，但对于实际中碰到的 ODE(组)定解问题均不可能精确求解。

3、稳定性总是对有平衡解的 ODE(组)才有实际意义

对任一实际问题，设其对应有相应的 ODE（组）为 $\begin{cases} x'(t)=F\Big(t,x,\lambda\Big), \\ x(t_0)=x_0, \end{cases}$ 若 λ，x_0 有量测误差 $\Delta\lambda,\Delta x_0$，则对应含误差的 ODE（组）为

$$\begin{cases} x'(t)=F\Big(t,x(t),\lambda+\Delta\lambda\Big), \\ x(t_0)=x_0+\Delta x_0, \end{cases}$$

由于 $\Delta\lambda,\Delta x_0$ 的影响，两个 ODE（组）解 x,x_λ 的误差 $y(t)=x_\lambda-x$ 满足如下规律

$$\begin{cases} y'(t)=F\Big(t,x_\Delta(t),\lambda+\Delta\lambda\Big)-F\Big(t,x(t),\lambda\Big) \\ \qquad =F\Big(t,y(t)+x,\lambda+\Delta\lambda\Big)-F\Big(t,x,\lambda\Big), \\ y(t_0)=\Delta x_0, \end{cases}$$

记 $f\Big(t,y,\Delta\lambda\Big)=F\Big(t,y+x,\lambda+\Delta\lambda\Big)-F\Big(t,x,\lambda\Big)$，则 $f\Big(t,0,0\Big)\equiv 0$，可见误差系统

$$\begin{cases} y'(t)=f\Big(t,y(t),\Delta\lambda\Big), \\ y(t_0)=\Delta x_0 \end{cases} \tag{6.1.2}$$

有零平衡解 $y\equiv 0,\ \Delta\lambda=0$。由此可见，因为实际问题

$$\begin{cases} x'(t)=F\Big(t,x,\lambda\Big), \\ x(t_0)=x_0 \end{cases}$$

的精确解总对应于误差系统的零平衡解，稳定性问题总是径直研究(6.1.1)的零平衡解的特性。

三、稳定性的有关基本概念

基本假设：设 ODE 组(6.1.1)：$x'(t)=f\left(t,x(t)\right)$ 中的 $f\left(t,x\right)$ 在包含原点 $\left(0,O\right)\in\mathbb{R}^{1+n}$ 的区域 G 内有连续偏导数，且 $f\Big(t,O\Big)\equiv 0$，从而其满足解的存在唯一性、可延拓性、连续（依赖）性、可微性各定理的条件。

1、稳定与渐近稳定

Definition 6.1.2 (稳定与渐近稳定) 若对 $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=\delta\left(\varepsilon,t_0\right)>0$，使任意满

足$\|x_0\| \le \delta$的x_0，Cauchy 问题

$$\begin{cases} x'(t) = f\big(t, x(t)\big), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{6.1.3}$$

的解$x(t)$总满足 $\|x(t)\| < \varepsilon,\ \forall t \ge t_0$，则称(6.1.3)的零解$x \equiv 0$是稳定的。

进而，若零解稳定且$\exists \delta_0 > 0$，使当$\forall x_0:\ \|x_0\| \le \delta$时，

$$\lim_{t\to\infty} \left\| x\left(t;\, t_0,\, x_0\right) \right\| = 0 \quad \text{(吸引性)}$$

则称$x \equiv 0$是渐近稳定的。

Definition 6.1.3 (吸引域) 若(6.1.3)的零解$x \equiv 0$渐稳，且存在域$D_0 \subset \mathbb{R}^n$，当且仅当对任一点$x_0 \in D_0$，总有$\lim_{t\to\infty} \left\| x\left(t;\, t_0,\, x_0\right) \right\| = 0$，则称$D_0 \subset \mathbb{R}^n$为$x'(t) = f\big(t, x(t)\big)$的吸引域（稳定域）。

Definition 6.1.4 (全局渐近稳定) 若$D_0 = \mathbb{R}^n$即$\delta_0 = +\infty$，则称(6.1.3)的零解$x \equiv 0$全局渐稳定。

Definition 6.1.5 (不稳定) 若(6.1.3)的零解$x \equiv 0$不是稳定的，即：$\exists \varepsilon_0 > 0$，使对$\forall \delta > 0,\ \exists x_0$ s.t. $\|x_0\| \le \delta$，使(6.1.3)的解$x(t)$在某$t_1 \ge t_0$处使$\|x(t_1)\| = \varepsilon_0$，则称(6.1.3)的零解$x \equiv 0$不稳定。

2、稳定与解关于初值、参数的连续依赖性的区别

稳定是解关于初值、参数连续依赖性的一个“特例”，即稳定研究 ODE 组的解相对于零解（零初值，标称参数）的连续依赖性。但与解对初值、参数连续依赖性的一般结果不同之处在于：

(1) 稳定性要求解在$[t_0, +\infty)$上存在，而连续依赖性中涉及到的是解的最大存在区间或其中的有界子区间；

(2) 稳定性研究误差，而“解对初值、参数的连续依赖性”研究近似解本身。

3、渐近稳定与稳定

渐近稳定讨论解相对于零解的误差随时间演化的规律，即任意解 $x(t)$ 与零解 $x(t)\equiv 0$ 的误差 $x(t)\to 0\ (t\to+\infty)$ 意味着误差是逐渐消失的，它是一个关于时间的动态概念；而稳定性是对时间的静态概念，即误差随初值误差的减小而减小，但当给定初值误差，则解的误差不一定随时间减少。

四、稳定性的基本判定准则

1、关于一阶常系数线性 ODE 组

$$x'(t)=Ax(t) \tag{6.1.4}$$

对(6.1.4)，其任一解均可表示形如 $\sum_{m=0}^{l_j-1} c_{jm}t^m e^{\lambda_j t}\ (1\le j\le n)$ 的线性组合，其中 λ_i 满足 $\det(A-\lambda E)=0$，l_j 为 λ_j 的重数，c_{jm} 为 n 维向量，由初值唯一决定。

Theorem 6.1.1 若 A 的特征根 λ_i 均有负实部，则(6.1.4)的零解是渐近稳定的；若 A 有正实部的 λ_i，则(6.1.4)的零解是不稳定的；若 A 无正实部根 λ_i，而有零根或零实部根(纯虚根)的 λ_i，则当这些根为单根时，(6.1.4)的零解是稳定的，否则不稳定。

证明 由一阶常系数线性 ODE 组(6.1.4)解的表达式

$$x(t)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{m=0}^{l_j-1} c_{jm}t^m e^{\lambda_j t},$$

可知，当 A 的特征根 λ_i 均有负实部时，解的任一部分 $t^m e^{\lambda_j t}$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界，因而任意初值 x_0 满足 $\|x_0\|\le\delta$ 意味着 c_{im} 适当地小，因而零解稳定，吸引性只要注意

$$t^m e^{\lambda_j t}\to 0\ \ (t\to\infty),\quad \forall j=1,2,\cdots,k,\forall m=0,1,\cdots,l_i-1$$

均成立即可，因而(6.1.4)的零解渐近稳定。当 A 有正实部的 λ_j 时，则(6.1.4)的解的表达式中对应的项 $t^m e^{\lambda_j t}\to\infty\ \ (t\to\infty)$，因而零解是不稳定的。

当 A 无正实部根 λ_j，而有零根或零实部根(纯虚根)的 λ_j，且这些根为单根时，(6.1.4)解的表达式中对应的项 $c_{jm}t^m e^{\lambda_j t}$ 全部蜕化为形如 c_{jm} 或

$$c_{jm}e^{\mathrm{i}\beta t}=c_{jm}(\cos\beta t+\mathrm{i}\cdot\sin\beta t)$$

的项，因而零解稳定；若至少有一个非单根，则它对应的项中总有$c_{j0}+tc_{j1}$或

$$c_{j0}e^{\mathrm{i}\beta t}+c_{j1}te^{\mathrm{i}\beta t}=\left(c_{j0}+tc_{j1}\right)\cos\beta t+\mathrm{i}\cdot\left(c_{j0}+tc_{j1}\right)\sin\beta t\text{，}$$

此时零解不稳定是显然的。 □

2、关于一阶非线性的 ODE 组

$$x'(t)=Ax(t)+R(x(t)) \tag{6.1.5}$$

其中$R(0)=0$且$\dfrac{\|R(x)\|}{\|x\|}\to 0$(当$\|x\|\to 0$时)。

Theorem 6.1.2 **若A无零特征根或零实部特征根，则(6.1.5)与(6.1.4)的零解有相同的稳定性态，即**

若A的全部特征根λ_i满足$\mathrm{Re}\lambda_i<0$时，(6.1.5)的零解是渐近稳定的；

A有特征根λ_i满足$\mathrm{Re}\lambda_i>0$时，(6.1.5)的零解是不稳定的。

证明放在§6.2 的最后。

3、矩阵的特征根的实部的正负判定

除了使用特征值直接判定(6.1.4)和(6.1.5)的稳定性之外，也可以间接地判定特征值的符号，这就是如下的 Rauth-Hurwitz 定理。

Theorem 6.1.3 **给定如下代数方程**

$$a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0\quad(a_0>0) \tag{6.1.6}$$

令 $$\Delta_1=a_1,\ \Delta_2=\begin{vmatrix}a_1 & a_0\\ a_3 & a_2\end{vmatrix},\ \Delta_3=\begin{vmatrix}a_1 & a_0 & 0\\ a_3 & a_2 & a_1\\ a_5 & a_4 & a_3\end{vmatrix},$$

$$\Delta_n=\begin{vmatrix}a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \cdots & a_n\end{vmatrix}=a_n\Delta_{n-1}$$

其中$a_i=0\ (\forall i>n)$，则方程(6.1.6)的根均有负实部，当且仅当

$$a_1>0,\ \Delta_2>0,\ \Delta_3>0,\ \cdots,\ \Delta_{n-1}>0,\ a_n>0\text{。}$$

4、例子 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y+x\left[1-(x^2+y^2)\right],\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x+y\left[1-(x^2+y^2)\right]\end{cases}$ 与其线性近似方程组 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\quad y+x\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x+y\end{cases}$ 均为零解稳定的，因为后者有特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$。

§6.2 稳定性的 Lyapunov 函数判定

一、基本思想

1、构造一个函数 此函数本质上是一个与能量有关的函数，可视为“能量函数”，但它不同于有物理意义的能量表达式，因为这样的能量函数通常是无量纲的，即没有物理单位。

2、判定 利用所得的“能量”函数沿 ODE 组状态轨线（或积分曲线）关于时间的衰减特性，可得到 ODE 组零解的稳定性结果。

二、稳定性的判定——Lyapunov 函数法

考虑如下的一阶驻定非线性常微分方程(NODE)组

$$x'(t)=f\left(x(t)\right) \tag{6.2.1}$$

其中 $f(0)=0$ 且 $f(x)$ 在区域 $\mathrm{G}=\left\{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|\le H\right\}$ (H 为正常数)内偏导数连续，从而由 $x(t_0)=x_0$ 决定的 Cauchy 问题在 G 内有唯一解。

1、有关的概念

Definition 6.2.1 **给定区域** $\mathrm{G}=\left\{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|\le H\right\}$**，设函数** $V(x)$ **在** G **内连续，** $V(0)=0$**，则**

称 $V(x)$ **为常正函数，若** $V(x)\ge 0,\forall x\in\mathrm{G}$**；**

称 $V(x)$ **为定正函数，若** $V(x)\ge 0,\forall x\in\mathrm{G}$ **且** $V(x)=0\Longleftrightarrow x=0$**；**

称 $V(x)$ **为常负(或定负)函数，若** $-V(x)$ **为常正(或定正)函数。**

例子 常正函数$V(x,y)=(x+y)^2$，$V(x,y,z)=x^2+y^2$；定正函数$V(x,y)=x^2+y^2$，$V(x,y)=(x+y)^2+y^4$；不定函数$V(x,y)=xy$；分片函数定正、定负函数

$$V(x,y)=\sin\left(x^2+y^2\right);$$

与参数值有关的函数的定正、定负性：$V(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ 当 $a>0$ 且 $4ac-b^2>0$时是定正的，当$a<0$且$4ac-b^2>0$时是定负的。

2、V函数沿 ODE 组状态轨线的全导数

设$V(x)$连续且有连续偏导数，则沿(6.2.1): $x'=f(x)$的任一解$x=\varphi(t)$，称

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(\varphi(t))&=\sum_{i=1}^{n}\left.\frac{\partial V}{\partial x_i}\right|_{x=\varphi(t)}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_i(t)\\&=grad V(x)\big|_{x=\varphi(t)}\cdot\varphi'(t)=grad V(\varphi(t))\cdot f(\varphi(t))\\&=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}V(\varphi(t))\cdot f_i(\varphi(t))\end{aligned}$$

为函数$V(x)$沿(6.2.1)的解(或状态轨线)的全导数。

3、Lyapunov 定理及其常用的一个推广

(1) 基本判别定理

Theorem 6.2.1 对方程组(6.2.1)：$x'(t)=f(x(t))$，**设在**G**内有定正函数**$V(x)$，

[i] **若**$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x(t))\le 0$ **(或**$\equiv 0$**)，则**$x'(t)=f(x(t))$**的零解稳定;**

[i i] **若**$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x(t))<0,\ \forall x\neq 0\in\mathbb{R}^n$**，则**$x'(t)=f(x(t))$**的零解渐近稳定;**

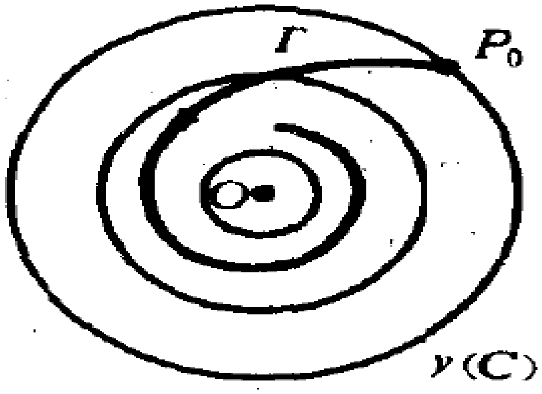
[iii] **若存在常数**$\mu\ge 0$**，且**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x(t))=\mu V(x(t))+W(x(t)),$$

其中$\mu=0$**时，**$W(x)$**定正，**$\mu\neq 0$**时，**$W(x)$**常正或**$\equiv 0$**，同时在**x_0**的任意小领域内有**$\bar{x}$**使**$V(\bar{x})>0$**，则**$x'(t)=f(x(t))$**的零解不稳定。**

证明 [i] 任取充分小的$\varepsilon>0$使得邻域$\mathrm{U}(0;\varepsilon)=\left\{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|<\varepsilon\right\}\subset\mathrm{G}$，记

$$c=\min_{\|x\|=\varepsilon}V(x)。$$

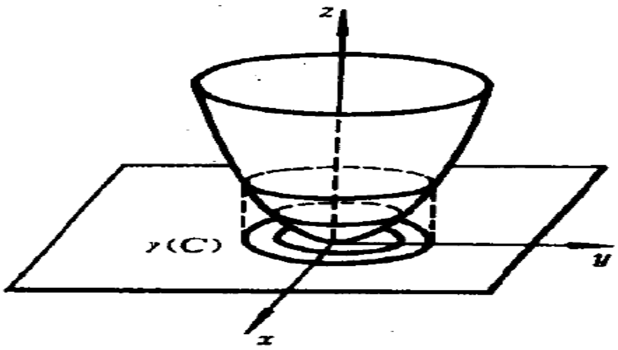


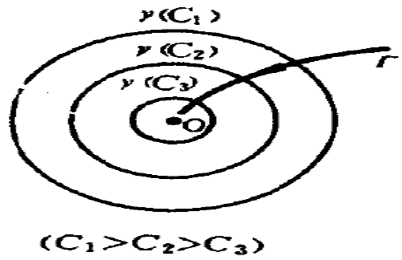
由于$V(x)$在G上定正，故$c>0$。同时，由$V(x)$的连续性及$V(0)=0$知，存在$\delta\in(0,\varepsilon)$使得当任意$x\in \mathrm{U}(0;\delta)\triangleq\left\{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|<\delta\right\}$时，$0\le V(x)<c$。

对任意的初值$x_0\in \mathrm{U}(0;\delta)$，记其解为$x(t)=x(t;t_0,x_0)$，则

$$0\le V(x(t))=V(x(t_0))+\int_{t_0}^{t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x(s))\mathrm{d}s\le V(x_0)<c,\quad \forall t\ge t_0,$$

可见对任意$t\ge t_0$，$\|x(t)\|<\varepsilon$，从而$x'(t)=f\left(x(t)\right)$的零解稳定。





[ii] 将[i]中的$\delta\in(0,\varepsilon)$作为定义中的δ_0，则对任意$x_0\in \mathrm{U}(0;\delta_0)$时，有

$$\|x(t)\|<\varepsilon,\quad \forall t\ge t_0,$$

以下证明$\lim_{t\to\infty}\|x(t)\|=0$。为此，先证$\lim_{t\to\infty}V\left(x(t)\right)=0$。事实上，由

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x(t))<0,\ \forall x\ne 0\in\mathbb{R}^n$$

可知，$V(x(t))$关于$V(x(t))$单调减少，因而$\lim_{t\to\infty}V\left(x(t)\right)$存在，记为$\alpha$。

若$\alpha\ne 0$，则对任意$t\ge t_0$总有$V\left(x_0\right)=V(x(t_0))\ge V(x(t))\ge\alpha>0$，由于$V(x)$在G上定正、连续且满足$V(0)=0$知，存在$\gamma>0$，使得对任意$t\ge t_0$总有

$$\|x(t)\|\ge\gamma。$$

取 $m=\max_{\gamma\le\|x\|\le H}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x(t))$，则由 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x(t))$ 定负知 $m<0$。从而，

$$V(x(t))-V(x_0)=\int_{t_0}^{t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x(t))\,\mathrm{d}t\le m(t-t_0),$$

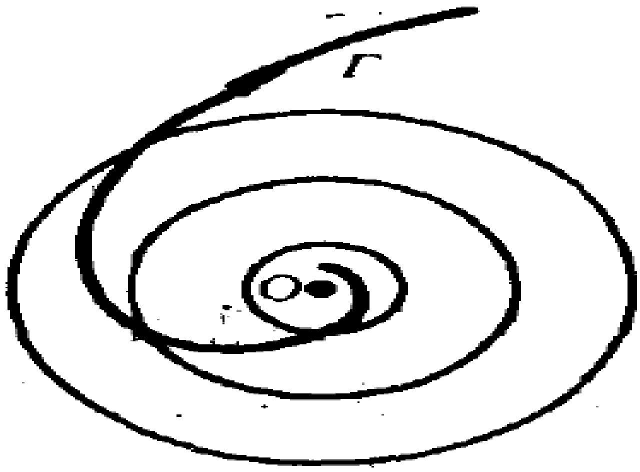
即 $V(x(t))\le V(x_0)+m(t-t_0)$，所以当 $t\ge t_0$ 足够大时，必有 $V(x(t))<0$，与 $V(x(t))$ 的定正性矛盾。因此，$\lim_{t\to\infty}V(x(t))=0$。

其次，若 $\lim_{t\to\infty}\|x(t)\|=0$ 不成立，则由零解稳定知 $x(t)$ 有界，因而存在序列 $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$，$t_k\to\infty\ (k\to\infty)$ 使得 $\lim_{t\to\infty}\|x(t_k)\|=\|x^*\|\ne 0$。

进而由 $V(x(t))$ 的定正性，又有 $\lim_{t\to\infty}V(x(t_k))=V(x^*)\ne 0$，矛盾，即

$$\lim_{t\to\infty}\|x(t)\|=0$$

成立。因此 $x'(t)=f(x(t))$ 的零解是渐近稳定的。



[iii]　由已知，任给 $\delta<H$，存在 $x_0\in\mathrm{U}(0;\delta)$ 使得 $V(x_0)>0$，则相应的解 $x(t)=x(t;t_0,x_0)$ 必越出区域 $\mathrm{G}=\{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|\le H\}$ 之外。若不然，则有 $x(t)\in\mathrm{G}$，即

$$\|x(t)\|\le H,\quad \forall t\ge t_0。$$

但是，由 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x(t))=\mu V(x(t))+W(x(t))$ 及对 W 的假设，当 $\mu\ne 0$ 时，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x(t))-\mu V(x(t))\ge 0\qquad 或\ \equiv 0,$$

因而，$V(x(t))\ge V(x_0)e^{\mu(t-t_0)}\ge V(x_0)>0$；当 $\mu=0$ 时，由 $W(x(t))$ 的定正性，有

$$V(x(t))-V(x_0)=\int_{t_0}^{t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x(t))\,\mathrm{d}t\ge 0,$$

故同样有 $V(x(t))\ge V(x_0)>0$。

再由$V(x)$在G上定正、连续且满足$V(0)=0$知，存在$\gamma>0$，使得对任意$t\geq t_0$总有$\|x(t)\|\geq\gamma$。注意到$W(x)$的定正性，可知$m=\min_{\gamma\leq\|x\|\leq H}W(x)>0$。从而，

$$V(x(t))-V(x_0)=\int_{t_0}^{t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x(t))\,\mathrm{d}t\geq m(t-t_0),$$

相应的，当t充分大时，$V(x(t))$可以任意大，这和$V(x)$在G上连续从而有界矛盾。

由上，必有$t^*>t_0$使得$\|x(t^*)\|>H$，即解$x(t)$必越出区域G之外。

由定义，$x'(t)=f(x(t))$的零解是不稳定的。 □

例子　不能用 Theorem 6.1.2，但是可用 Theorem 6.2.1 判定的 ODE 组：

<a> $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-y-x\left[x^2+y^2\right],\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x-y\left[x^2+y^2\right]\end{cases}$零解渐近稳定，而其线性近似方程组$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-y,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x\end{cases}$零解稳定，但非渐近稳定。因为后者有零实部特征值$\lambda_{1,2}=\pm\mathrm{i}$，均为单根，且对前者可用 Lyapunov 函数$V(x,y)=x^2+y^2$判定稳定性，亦可将其转化为极坐标下的方程组，求解可得稳定性。

<b> $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-y+ax^3,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\quad x+ay^3\end{cases}$的线性近似方程组$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-y,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x\end{cases}$的特征值为纯虚根$\lambda=\pm\mathrm{i}$，不能用 Theorem 6.1.2 判定零解的稳定性。取 Lyapunov 函数为$V(x,y)=x^2+y^2$，则$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x(t))=a\left(x^4+y^4\right)$。因此，

$$a<0\Rightarrow\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x(t))\text{ 定负，方程组零解渐近稳定；}$$

$$a>0\Rightarrow\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x(t))\text{ 定正，方程组零解不稳定；}$$

$$a=0\Rightarrow\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x(t))\equiv0,\quad\text{方程组零解稳定。}$$

(2) LaSall 不变性原理

Theorem 6.2.2 **设有正定函数**$V(x)$，$x\in\mathrm{G}$，**通过方程组**

$$x'(t)=f(x(t)),\quad x\in\mathrm{G}$$

的全导数$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x(t))$**常负，且在集合**$\left\{x(t)\in\mathbb{R}^n:\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x(t))=0\right\}$**中，除零解**$x=0$**之外**

不含$x'(t)=f\left(x(t)\right)$的其它整条正半轨线，则$x'(t)=f\left(x(t)\right)$的零解渐近稳定。

证明 由已知，$x'(t)=f\left(x(t)\right)$的零解是稳定的。且对任意的$\delta_0\in(0,H)$，任取$x_0\in \mathrm{U}(0;\delta_0)$，由$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x(t))$常负且在集合$\left\{x\in\mathbb{R}^n:\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x(t))=0\right\}$中，除零解$x=0$之外不含$x'(t)=f\left(x(t)\right)$的其它整条正半轨线，因此，$x(t)$或者使得$V(x(t))$关于$t$严格单调减少，或者使得$V(x(t))$关于$t$单调减少、在闭曲面族：$V(x)=c$ ($\forall c>0$充分小)之间无穷多个$[t_{2k-1},t_{2k}]$段上严格单调减少，且有

$$\lim_{t\to\infty}V\left(x(t)\right)=0。$$

进而，可证$\lim_{t\to\infty}\|x(t)\|=0$，否则，根据$V(x)$在G上定正、连续且$V(0)=0$可知$\lim_{t\to\infty}V\left(x(t)\right)\neq 0$，矛盾。因而$\lim_{t\to\infty}\|x(t)\|=0$。

由定义，$x'(t)=f\left(x(t)\right)$的零解是渐近稳定的。 □

例子 对$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=x_2,\\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=-x_1-3\left(1+x_2^2\right)x_2,\end{cases}$ 取$V(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x_1(t),x_2(t))=-6\left(1+x_2^2\right)x_2^2\le 0。$$

令$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x_1(t),x_2(t))=0$，得$x_2(t)\equiv 0$，进而$x_1(t)\equiv 0$。

因此，集合$\left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2:\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=0\right\}$中，除零解$(x_1,x_2)=(0,0)$之外不含原方程组的其它整条正半轨线，从而零解渐近稳定。

4、说明：

(1) 在 Lyapunov 稳定性理论的基础上，进一步又产生了许多判别 ODE 组稳定性的结论，它们有的针对时变(非驻定)ODE 组，有的针对定常(驻定、自治)ODE 组，有的则是根据方程组的线性与非线性特性等。

(2) 在 Lyapunov 稳定性定理中，并没有涉及如何构造一个适合给定 ODE 组的函数$V(x)$，这实际是一个非常复杂的问题，并没有一个普遍适用的有效方法。但是针对一些特殊的 ODE 组，已有大量的方法提出，以设计(构造)函数$V(x)$。

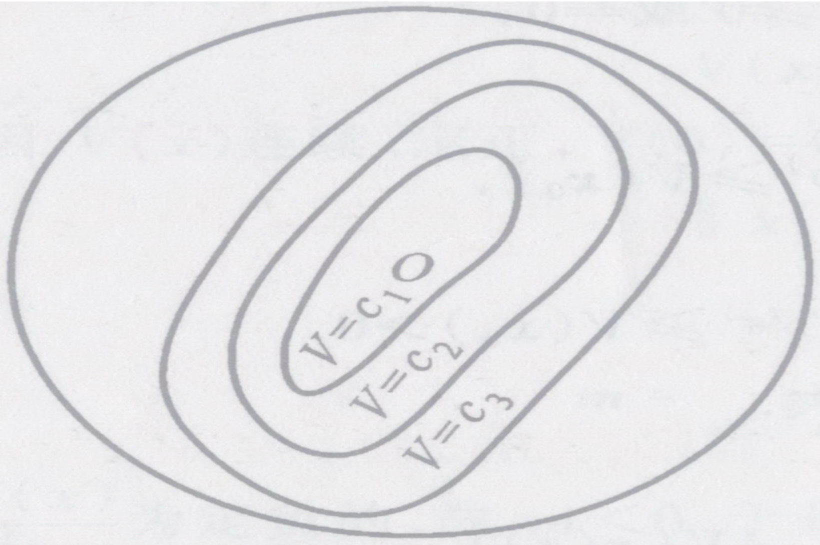
特别地，对 ODE 组(常系数)已有了完整实用的充要条件。

5、几何解释：

一般的$\mathbb{R}^n$中，对正定的连续 Lyapunov 函数$V(x)$作曲面族：

$$V(x)=c \quad (c>0)$$

则当c充分小时，曲面族是闭的，且$c_1<c_2$对应的闭曲面$V(x)=c_1$包含在$V(x)=c_2$中，特别，当$n=2$时，闭曲面族$V(x)=c$为闭曲线族。



(a) $V=c$ 闭曲线族($c_1<c_2<c_3$)

若沿着轨线$x(t)$有$\frac{d}{dt}V(x(t))\le 0$，则函数$V(x(t))$对$t\ge t_0$是单调不增的，从而当$t\ge t_0$时，随t的增加，轨线$x(t)$要么层层进入闭曲线族$V(x)=c$，要么在某一条曲线或其上某段运动，而不会由任一闭曲线的内部出去。

6、二次型 Lyapunov 函数的构造

对常系数 LODE 组，可以考虑构造它的二次型形式的 Lyapunov 函数。

Lemma 6.2.1 对任意$n\times n$阵A，设特征值$\lambda_k(k=1,2,\cdots,n)$满足

$$\lambda_k+\lambda_j\ne 0 \quad \forall k\ne j,\ k,j=1,2,\cdots,n\text{，}$$

则对任意负定阵$-Q$，存在唯一的对称阵B使

$$A^TB+BA=-Q\text{。}$$

Theorem 6.2.3 $n\times n$ **阵** A **稳定**(即所有特征值的实部均为负)**当且仅当对任给负定阵** $-Q$**，存在正定阵** B**，满足** $A^TB+BA=-Q$ **且** $B=\int_0^\infty e^{A^Tt}Qe^{At}\ dt$ 。

证明 ？

Corollary 6.2.1 常系数 LODE 组 $x'(t)=Ax(t)$ **渐近稳定当且仅当存在正定二次型** $V(x)=x^TBx$**，使全导数** $\frac{d}{dt}V(x(t))=x^T(t)\left(A^TB+BA\right)x(t)$ **是负定的。**

三、应用——§6.1 的 Theorem 6.1.2 的证明

Proof 对 $x'(t)=Ax(t)+R(x(t))$，有 $\|R(x)\|/\|x\|\to 0\ \ (\|x\|\to 0)$。

注意到 A 稳定，由 Lemma 6.2.1 知，对任意负定阵 C，存在正定阵 B，使

$$A^TB+BA=C,$$

故二次型 $V(x)=x^TBx$ 沿 NLODE 组 $x'(t)=Ax(t)+R(x(t))$ 的全导数

$$\frac{d}{dt}V(x(t))=x^TCx+2x^TBR(x),$$

其中，当 $\|x\|$ 充分小时，因有 $\left|x^TBR(x)\right|<\frac{1}{4}\left|x^TCx\right|$，故

$$\frac{d}{dt}V(x(t))<\frac{1}{2}x^TCx<0\quad\left(\forall x\neq 0\in\mathbb{R}^n\right),$$

从而由 Lyapunov 定理（Theorem 6.2.1），$x'(t)=Ax(t)+R(x(t))$ 的零解渐近稳定。

若 A 有正实部特征值时，考虑如下 LODE 组

$$x'(t)=\left(A-\frac{\mu}{2}E_n\right)x(t),\tag{6.2.2}$$

其中正实数 $\mu>0,\ E_n$ 为 n 阶单位阵。

注意到 $A-\frac{\mu}{2}E_n$ 的特征值形如 $\lambda-\frac{\mu}{2}$，故当 μ 充分小时，(6.2.2)中的 $A-\frac{\mu}{2}E_n$ 仍有正实部特征值，且其任意两特征根之和非零。

从而，对正定阵为 E_n，存在非常负对称阵 B，使

$$\left(A-\frac{\mu}{2}E_n\right)^TB+B\left(A-\frac{\mu}{2}E_n\right)=E_n,$$

即 $A^TB+BA=E_n+\mu B$，相应地，$V(x)=x^TBx$ 沿 $x'(t)=Ax(t)+R(x(t))$ 的全导数

$$\frac{d}{dt}V(x(t))=\mu V+x^Tx+2x^TBR(x),$$

因为当$\|x\|$充分小时，$W(x)=x^Tx+2x^TBR(x)$定正，且$V(x)=x^TBx$非常负，故 ODE 组$x'(t)=Ax(t)+R(x(t))$的零解不稳定。 □

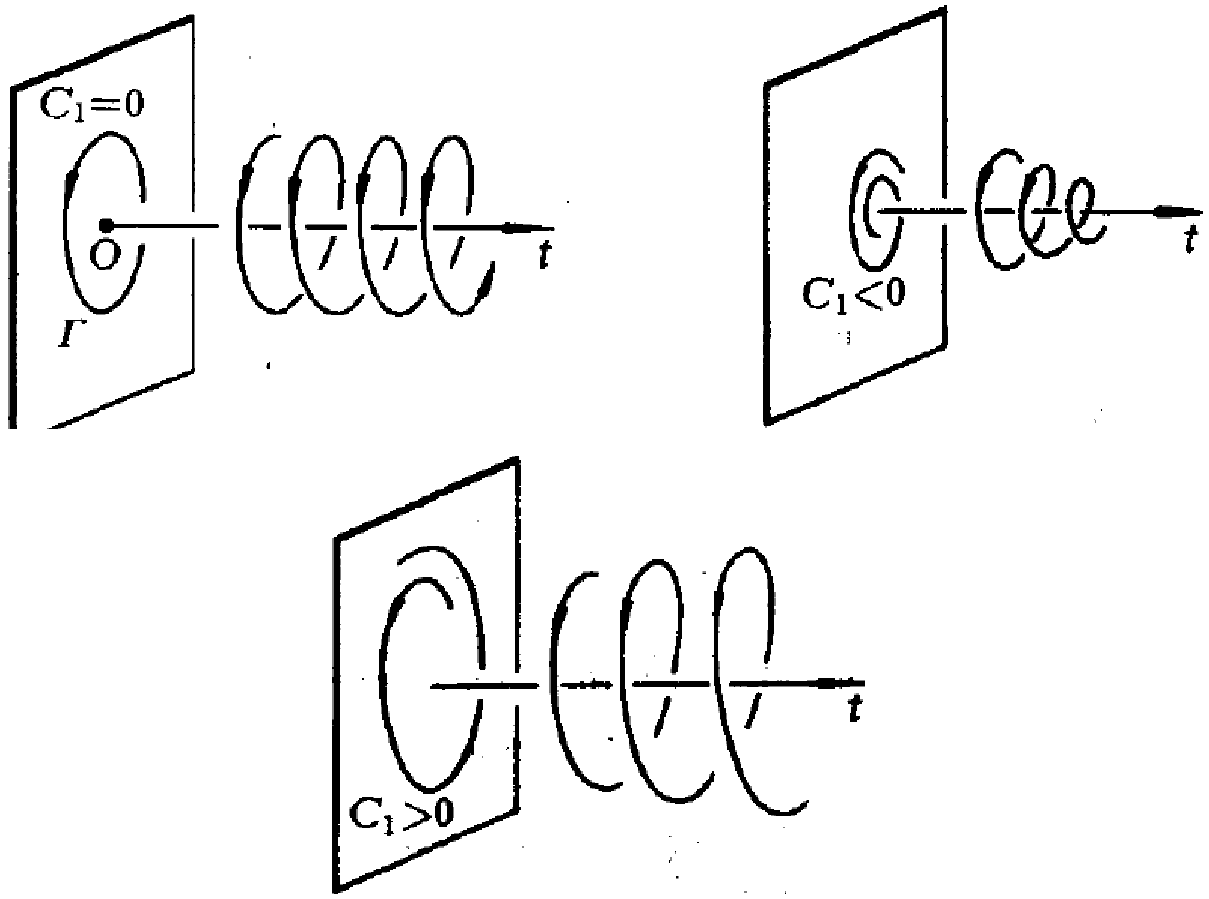
§6.3 定性理论初步——奇点

一、相平面、奇点

对 ODE 组$x'(t)=f(x), x\in D\subseteq\mathbb{R}^n$，其积分曲线形成集合

$$\left\{\left(t,x(t)\right):\ x(t)=\varphi\left(t;t_0,x_0\right),\forall x_0\in\mathbb{R}^n\right\}\subset\mathbb{R}^{n+1},$$

称$x(t)$的值域空间$\mathbb{R}^n$为$x'(t)=f(x)$的相空间，$x(t)$在相空间中的轨迹为（相）轨线。而代数方程组$f(x)=0$的解$x=x^*\in\mathbb{R}^n$称为 ODE 组$x'(t)=f(x)$组的平衡解（或驻定、常解）或奇点（平衡点）。



二、定性理论的出发点、特征、局限性

1、出发点（优势）

轨线与积分曲线相比，具有维数低一维的特点，从而当$(t,x(t))\in\mathbb{R}^{n+1}$中$n$的不太大时，降低一阶维数会使问题更为直观、明了。如，

$$3\dim\to 2\dim,\ \ 4\dim\to 3\dim\,.$$

2、特征

用轨线代替对应的积分曲线，时间不再明显出现，但时间的增大或减小用相应的箭头表示在轨线上。

3、局限性

从方程组的类型上讲，定性理论主要适用于驻定方程组。

从数量上讲，当维数$n+1$较大时，降低维数的优势将不复存在，所以定性理论最成功的范例还是在$n=2$时，当$n>2$时，优势不明显。

奇怪的是$n=1$也不行！

三、平面一阶驻定 ODE 组奇点的分类

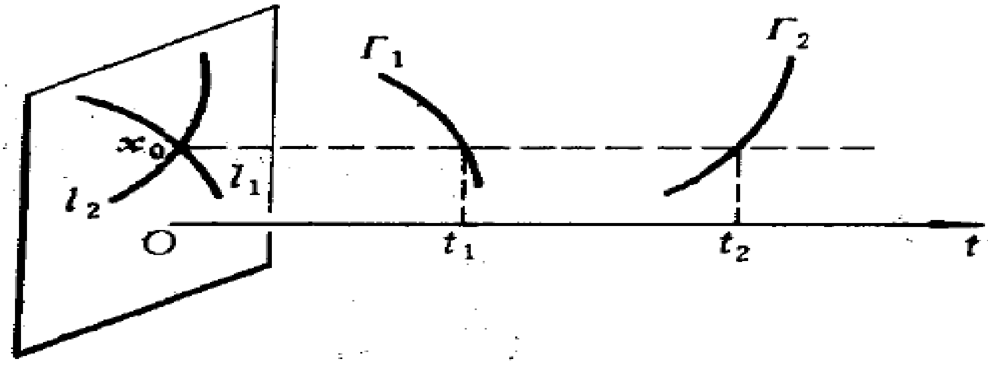
1、相轨线的特点

对$\begin{cases}x'(t)=X(x(t),y(t)),\\ y'(t)=Y(x(t),y(t)),\end{cases}$ 设$X(\cdot,\cdot)$，$Y(\cdot,\cdot)$有连续偏导数，且X^2+Y^2不恒为零，则等价地可得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Y(x(t),y(t))}{X(x(t),y(t))}\quad (X(x,y)\neq 0),$$

或$\frac{dx}{dy}=\frac{X(x(t),y(t))}{Y(x(t),y(t))}$ $(Y(x,y)\neq 0)$，从而由解的存在唯一性定理可知，在相平面 xoy 面内，方程组轨线不相交。

但是在奇点及其附近，轨线是可能相交的。



2、LODE 组奇点的分类与总结

考虑平面 LODE 组$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t), \\ y'(t) = cx(t) + dy(t), \end{cases}$ 设$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$，此时，$(0,0)$是唯一奇点，且非奇异变换

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad (6.3.1)$$

可将原 LODE 组的系数矩阵化为标准形式，为以下之一(其中$\lambda, \mu, \alpha, \beta$为实数)：

$$\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix},$$

由于非奇异变换(6.3.1)不改变 LODE 组的系数矩阵$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$的特征值和奇点，从而它保持相平面上轨线的性态，也保持该 LODE 组的奇点类型不变。

(I) 同号相异特征值

由$\frac{d\xi}{dt} = \lambda_1 \xi,\ \frac{d\eta}{dt} = \lambda_2 \eta$，得$\xi(t) = Ae^{\lambda_1 t}, \eta(t) = Be^{\lambda_2 t}$，这里$\lambda_1, \lambda_2$是实特征根，$A, B$是任意常数。分析轨线随时间$t \to +\infty$的走向，可知

(1) $\lambda_1, \lambda_2 < 0$时，零解渐近稳定：

当$B = 0$时，ξ轴的左半轴及右半轴本身为轨线；当$A = 0$时，η轴的上半轴及下半轴也为轨线；

当$A \cdot B \neq 0$且$\lambda_1 > \lambda_2$时，轨线如下图左侧所示，因为轨线t处的斜率

$$k = \frac{\eta(t)}{\xi(t)} = \frac{B}{A} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \to 0 \text{ (当} t \to +\infty \text{时)},$$

当$A\cdot B\neq 0$且$\lambda_1<\lambda_2$时，轨线如下图中间所示，因为轨线处的斜率满足

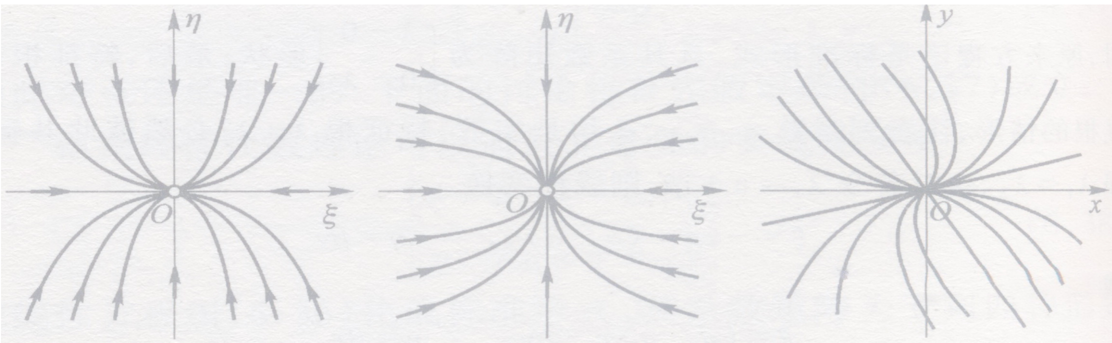
$$\frac{1}{k}=\frac{\xi(t)}{\eta(t)}=\frac{A}{B}e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}\to 0\ (\text{当}\ t\to+\infty\ \text{时});$$

(2) $\lambda_1,\lambda_2>0$时，上述讨论只需将改为，即将图中轨线走向改为相反方向，此时零解不稳定，称$(0,0)$为不稳定结点。

(3) 下图右侧为一般未经坐标变换(旋转、伸缩)的方程组

$$\begin{cases}x'(t)=ax(t)+by(t),\\ y'(t)=cx(t)+dy(t),\end{cases}$$

在$\lambda_1,\lambda_2<0$时的轨线图，所有轨线趋于原点，除个别曲线外，它们在奇点处有公切线，称$(0,0)$为稳定结点。



(II)异号特征值

仍有$\frac{d\xi}{dt}=\lambda_1\xi,\ \frac{d\eta}{dt}=\lambda_2\eta$，即$\xi(t)=Ae^{\lambda_1 t},\eta(t)=Be^{\lambda_2 t}$。

分析轨线随时间$t\to+\infty$的走向，可知

(1) 当$\lambda_1<0<\lambda_2$时：当$B=0$时，ξ轴的左半轴及右半轴本身为轨线；当$A=0$时，η轴的上半轴及下半轴也为轨线，且其中一个离开原点，另一个趋向原点；

当$A\cdot B\neq 0$且$\lambda_1<0<\lambda_2$时，$\xi(t)=Ae^{\lambda_1 t},\eta(t)=Be^{\lambda_2 t}$表明

$$\xi(t)\to 0,\quad \eta(t)\to+\infty\quad (\text{当}\ t\to+\infty\ \text{时})$$

轨线如下图左侧所示。

(2) $\lambda_2<0<\lambda_1$时：当$B=0$时，ξ轴的左半轴及右半轴本身为轨线；当$A=0$

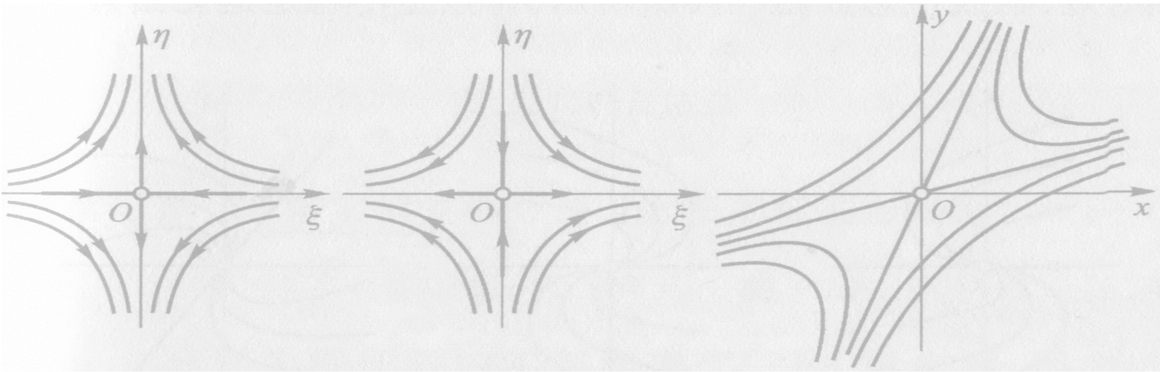
时，η 轴的上半轴及下半轴也为轨线，且其中一个离开原点，另一个趋向原点；

当 $A\cdot B\neq 0$ 且 $\lambda_2<0<\lambda_1$ 时，$\xi(t)=Ae^{\lambda_1 t},\eta(t)=Be^{\lambda_2 t}$ 表明

$$\xi(t)\to+\infty,\quad \eta(t)\to 0\quad (当\, t\to+\infty\, 时)$$

轨线如下图中间所示。

(3) 一般地，未经坐标变换(旋转、伸缩)的方程组 $\begin{cases}x'(t)=ax(t)+by(t),\\ y'(t)=cx(t)+dy(t),\end{cases}$ 在 λ_1,λ_2 异号时的轨线图如下图右侧，称此奇点 $(0,0)$ 为鞍点。



(III) 重特征根

(1) 当 $b\neq 0$ 或 $c\neq 0$ 时：方程组的标准形式如下

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}=\lambda\xi+\eta,\quad \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}=\lambda\eta\,,$$

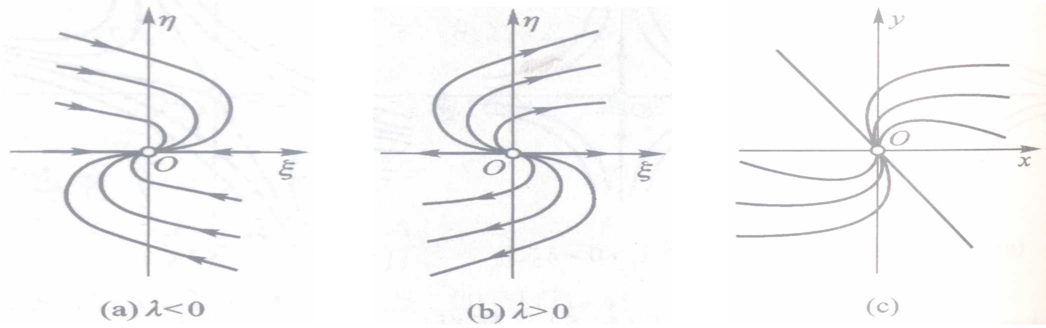
解得 $\xi=(At+B)\,e^{\lambda t},\ \eta=A\,e^{\lambda t}$，这里 λ 是实特征根，A,B 是任意常数。

当 $\lambda<0$ 时，显然有 $\xi(t)\to 0,\eta(t)\to 0$ (当 $t\to+\infty$ 时)，因而零解渐近稳定。注意到当 $A=0$ 时，ξ 轴的左半轴及右半轴本身为轨线，而当 $A\neq 0$ 时，由于

$$\frac{\eta(t)}{\xi(t)}=\frac{A}{At+B}\to 0\,(当\, t\to+\infty\, 时),$$

且当 $t=-\dfrac{B}{A}$ 时 $\xi(t)=0$，可知轨线穿过 η 轴与 ξ 轴相切与原点，如下图左侧所示，称此奇点为稳定退化结点。

当 $\lambda>0$ 时，只要将 $t\to+\infty$ 改为 $t\to-\infty$，前述讨论依然有效，轨线图如下图中所示，称此奇点为不稳定退化结点。

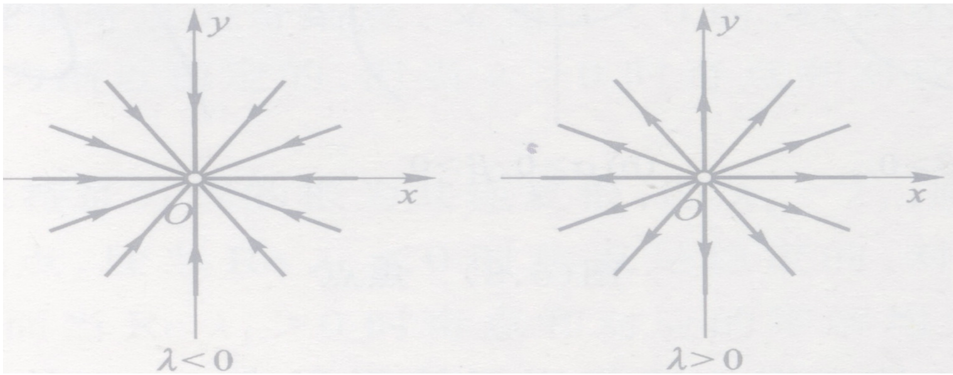


(2) 当$b=c=0$时：方程组的形式如下

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\lambda x,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\lambda y,\quad \lambda=a=d\,,$$

解得$x=A\,e^{\lambda t},\ \eta=B\,e^{\lambda t}$，这里$\lambda$是实特征根，$A,B$是任意常数。

由$y=\dfrac{B}{A}x$知，轨线沿确定的方向趋向或远离原点的射线，如下图所示。当$\lambda<0$时，称之为稳定的奇结点，当$\lambda>0$时，称之为不稳定的奇结点。



(IV) 非零实部复特征根

方程组的标准形式如下

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}=\alpha\xi+\beta\eta,\quad \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}=-\beta\xi+\alpha\eta\,,$$

这里α,β是特征根实部与虚部。引入极坐标变换$\begin{cases}\xi=r\cos\theta,\\ \eta=r\sin\theta,\end{cases}$ 注意到

$$\xi\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}+\eta\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}=r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t},\quad \xi\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}-\eta\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}=r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

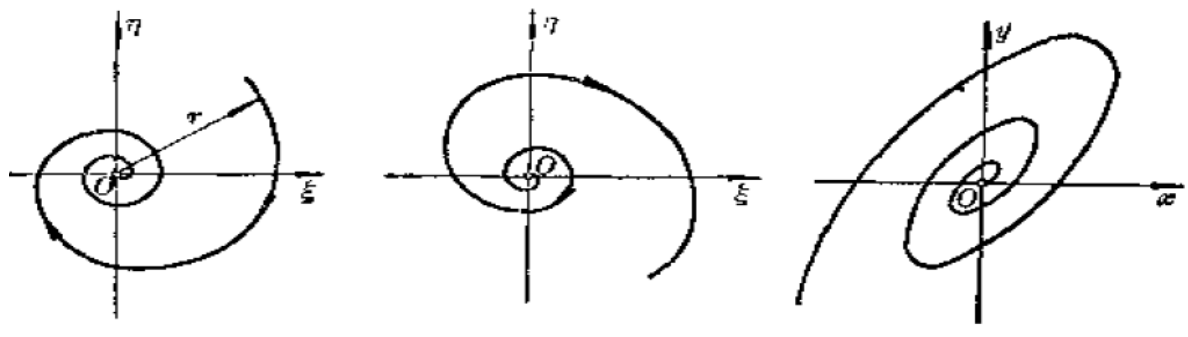
原方程组进一步化为$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\alpha r,\ \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-\beta$，解得

$$r=A\,e^{\alpha t},\ \theta=-\beta t+B\,,$$

其中$A>0,B$是任意常数。

轨线为对数螺线，依顺($\beta>0$)时针或逆($\beta<0$)时针方向盘旋趋近($\alpha<0$)或

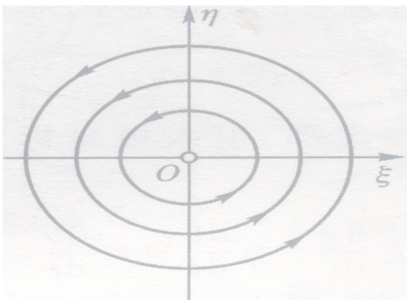
远离($\alpha<0$)原点，如下图。称此奇点$(0,0)$为稳定或不稳定的焦点。

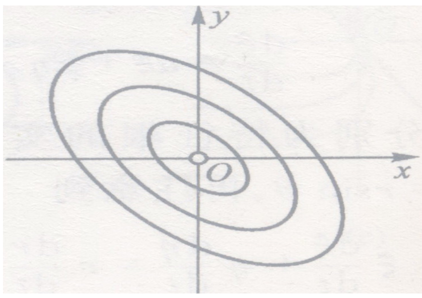


(a) $\alpha<0,\beta>0$　　(b) $\alpha>0,\beta>0$　　(c)

(V) 零实部复特征根——纯虚根

此时，相当于(IV)中$\alpha=0$，解$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=0,\ \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-\beta$，解得$r=A,\ \theta=-\beta t+B$，其中$A>0,B$是任意常数。显然，轨线为以原点为心的一族同心圆，如下图，从而，零解稳定而非渐近稳定，且称该奇点为方程组的中心。





总结以上分类，可得如下定理。

定理 6.3.1　设平面 LODE 组$\begin{cases}x'(t)=ax(t)+by(t),\\ y'(t)=cx(t)+dy(t),\end{cases}$**满足** $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}\neq 0$，**则其零解(奇点)依特征根的性质，分别为：**

<1>　若特征值$\lambda_1\neq\lambda_2$均为实根，则当$\lambda_1\cdot\lambda_2>0$时奇点为结点，且当$\lambda_1<0$时结点稳定，对应的零解渐近稳定，当$\lambda_1>0$时奇点与对应的零解不稳定；当$\lambda_1\cdot\lambda_2<0$时奇点为鞍点，且零解不稳定。

<2>　若有重特征值λ，则奇点通常为退化结点，但在$b=c=0$时，它为奇结点，且当$\lambda<0$时，两类结点均稳定，零解渐近稳定，当$\lambda>0$时，奇点与对应

的零解不稳定。

<3> 若特征值为共轭复根，即$\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$，则当$\mathrm{Re}\lambda_1 \neq 0$时奇点$(0,0)$为焦点，且当$\mathrm{Re}\lambda_1 < 0$时焦点稳定，对应的零解渐近稳定，而当$\mathrm{Re}\lambda_1 > 0$时，奇点和对应的零解均不稳定，当$\mathrm{Re}\lambda_1 = 0$时奇点为中心，零解稳定但不是渐近稳定。

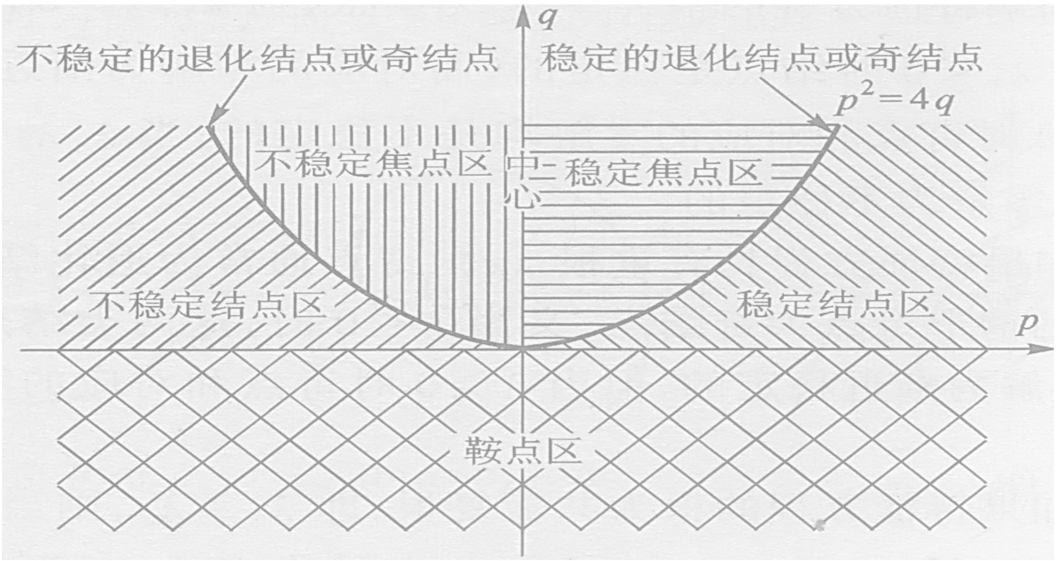
为了将奇点的类型与特征值之间的关系用图表表示，令

$$p = -(a+d), \quad q = ad - bc,$$

则特征方程就表示为

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0。$$

进而，奇点类型与$\left(p, q\right)$平面上的区域的对应如下图所示。



§6.4　极限环大意

在线性方程组情形，孤立奇点及其周围的轨线分布情况较为简单，除了中心型奇点周围的轨线是一族围绕原点的闭曲线(对应于方程组的周期解)外，其余情形，无论稳定与否，均是一端趋于奇点，另一端趋于无穷(相应于$t \to +\infty$和$t \to -\infty$)。本节讨论非线性方程组的周期解(极限环)及其周围的轨线分布。

一、极限环概念

1、例子 对平面一阶驻定非线性方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x+y-x\left(x^2+y^2\right),$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x+y-y\left(x^2+y^2\right),$$

引入极坐标变换$\begin{cases}\xi=r\cos\theta,\\ \eta=r\sin\theta,\end{cases}$ 则方程组化为

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=r\left(1-r^2\right),\qquad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-1,$$

且可得两个特解$\begin{cases}r=0,\\ \theta=t_0-t\end{cases}$ $(t\ge t_0)$和$\begin{cases}r=1,\\ \theta=t_0-t\end{cases}$ $(t\ge t_0)$。

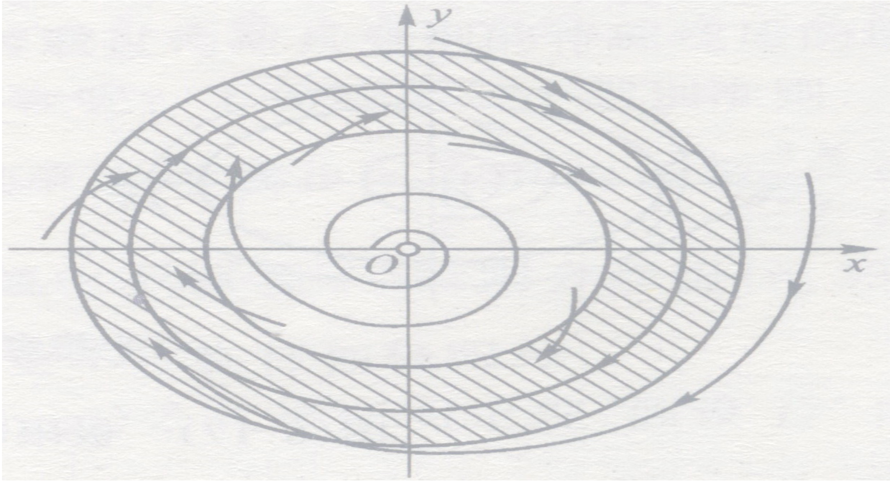
易知，前一个解是不稳定焦点，后一个解是相平面上的一个圆，对应于周期为2π的周期解，且轨线沿顺时针方向旋转。

为了考察轨线的性态，首先考虑穿过相平面上以任意的$R>0$为半径的圆$\mathrm{U}(0;R)$上任一点$\left(R,\theta^*\right)$的轨线走向：

当$R=R_1<1$时，由$\left.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right|_{r=R_1}=R_1\left(1-{R_1}^2\right)>0,\ \left.\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right|_{\theta=\theta^*}=-1<0$知，轨线依顺时针方向穿过圆周$r=R_1$从内到外。

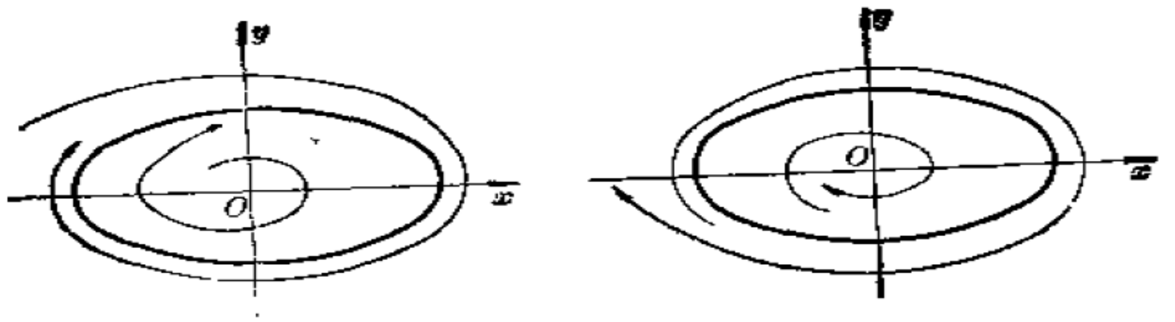
当$R=R_2>1$时，由$\left.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right|_{r=R_2}=R_2\left(1-{R_2}^2\right)<0,\ \left.\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right|_{\theta=\theta^*}=-1<0$知，轨线依顺时针方向穿过圆周$r=R_2$从外到内。

进而，对环域$D=\left\{(r,\theta):R_1<r<R_2\right\}$，其内部没有原方程组的奇点，且上述讨论表明，在$D$的边界$r=R_1$和$r=R_2$上，所有轨线均从外入内不再出去，且当$R_1,R_2$充分接近于 1 时，所有解的轨线将任意趋于周期解的轨线$r=1$，如下图。

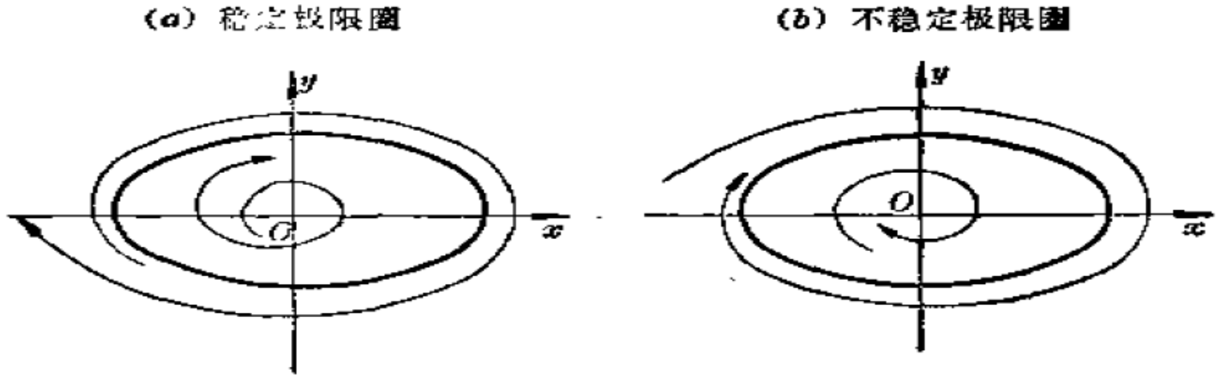


2、极限环

定义 6.4.1 对任意的二维驻定方程组，称其孤立的周期解(若存在的话)在相平面上对应的相轨线为该方程组的一个极限环；若其附近的轨线正向($t\to\infty$)趋于此极限环，则称之为稳定的极限环，若其附近的轨线负向($t\to-\infty$)趋于此极限环，则称之为不稳定的极限环，若其两侧的轨线分别以正向($t\to\infty$)、负向($t\to-\infty$)趋于此极限环，则称之为半稳定的极限环，如下图所示。



(a) 稳定极限圈　　　　(b) 不稳定极限圈



(c) 半稳定极限圈

二、极限环的判定

考虑平面驻定常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=X(x(t),y(t)),\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=Y(x(t),y(t))\text{，}\tag{6.4.1}$$

其中，$X(\cdot,\cdot),\ Y(\cdot,\cdot)$ 在相平面的某区域G内有一阶连续偏导数。

1、充分条件

定理 6.4.1　如果区域G内存在有界的环形闭域D，内部不含(6.4.1)的奇点，且(6.4.1)过上点的解$x=x(t), y=y(t)$当$t\geq t_0$(或$t\leq t_0$)时不离开域，则该解本身是一个周期解(闭轨线)，或者依正向(或负向)趋近于内的某一个周期解(闭轨线)。

2、必要条件

定理 6.4.2

Chapter 7 一阶线性偏微分方程

(first order linear partial differential equations, PDE)

一阶 PDE 是 PDE 理论中最基本的内容。一方面为后续的 PDE 理论提供了某些基础和实例，另一方面又发展、完善、深化了 ODE 理论。

§7.1　PDE 的基本概念

一、关于方程

1、基本形式　一阶 PDE 形如

$$F\left(x_1,\cdots,x_n;u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)=0,\text{，} \tag{7.1.1}$$

其中 F 通常是其各变元的连续函数，u 是未知函数，$x=\left(x_1,\cdots,x_n\right)$ 是 u 的自变量。

2、线性一阶偏微分方程

非齐次一阶线性　$\sum_{k=1}^{n}a_k(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_k}=a_0(x)u+a(x),\ \ x\in\mathbb{R}^n;$

齐次一阶线性　$\sum_{k=1}^{n}a_k(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_k}=0,\ \ x\in\mathbb{R}^n;$

不是线性的一阶 PDE 称为非线性一阶 PDE。

3、最重要的一阶非线性 PDE——拟线性一阶 PDE

$$\sum_{k=1}^{n}b_k\left(x,u\right)\frac{\partial u}{\partial x_k}=b_0\left(x,u\right),\quad x\in\mathbb{R}^n$$

二、关于一阶（线性）PDE 的解

1、一阶 PDE 的解

Definition 7.1.1 称 $u=\varphi(x),\ x\in\mathbb{R}^n$ 是一阶 PDE(7.1.1)的解，若 $u=\varphi(x)$ 在 x 的某个域 D 内连续且有各一阶偏导数，使对应的一阶 PDE(7.1.1)成为恒等式。

2、积分曲面

Definition 7.1.2 对一个一阶 PDE，其解 $u=\varphi(x)\in\mathbb{R}^1$ 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的图象

$$\left\{(x,\varphi(x)):\ u=\varphi(x), x\in D\subset\mathbb{R}^n\right\}\subset\mathbb{R}^{n+1}$$

为一个 n 维曲面，称为对应一阶 PDE(7.1.1)的一个积分曲面。

3、特征方程

Definition 7.1.3 称如下对称形式的 ODE 组

$$\frac{dx_1}{a_1(x)}=\frac{dx_2}{a_2(x)}=\cdots\cdots=\frac{dx_n}{a_n(x)},\quad x\in\mathbb{R}^n$$

为一阶线性齐次 PDE: $\sum_{k=1}^n a_k(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_k}=0$ 的特征方程。

三、注：一般而言，一阶 PDE 的通解和一个任意函数有关；而不是和任意常数有关，而泛泛讨论一个 PDE 的求解，即便对一阶 PDE 也不是非常有意义，通常总是在一定的定解条件下讨论其解。

§7.2 一阶线性 PDE 与 ODE 组的关系

——首次积分

一、一阶 ODE 组的首次积分

1、例：对一阶 ODE $y'=f(x,y)$，其通解常为隐式通解，即

$$F(x,y,C)=0\text{，}\quad C\text{ 为任意常数。}$$

一般而言，可解出 C 得 $\psi(x,y)=C$，即方程的通解中的任一特解 $y=\varphi(x)$ 满足 $\psi(x,\varphi(x))\equiv C$。此时，$\psi(x,y)=C$ 称为一阶 ODE $y'=f(x,y)$ 的首次积分。

2、首次积分的定义

对一阶 ODE 组：$Y'=F(x,Y),\ x\in\mathbb{R}^1$，设 F 在域 $\mathrm{G}\subset\mathbb{R}^{n+1}$ 内满足存在唯一性

条件，则 Cauchy 问题

$$\begin{cases} Y' = F(x,Y), \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases} \tag{7.2.1}$$

在点$(x_0, Y_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$的某个邻域内有唯一解

$$Y = \Phi(x; x_0, Y_0) \in \mathbb{R}^n,$$

由唯一性，得$Y_0 = \Phi(x_0; x, Y)$。对任意$Y = \Phi(x; x_0, Y_0)$成立，即特解$Y = \Phi(x; x_0, Y_0)$，使函数$\Phi(x_0; x, Y) = Y_0$。

Definition 7.2.1 设有域$\mathrm{G} \subset \mathbb{R}^{n+1}$内的连续可微且不恒为常数的函数$\Psi(x,Y)$，若$Y$用(7.2.1)的任一解$\Phi(x)$代替可得

$$\Psi(x, \Phi(x)) \equiv C,$$

则称$\Psi(x,Y) \equiv C$为(7.2.1)的首次积分，即**首次积分中的$\Psi(x,Y)$沿(7.2.1)的任一积分曲线取常数值，而常数依不同的积分曲线而定。**

3、首次积分的独立性

Definition 7.2.2 设(7.2.1)有n个首次积分

$$\Psi_j(x,Y) \equiv C_j \ (j = 1, 2, \cdots, n),$$

若 Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(\Psi_1, \Psi_2, \cdots, \Psi_n)}{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_n)} = \left|\frac{\partial \Psi_i}{\partial \Psi_j}\right|_{n \times n} \tag{7.2.2}$$

在$\mathrm{G} \subset \mathbb{R}^{n+1}$内恒不为零，则称首次积分

$$\Psi_j(x,Y) \equiv C_j \ (j = 1, 2, \cdots, n)$$

为相互独立的。此时，由隐函数定理可得

$$Y = Y(x;\ C_1, C_2, \cdots, C_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{7.2.3}$$

二、一阶 ODE 组与一阶线性 PDE 的关系

1、一阶 ODE 情形 设

$$y' = f(x,y) \tag{7.2.4}$$

有通解 $y=\varphi(x,c)$，解 c 得 $c=\psi(x,y)$ 为首次积分，则对(7.2.4)的任一解 $y(x)$，有

$$\psi(x,y(x)) \equiv c$$

故 $\dfrac{\partial\psi}{\partial x}+\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$，即有 $\dfrac{\partial\psi}{\partial x}+f(x,y)\dfrac{\partial\psi}{\partial y}=0$。可见 $u=\psi(x,y)$ 是一阶线性齐次 PDE

$$\frac{\partial u}{\partial x}+f(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}=0 \tag{7.2.5}$$

的解。反之，对一阶线性 PDE(7.2.5)的任一解 $u(x,y)$，代入(7.2.4)的任一解 $y(x)$ 得

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}+f(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\equiv 0$$

即 $u(x,y(x))\equiv$ 常数，可见 $u(x,y)\equiv c$ 为(7.2.4)的一个首次积分。于是有：

Theorem 7.1.1 连续可微函数 $u=u(x,y)$ 是 $\dfrac{\partial u}{\partial x}+f(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$ 的解当且仅当

$$u(x,y)\equiv c$$

为 $y'=f(x,y)$ 的一个首次积分。

2、一阶 ODE 组情形

Theorem 7.1.2 函数 $\Psi(x,Y)=c,\ Y\in\mathbb{R}^n$ 是 ODE 组

$$Y'=F(x,Y)=\left(f_j(x,Y)\right)_{n\times 1}$$

的首次积分当且仅当 $u=\Psi(x,Y)$ 在 $\mathrm{G}\subset\mathbb{R}^{n+1}$ 内满足如下一阶线性齐次 PDE：

$$\frac{\partial u}{\partial x}+f_1(x,Y)\frac{\partial u}{\partial y_1}+\cdots+f_n(x,Y)\frac{\partial u}{\partial y_n}=0\text{。}$$

3、利用首次积分减少 ODE 组的未知函数

Theorem 7.1.3 若已知(7.2.1)：$\begin{cases}Y'=F(x,Y),\\ Y(x_0)=Y_0\end{cases}$ 的一个首次积分 $\Psi(x,Y)=c$，则可以把(7.2.1)降低一维(即减少一个未知函数)。

Proof：由首次积分的定义，首次积分 $\Psi(x,Y)=c$ 的偏导数

$$\frac{\partial\Psi}{\partial y_1},\ \frac{\partial\Psi}{\partial y_2},\ \cdots,\ \frac{\partial\Psi}{\partial y_n}$$

不全恒等于零，不妨设 $\dfrac{\partial\Psi}{\partial y_n}\neq 0$. 由隐函数定理，可以解 $\Psi(x,Y)=c$ 得

$$y_n = g(x, y_1, \cdots, y_{n-1}, c),$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big/ \frac{\partial \Psi}{\partial y_n}, \qquad \frac{\partial g}{\partial y_j} = -\frac{\partial \Psi}{\partial y_j} \Big/ \frac{\partial \Psi}{\partial y_n}, \quad j = 1, 2, \cdots, n-1.,$$

将 g 代入(7.2.1)的前 $n-1$ 个方程，可消去 y_n 得如下 ODE 组

$$\frac{dy_j}{dx} = f_j\Big(x, y_1, \cdots, y_{n-1}, g(x, y_1, \cdots, y_{n-1}, c)\Big), \quad j = 1,2,\cdots,n-1, \tag{7.2.6}$$

这是一个有 $n-1$ 个未知函数的一阶 ODE 组，设其解为

$$y_1 = u_1(x), \cdots, y_{n-1} = u_{n-1}(x), \tag{7.2.7}$$

则函数组

$$\begin{cases} y_j = u_j(x), \quad j = 1,2,\cdots, n-1, \\ y_n = g(x, u_1(x), \cdots, u_{n-1}(x), c) \end{cases} \tag{7.2.8}$$

是(7.2.1)的解。

事实上，由于(7.2.7)是(7.2.6)的解，故(7.2.8)满足(7.2.1)的前 $n-1$ 个方程。为证(7.2.8)满足(7.2.1)第 n 个方程，注意到

$$\begin{aligned} \frac{dy_n}{dx} &= \frac{\partial g}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial y_j} \cdot u_j'(x) \\ &= \frac{\partial g}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial y_j} \cdot f_j\Big(x, y_1, \cdots, y_{n-1}, g(x, y_1, \cdots, y_{n-1}, c)\Big), \\ &= \frac{-1}{\frac{\partial \Psi}{\partial y_n}} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} + f_1 \frac{\partial \Psi}{\partial y_1} + \cdots + f_{n-1} \frac{\partial \Psi}{\partial y_{n-1}} \right) \end{aligned}$$

因为 $\Psi(x,Y) = c$ 是(7.2.1)的首次积分，当且仅当

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} + f_1 \frac{\partial \Psi}{\partial y_1} + \cdots + f_{n-1} \frac{\partial \Psi}{\partial y_{n-1}} + f_n \frac{\partial \Psi}{\partial y_n} = 0,$$

故有 $\frac{dy_n}{dx} = f_n\Big(x, y_1, \cdots, y_{n-1}, y_n\Big)$，即(7.2.8)满足(7.2.1)第 n 个方程。

4、首次积分的存在性

Theorem 7.1.4 设 $P_0 = (x_0, Y_0) \in \mathrm{G}$，则有点 P_0 的邻域

$$\mathrm{U}(P_0) = \mathrm{G}_0 \subset \mathrm{G},$$

使(7.2.1)：$\begin{cases} Y' = F(x, Y), \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases}$ 在 G_0 内有 n 个相互独立的首次积分。

Theorem 7.1.5 ODE 组(7.2.1)最多只有 n 个互相独立的首次积分(不妨设域 G_0 内的 n 个互相独立首次积分为 $\Psi_1, \Psi_2, \cdots, \Psi_n$)，则区域 G_0 内 ODE 组(7.2.1)的任何首次积分 $V(x, Y) = c$ 可表示为

$$V(x, Y) = h\Big[\Psi_1(x, Y), \Psi_2(x, Y), \cdots, \Psi_n(x, Y)\Big],$$

其中 $h[\cdot, \cdot, \cdots, \cdot]$ 为某个连续可微的函数。

注：上述结果仅在局部成立，大范围内一般不成立。

§7.3 首次积分与 ODE 组的求解

一、ODE 组的求解

对 ODE 组 $y_j' = f_j\Big(x; y_1, y_2, \cdots, y_n\Big), j = 1, 2, \cdots, n$，记其向量形式为

$$Y' = F(x; Y), \quad Y \in \mathbb{R}^n, \tag{7.3.1}$$

其中 $F(x; Y)$ 在闭域 $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 上连续可微。

1、由首次积分决定 ODE 组的解

Theorem 7.3.1 设 $\Psi_j\ (x, Y) = c_j (j = 1, 2, \cdots, n)$ 是(7.3.1)的 n 个相互独立的首次积分，则(7.3.1)的任一解均可由

$$\Psi_j(x, Y) = c_j (j = 1, 2, \cdots, n)$$

选择适当的常数组 $c_j\ (j = 1, 2, \cdots, n)$ 唯一确定。

Proof：由设 $\dfrac{\partial\left(\Psi_1, \Psi_2, \cdots, \Psi_n\right)}{\partial\Big(y_1, y_2, \cdots, y_n\Big)} \neq 0$，从而由隐函数定理，$\Psi_j(x, Y) = c_j (j = 1, 2, \cdots, n)$ 等价地确定函数组

$$\begin{aligned} Y(x) &= \Big(y_j(x)\Big)_{n\times 1} = \Big(\varphi_j(x; c_1, c_2, \cdots, c_n)\Big)_{n\times 1} \\ &= \Phi(x; c_1, c_2, \cdots, c_n) \end{aligned},$$

且$Y'(x)=\frac{d\Phi}{dx}$连续。

由隐函数的定义，有$\Psi_j\Big(x;\Phi(x;c_1,c_2,\cdots,c_n)\Big)=c_j(j=1,2,\cdots,n)$，故

$$\begin{aligned}0&=\frac{d}{dx}\Psi_j\left(x,\Phi(x;c_1,c_2,\cdots,c_n)\right)=\frac{\partial\Psi_j}{\partial x}+\sum\nolimits_{k=1}^{n}\frac{\partial\Psi_j}{\partial y_k}\frac{dy_k}{dx}\\&=\frac{\partial\Psi_j}{\partial x}+\sum\nolimits_{k=1}^{n}\frac{\partial\Psi_j}{\partial y_k}\frac{d\varphi_k}{dx}.\end{aligned}, \tag{7.3.2}$$

而由首次积分的充要条件，有

$$\frac{\partial\Psi_j}{\partial x}+\sum\nolimits_{k=1}^{n}\frac{\partial\Psi_j}{\partial y_k}f_k=0,\quad j=1,2,\cdots,n\text{，} \tag{7.3.3}$$

对任意$(x,Y)\in\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^{n+1}$成立，特别地，对

$$Y(x)=\Phi(x;c_1,c_2,\cdots,c_n)$$

成立。由(7.3.2)减去(7.3.3)，知

$$\sum\nolimits_{k=1}^{n}\frac{\partial\Psi_j}{\partial y_k}\left[\frac{d\varphi_k}{dx}-f_k\right]\equiv 0$$

对$j=1,2,\cdots,n$成立。注意到其系数行列式$\dfrac{\partial\left(\Psi_1,\Psi_2,\cdots,\Psi_n\right)}{\partial\Big(y_1,y_2,\cdots,y_n\Big)}\neq 0$，故该方程组只有零解$\frac{d\varphi_k}{dx}-f_k\left(x;\varphi_1,\cdots,\varphi_n\right)\equiv 0,\ \ k=1,2,\cdots,n$，此即

$$\frac{d\varphi_k}{dx}=f_k\left(x;\varphi_1,\cdots,\varphi_n\right),\ \ k=1,2,\cdots,n\text{，}$$

亦即$\frac{d\Phi}{dx}=F\left(x;\Phi(x)\right)\equiv 0$，可见

$$Y(x)=\Phi(x;c_1,c_2,\cdots,c_n)$$

是(7.3.1)的通解，而$c_1,c_2,\cdots,c_n$为任意常数。

另一方面，对(7.3.1)的任一解

$$y_j=\overline{\varphi}_j(x;x_0,\overline{y}_1,\overline{y}_2,\cdots,\overline{y}_n),\quad j=1,2,\cdots,n\text{，}$$

记$\bar{c}_j=\psi_j(x_0,\overline{y}_1,\overline{y}_2,\cdots,\overline{y}_n),\quad j=1,2,\cdots,n$，则由$n$个相互独立的首次积分

$$\Psi_j(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)=\bar{c}_j\quad(j=1,2,\cdots,n)$$

可唯一地确定解

$$y_j=\varphi_j(x;\bar{c}_1,\bar{c}_2,\cdots,\bar{c}_n),\quad j=1,2,\cdots,n\text{。}$$

注意到$\overline{\varphi}_j(x_0;x_0,\overline{y}_1,\overline{y}_2,\cdots,\overline{y}_n)=\overline{y}_j=\varphi_j(x_0;\bar{c}_1,\bar{c}_2,\cdots,\bar{c}_n)\quad\left(j=1,2,\cdots,n\right)$，由(7.3.1)解的唯一性可知

$$\varphi_j(x;\bar{c}_1,\bar{c}_2,\cdots,\bar{c}_n)=\overline{\varphi}_j(x;x_0,\overline{y}_1,\overline{y}_2,\cdots,\overline{y}_n)\text{，}$$

其中$j=1,2,\cdots,n$，即$y_j=\overline{\varphi}_j(x;x_0,\overline{y}_1,\overline{y}_2,\cdots,\overline{y}_n)$可由

$$\Psi_j(x,Y)=c_j(j=1,2,\cdots,n)$$

唯一确定，只需取

$$c_j=\bar{c}_j=\psi_j(x_0,\overline{y}_1,\overline{y}_2,\cdots,\overline{y}_n),\quad j=1,2,\cdots,n\text{。}$$

2、通积分

Definition 7.3.1 称(7.3.1)的n个相互独立的首次积分

$$\Psi_j(x,Y)=c_j(j=1,2,\cdots,n)$$

的全体为(7.3.1)的通积分

二、举例：求通积分

1、
$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2xy}{x^2-y^2-z^2},\\[2mm]\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{2xz}{x^2-y^2-z^2};\end{cases}$$

2、
$$\frac{dx}{xz}=\frac{dy}{yz}=\frac{dz}{xy}\text{。}$$

§7.4 一阶 LPDE 的求解

一、一阶齐次 LPDE 的求解　考虑

$$\sum_{k=1}^{n}a_k(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}=0,\text{，}\tag{7.4.1}$$

其中$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$，$a_k(x)\ \ (k=1,2,\cdots,n)$在域$\mathrm{D}\subset\mathbb{R}^n$内连续可微，且处处不同时为零。

1、特解与某个首次积分的关系

Theorem 7.4.1 $u(x)$是(7.4.1)的解当且仅当$u(x)=c$是 ODE 组

$$\frac{dx_1}{a_1(x)}=\frac{dx_2}{a_2(x)}=\cdots=\frac{dx_n}{a_n(x)} \tag{7.4.2}$$

的一个首次积分。

证明由 Theorem 7.1.2 易得，此处省略。

2、通解与相互独立首次积分的关系

Theorem 7.4.2 设

$$\Psi_j(x)=c_j(j=1,2,\cdots,n-1),\quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{7.4.3}$$

是(7.4.2)的$n-1$个相互独立首次积分，则(7.4.1)的任一解可表示为

$$u(x)=\Phi\big(\Psi_1(x),\Psi_2(x),\cdots,\Psi_{n-1}(x)\big),\quad x\in\mathbb{R}^n,,$$

其中Φ是连续可微的任意函数。

证明：先证$\Phi\big(\Psi_1(x),\Psi_2(x),\cdots,\Psi_{n-1}(x)\big)=c$（任意常数）是(7.4.2)的首次积分，从而$u(x)$是(7.4.1)的解。

由设，$a_k(x)$在$\mathrm{D}\subset\mathbb{R}^n$内处处不同时为零，不妨设$a_n(x)\neq 0$，从而(7.4.2)的解以$x_n$为自变量：

$$x_j=\varphi_j(x_n),\quad j=1,2,\cdots,n-1。$$

由首次积分定义，对$j=1,2,\cdots,n-1$有

$$\Psi_j(\varphi_1(x_n),\varphi_2(x_n),\cdots,\varphi_{n-1}(x_n),x_n)\equiv c_j,$$

进而可知$\Phi\Big(\Psi_1(\varphi_1(x_n),\varphi_2(x_n),\cdots,\varphi_{n-1}(x_n),x_n),\cdots,\Psi_{n-1}(\varphi_1(x_n),\varphi_2(x_n),\cdots,\varphi_{n-1}(x_n),x_n)\Big)=$ $\Phi\big(c_1,c_2,\cdots,c_{n-1}\big)=const$，即

$$\Phi\big(\Psi_1(x),\Psi_2(x),\cdots,\Psi_{n-1}(x)\big)\Big|_{x_j=\varphi_j(x_n),\ j=1,2,\cdots,n-1}=const,$$

可见$\Phi\big(\Psi_1(x),\Psi_2(x),\cdots,\Psi_{n-1}(x)\big)=c$是(7.4.2)的首次积分。

其次，$u(x)=\Phi\big(\Psi_1(x),\Psi_2(x),\cdots,\Psi_{n-1}(x)\big)$是(7.4.1)的通解，即对(7.4.1)的任一解

$$u(x)=\varphi\big(x_1,x_2,\cdots,x_n\big),$$

存在相应的$\hat{\Phi}$使$u(x)=\hat{\Phi}(\Psi_1(x),\Psi_2(x),\cdots,\Psi_{n-1}(x))$。

由解、首次积分的定义与 Theorem 7.1.2，有

$$\begin{cases}\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_k}=0,\\ \sum_{k=1}^{n} a_k(x)\dfrac{\partial\Psi_j}{\partial x_k}=0,\quad j=1,2,\cdots,n-1.\end{cases} \tag{7.4.4}$$

由设$a_k(x)\ \ (k=1,2,\cdots,n)$在域$\mathrm{D}\subset\mathbb{R}^n$内不同时为0，从而线性代数方程组(7.4.4)的系数行列式

$$\frac{\partial\left(\varphi,\Psi_1,\Psi_2,\cdots,\Psi_{n-1}\right)}{\partial\left(x_1,\ \ x_2,\ \ \cdots,\ \ x_n\right)}\equiv 0\text{，}$$

可见，$\varphi,\Psi_1,\Psi_2,\cdots,\Psi_{n-1}$函数相关，由已知$\Psi_1,\Psi_2,\cdots,\Psi_{n-1}$相互独立，故$\varphi$可由$\Psi_1,\Psi_2,\cdots,\Psi_{n-1}$表示，即存在相应的$\hat{\Phi}$使

$$u(x)=\varphi(x)=\hat{\Phi}(\Psi_1(x),\Psi_2(x),\cdots,\Psi_{n-1}(x))\text{。}$$

二、一阶拟线性 PDE 的求解

对一阶拟线性 PDE

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_k}=b(x,u), \tag{7.4.5}$$

的求解是将u作为一个新的自变量，从而可将(7.4.5)转化为一个新的一阶齐次 LPDE 的求解。

基本条件： $a_k(x,u)\ \ (i=1,2,\cdots,n)$，$b(x,u)$在区域$\mathrm{D}\subset\mathbb{R}^{n+1}$内连续可微，且

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k(x,u)|\neq 0,\quad \forall(x,u)\in\mathrm{D}\text{。}$$

1、(7.4.5)转化为一个齐次 LPDE

设对应于显式解$u=\varphi(x)$的隐式解为

$$F(x,u)=0\text{，}$$

则$F(x,\varphi(x))\equiv 0$。由隐函数求导得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} = -\frac{\partial F}{\partial x_k}\Big/\frac{\partial F}{\partial u},\ \ k=1,2,\cdots,n.$$，

代入(7.4.5)得

$$-\sum_{k=1}^{n} a_k(x,u)\frac{\partial F}{\partial x_k}\Big/\frac{\partial F}{\partial u} = b(x,u),$$，

故函数$F(x,u)$是一阶齐次 LPDE

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(x,u)\frac{\partial F}{\partial x_k} + b(x,u)\frac{\partial F}{\partial u} = 0 \qquad (7.4.6)$$

的解。

2、一阶拟线性 PDE 的通解与特征方程

Theorem 7.4.3 设$\psi_j(x,z)=c_j\ (j=1,2,\cdots,n)$是 ODE 组

$$\frac{dx_1}{a_1(x,z)} = \frac{dx_2}{a_2(x,z)} = \cdots = \frac{dx_n}{a_n(x,z)} = \frac{dz}{b(x,z)} \qquad (7.4.7)$$

的n个独立的首次积分，且由

$$\Phi\Big(\psi_1(x,z),\psi_2(x,z),\cdots,\psi_n(x,z)\Big)=0$$

可确定函数$z=u(x)=u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，则此函数即为拟线性方程(7.4.5)的通解，其中$\Phi(u_1,u_2,\cdots,u_n)$是任意的连续可微函数。

称(7.4.5)为(7.4.5)的特征方程。

Chapter 8 二阶 LODE 的边值问题

（boundary value problems of second order LODE）

对一个n阶 ODE 或一阶 ODE 组（含n个未知量），其通解中包含n个任意常数，为了确定一个特解，需要n个定解条件，当这n个条件给在自变量的同一个值处时，就是 Cauchy 问题；由于实际的需要，这样的条件有时也需要给在自变量的多个值处，当给在两个自变量处时，就是所谓的边值问题。

在应用中，二阶 LODE 的边值问题的理论应用广泛，有明确的物理意义。

§8.1 边值问题解的存在唯一性

一、边值问题的定义：（以二阶 ODE 为例）

考虑如下二阶 LODE：

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)\text{，} \tag{8.1.1}$$

其中$y = y(x)$为未知函数，$p(x), q(x), f(x)$为已知的连续性函数，则可以提出如下三类基本的边值问题：

1、第一类边值问题：

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \\ y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \end{cases}$$

2、第二类边值问题：

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \\ y'(a) = \alpha, \quad y'(b) = \beta \end{cases}$$

3、第三类边值问题：

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \\ k_1\, y(a) + k_2\, y'(a) = \gamma_1, \\ k_3\, y(b) + k_4\, y'(b) = \gamma_2 \end{cases};$$

4、周期边值条件：

$$y(a) = y'(a), \quad y(b) = y'(b)\text{；}$$

5、条件的统一表示：

$$U_j[y] = \alpha_{j0}y(a) + \beta_{j0}y(b) + \alpha_{j1}y'(a) + \beta_{j1}y'(b) = \gamma_j, \quad j = 1, 2. \tag{8.1.2}$$

其中α_{j0}, α_{j1}不同时为零，β_{j0}, β_{j1}不同时为零，$j = 1, 2$。

二、边值问题的分类：

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{8.1.1}$$

1、齐次：(8.1.1)和边值条件全为齐次。

2、非齐次：(8.1.1)和边值条件至少有一个非齐次。

三、一般边值问题解的存在唯一性

Theorem 8.1.1 **设 $p(x), q(x), f(x)$ 连续，若已知(8.1.1)的一个解 $y_0(x)$，且有**

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{8.1.3}$$

的基本解组 $y_1(x), y_2(x)$，则边值问题(8.1.1)- (8.1.2)：

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \\ U_1[y] = \alpha_{10}y(a) + \beta_{10}y(b) + \alpha_{11}y'(a) + \beta_{11}y'(b) = \gamma_1, \\ U_2[y] = \alpha_{20}y(a) + \beta_{20}y(b) + \alpha_{21}y'(a) + \beta_{21}y'(b) = \gamma_2 \end{cases}$$

可解 (<u>即至少存在一个解</u>) 当且仅当矩阵

$$\begin{pmatrix} U_1[y_1] & U_1[y_2] & U_1[y_0] - \gamma_1 \\ U_2[y_1] & U_2[y_2] & U_2[y_0] - \gamma_2 \end{pmatrix}$$

和 $\begin{pmatrix} U_1[y_1] & U_1[y_2] \\ U_2[y_1] & U_2[y_2] \end{pmatrix}$ **同秩；而边值问题(8.1.3)-(8.1.2)可解，当且仅当**

$$\begin{pmatrix} U_1[y_1] & U_1[y_2] & \gamma_1 \\ U_2[y_1] & U_2[y_2] & \gamma_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} U_1[y_1] & U_1[y_2] \\ U_2[y_1] & U_2[y_2] \end{pmatrix}$$

同秩；且边值问题有唯一平凡解当且仅当上述矩阵的秩均为 2。

证明 由已知(8.1.1)的通解形如 $y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) + y_0(x)$，其中 c_1, c_2 是任意常数。由边值条件得

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= c_1\left(\alpha_{10}y_1(a) + \beta_{10}y_1(b) + \alpha_{11}y_1'(a) + \beta_{11}y_1'(b)\right) \\ &\quad + c_2\left(\alpha_{10}y_2(a) + \beta_{10}y_2(b) + \alpha_{11}y_2'(a) + \beta_{11}y_2'(b)\right) \\ &\quad + \left(\alpha_{10}y_0(a) + \beta_{10}y_0(b) + \alpha_{11}y_0'(a) + \beta_{11}y_0'(b)\right) \\ &= c_1U_1[y_1] + c_2U_1[y_2] + U_1[y_0], \end{aligned}$$

$$\gamma_2 = c_1U_2[y_1] + c_2U_2[y_2] + U_2[y_0]$$

为求 c_1, c_2，只需求解如下线性代数方程组

$$\begin{cases} c_1 U_1[y_1] + c_2 U_1[y_2] = U_1[y_0] - \gamma_1, \\ c_1 U_2[y_1] + c_2 U_2[y_2] = U_2[y_0] - \gamma_2 \end{cases}$$

故边值问题(8.1.1)- (8.1.2)至少存在一个解当且仅当系数矩阵$\begin{pmatrix} U_1[y_1] & U_1[y_2] \\ U_2[y_1] & U_2[y_2] \end{pmatrix}$与增广矩阵$\begin{pmatrix} U_1[y_1] & U_1[y_2] & U_1[y_0] - \gamma_1 \\ U_2[y_1] & U_2[y_2] & U_2[y_0] - \gamma_2 \end{pmatrix}$的秩相等，有唯一平凡解当且仅当这两个矩阵的秩均为 2，即系数矩阵$\begin{pmatrix} U_1[y_1] & U_1[y_2] \\ U_2[y_1] & U_2[y_2] \end{pmatrix}$满秩。

对齐次方程的边值问题(8.1.3)-(8.1.2)结论类似。 □

§8.2 待定系数法求解第一类边值问题

一、二阶齐次线性方程(8.1.3)的边值问题

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \\ y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \end{cases} \tag{8.2.1}$$

设(8.1.3)有通解$y = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x)$，其中

$$\begin{cases} y_1(x): \quad y_1(a) = 1,\ y_1'(a) = 0, \\ y_2(x): \quad y_2(a) = 0,\ y_2'(a) = 1, \end{cases}, \tag{8.2.2}$$

将边界条件$y(a) = \alpha, y(b) = \beta$代入通解得

$$\begin{cases} c_1\, y_1(a) + c_2\, y_2(a) = \alpha, \\ c_1\, y_1(b) + c_2\, y_2(b) = \beta. \end{cases}$$

从而由(8.2.2)可得$c_1 = \alpha, c_2 = \dfrac{\beta - \alpha y_1(b)}{y_2(b)}$，于是有(8.2.1)的解

$$y = \alpha\, y_1(x) + \frac{\beta - \alpha y_1(b)}{y_2(b)} y_2(x)\text{。}$$

类似可得二阶齐次线性方程(8.1.3)的其它边值问题的解。

二、非齐次边值问题求解

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \\ y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta, \end{cases} \tag{8.2.3}$$

其中 $x \in [a,b]$。(8.2.3)求解的基础是所谓的叠加原理。可以先求

$$\begin{cases} y_0'' + p(x)y_0' + q(x)y_0 = f(x), \\ y_0(a) = \alpha, \quad y_0'(a) = 0, \end{cases},$$

得 $y_0(x)$，再求解

$$\begin{cases} y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0, \\ y_1(a) = 0, \quad y_1'(a) = 1, \end{cases},$$

得 $y_1(x)$，则(8.2.3)有解

$$y = y_0(x) + \frac{\beta - y_0(b)}{y_1(b)} y_1(x)。$$

但是，分别求解(8.2.1)和以下问题

$$\begin{cases} y_0'' + p(x)y_0' + q(x)y_0 = f(x), \\ y_0(a) = 0, \quad y_0(b) = 0, \end{cases} \tag{8.2.4}$$

得 $Y(x), y_0(x)$，进而得(8.2.3)的解 $y(x) = Y(x) + y_0(x)$ 的作法一般并不可行，因为(8.2.4)通常不满足 Theorem 8.1.1 中的可解性条件。

§8.3 Green 函数与边值问题

一、Green 函数的导出

1、二阶非齐次线性 ODE 的通解：

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \tag{8.1.1}$$

由常数变易法可得通解

$$y = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x) + \int_a^x \frac{y_2(x)y_1(t) - y_1(x)y_2(t)}{\mathcal{W}[y_1(t), y_2(t)]} f(t)\, dt,$$

其中$y_1(x)$，$y_2(x)$是对应的齐次 ODE(8.1.3)：

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0\text{，} \tag{8.3.1}$$

的两个线性无关解，而第三项是(8.1.1)在初始条件

$$y(a) = 0, \quad y'(a) = 0$$

下的特解。为方便计，设$y_1(x)$，$y_2(x)$满足：

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_1'(x) \end{pmatrix}\Bigg|_{x=a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_2(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix}\Bigg|_{x=a} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\text{，} \tag{8.3.2}$$

2、Green 函数的导出

设有边值问题(8.1.1)和

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 0\text{，} \tag{8.3.3}$$

则通解中$c_1 = 0$，且

$$c_2\, y_2(b) + \int_a^b \frac{y_2(b)y_1(t) - y_1(b)y_2(t)}{\mathcal{W}[y_1(t), y_2(t)]} f(t)\, dt = 0\text{，} \tag{8.3.4}$$

从而(8.1.1)(8.3.3)有唯一解当且仅当$y_2(b) \neq 0$。将(8.3.4)中的c_2代入上述通解得

$$\begin{aligned} y(x) &= -\frac{y_2(x)}{y_2(b)} \int_a^b \frac{y_2(b)y_1(t) - y_1(b)y_2(t)}{\mathcal{W}[t]} f(t)\, dt + \int_a^x \frac{y_2(x)y_1(t) - y_1(x)y_2(t)}{\mathcal{W}[t]} f(t)\, dt \\ &= -\frac{y_2(x)}{y_2(b)} \left(\int_a^x + \int_x^b \right) \frac{y_2(b)y_1(t) - y_1(b)y_2(t)}{\mathcal{W}[t]} f(t)\, dt \\ &\quad + \int_a^x \frac{y_2(x)y_1(t) - y_1(x)y_2(t)}{\mathcal{W}[t]} f(t)\, dt \\ &= \int_x^b \frac{y_2(x)f(t)}{y_2(b)\mathcal{W}[t]} [y_2(t)y_1(b) - y_2(b)y_1(t)]\, dt \\ &\quad + \int_a^x \frac{y_2(t)f(t)}{y_2(b)\mathcal{W}[t]} [y_2(x)y_1(b) - y_2(b)y_1(x)]\, dt \end{aligned}$$

定义函数

$$G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{y_2(t)}{y_2(b)\mathcal{W}[t]} [y_2(x)y_1(b) - y_2(b)y_1(x)], & t \in [a,x], \\ \dfrac{y_2(x)}{y_2(b)\mathcal{W}[t]} [y_2(t)y_1(b) - y_2(b)y_1(t)], & t \in [x,b], \end{cases}\text{，} \tag{8.3.5}$$

则边值问题(8.1.1)(8.3.3)有解

$$y(x)=\int_a^x G(x,t)\,f(t)\,dt,\quad x\in[a,b]\text{。}$$

3、Green 函数的定义

Definition 8.3.1 称如上的 $G(x,t)$ 为边值问题(8.1.1)-(8.3.3)的 Green 函数。

4、注：

（1）对不同的边值条件（齐次），也有特定的 Green 函数。

（2）Green 函数给出边值问题解的紧凑表示，而且只和齐次方程有关，而与非齐次项无关，从而是方程固有性质的一种表示与反映。

二、Green 函数与边值问题解的存在唯一性

1、边值问题解由基本解组表示的存在唯一性

Theorem 8.3.1 设(8.1.1)有基本解组 $y_1(x),\, y_2(x)$ 且 $y_2(b)\neq 0$，则对任意 $f(x)\in\mathcal{C}[a,b]$，边值问题(8.1.1)-(8.3.3)有唯一解 $y(x)=\int_a^x G(x,t)\,f(t)\,dt,\quad x\in[a,b]$。

2、Green 函数的性质

(1) $G(x,t)\in\mathcal{C}\big([a,b]\times[a,b]\big)$，且 $G(x,t)\equiv G(t,x),\ \forall(x,t)\in[a,b]\times[a,b]$；

(2) $\frac{\partial}{\partial x}G(x,t)\in\mathcal{C}\big([a,b]\times[a,b]\setminus\{(x,x)\mid x\in[a,b]\}\big)$；

(3) 对固定的 $t\in[a,b]$, $\overline{G}(x)\triangleq G(x,t)$ 为(8.3.1)的解；对固定的 $x\in[a,b]$, $\overline{\overline{G}}(x)\triangleq G(x,t)$ 满足边界条件(8.3.3)。

§8.4 本征值和本征函数